ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11754

Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

1978

P5 - 11754

Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО ПРОИЗВЕДЕНИЯМ РЕШЕНИЙ ДВУХ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ПОЛУОСИ

Направлено в журнал "Дифференциальные уравнения"

Христов Е.Х. P5 - 11754

О разложениях по произведениям решений двух задач Штурма-Лиувилля на полуоси

Методом контурного интегрирования получена формула обращения для разложений по произведениям $y_1(x,k)y_2(x,k)$ решений краевых задач

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))y_n = 0, \; y_n'(0) - a_n y_n(0) = 0 \quad (0 < x < \infty),$$

$$(1+x)v_n(x) \in L_1(0,\infty), \; \operatorname{Im} v_n = \operatorname{Im} a_n = 0 \quad (n = 1,2).$$

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Khristov E.Kh. P5 - 11754

On Expansions over Products of Solutions of Two Sturme-Liouville Problems on Semi-Axis

There are obtained inversion formulae for the expansion over products $y_1(x,k)y_2(x,k)$ of the solution of two eigenvalue problems

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))y_n = 0, \; y_n'(0) - a_n y_n(0) = 0, \quad (0 < x < \infty)$$

with $(1+x)v_n(x) \in L_1(0,\infty)$, $\operatorname{Im} v_n = \operatorname{Im} a_n = 0$ $(n = 1,2)$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В настоящей работе методом контурного интегрирования получена формула обращения для разложений по произведениям $y_1(x,k)\,y_2(x,k)$ решений краевых задач

$$y_n'' + (k^2 - v_n(x))y_n = 0 \quad (0 < x < \infty), \; (n = 1,2), \qquad /1/$$

$$y_n'(0,k) - a_n y_n(0,k) = 0 \quad (' = d/dx), \qquad /2/$$

где здесь и в дальнейшем a_n - конечные, действительные числа /при $a_n = \infty$ краевое условие /2/ заменяется на $y_n(0,k) = 0$ /, $v_n(x)$ - действительные, измеримые функции, удовлетворяющие неравенству

$$\int_0^\infty (1+x)|v_n(x)|dx < \infty. \qquad /3/$$

Указанный метод в случае $v_1(x) \equiv v_2(x)$ применялся к аналогичной задаче на конечном интервале в работе Барселона[/1/], а на полуоси - в [/2/]. Следует отметить также, что вопрос о полноте произведений двух задач Штурма-Лиувилля на конечном интервале в общем случае $v_1 \not\equiv v_2$ впервые был рассмотрен в классической работе Берга [/3/] о единственности соответствующей обратной задачи. Исчерпывающий ответ здесь получен Левитаном [/4,5/] /гл. 4/ на основе развитой им теории операторов обобщенного сдвига. На полуоси при $v_1 \equiv v_2$, $a_1 = a_2 = \infty$ некоторые формулы обращения для разложений по $y^2(x,k)$ были найдены Иостом и Коном [/6/] и Р.Ньютоном[/7/] /гл. 20/ с помощью известного уравнения Гельфанда-Левитана в обратной задаче спектрального анализа. Иной подход к этому случаю предложен в [/2/].

Основным результатом этой работы является доказанная в §2 теорема 1. §1 имеет вспомогательный характер. В §3 приведены некоторые приложения теоремы 1 в обратной задаче рассеяния (о.з.р.) для краевой задачи /1/, /2/.

§1. Обозначим через $\psi_n(x,k)$ и $f_n(x,k)$ $(n=1,2)$ решения уравнений /1/, определяемые соответственно условиями:

$$\psi_n(0,k)=1,\ \psi'_n(0,k)=\alpha_n\ , \tag{1.1}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_n(x,k)\exp(-ikx)=1 \quad (\mathrm{Im}\,k\geq 0)\ , \tag{1.2}$$

и пусть

$$e_n(k)=f'_n(0,k)-\alpha_n f_n(0,k)=W(\psi_n,f_n)\equiv\psi_n f'_n-\psi'_n f_n \tag{1.3}$$

характеристическая функция краевой задачи /1/, /2/.

Хорошо известно*, что при любом $x\geq 0$ $\psi_n(x,k)$ и $\psi'_n(x,k)$ есть целые четные функции от k, а $f_n(x,k)$, $f'_n(x,k)$ и $e_n(k)$ - регулярные при $\mathrm{Im}\,k>0$ непрерывные вплоть до вещественной оси функции. С некоторой постоянной C /не зависящей от x и k/ справедливы оценки

$$|f_n(x,k)|\leq C\exp(-\tau x)\ ,\quad k=\kappa+i\tau,\quad \tau\geq 0\ , \tag{1.4}$$

$$|\psi_n(x,k)|\leq C(1+x)\exp(\tau x)\ ,\quad |k\psi_n(x,k)|\leq C(1+|k|)\exp(\tau x) \tag{1.5}$$

и равномерно по $0\leq x<\infty$ при $|k|\to\infty$ $(\mathrm{Im}\,k\geq 0)$ существуют асимптотики

$$f_n(x,k)=e^{ikx}+O\left(\frac{1}{k}e^{-\tau x}\right),\ f'_n(x,k)=ike^{ikx}+O(e^{-\tau x})\ , \tag{1.6}$$

$$\psi_n(x,k)=\cos kx+O\left(\frac{1}{k}e^{\tau x}\right),\ \psi'_n(x,k)=-k\cos kx+O(e^{\tau x})\ . \tag{1.7}$$

Функция $e_n(k)$ имеет при $\mathrm{Im}\,k>0$ конечное число простых нулей: $k_j^{(n)}=i\tau_j^{(n)}$, $(\tau_j^{(n)}>0)$, $j=1,\dots,N_n$, причем из /1.3/ следует, что

$$f_n(x,k_j^{(n)})=f_n(0,k_j^{(n)})\psi_n(x,k_j^{(n)})\ . \tag{1.8}$$

При вещественных $k\neq 0$ $e_n(k)\neq 0$ и

$$\psi_n(x,k)=-(2ik)^{-1}[f_n(x,k)e_n(-k)-f_n(x,-k)e_n(k)]. \tag{1.9}$$

При $k=0$ возможен случай $e_n(0)=0$. Тогда существует

$$\lim k^{-1}e_n(k)=\dot e_n(0)\neq 0 \quad (k\to 0\ ,\ \mathrm{Im}\,k\geq 0) \tag{1.10}$$

и

$$f_n(x,0)=f_n(0,0)\psi_n(x,0)\ . \tag{1.11}$$

§2. Пусть теперь $E(k)=e_1(k)e_2(k)$,

$\Psi(x,k)=\psi_1(x,k)\psi_2(x,k)$, $F(x,k)=f_1(x,k)f_2(x,k)$.

Обозначим через $\{\Psi\}$ систему функций

$$\Psi(x,k)\ ,(k\in(0,\infty)\cup\sigma),\ \dot\Psi_j(x)=\frac{\partial}{\partial k}\Psi(x,k)\Big|_{k=k_j} \quad (k_j\in\sigma')\ , \tag{2.1}$$

где $\sigma=\sigma_1\cup\sigma_2$, $\sigma_n=\{k_j^{(n)}\}_{j=1}^{N_n}$, $\sigma'=\sigma_1\cap\sigma_2$, а через $\{\tilde\Psi\}$ систему

---

*Доказательство перечисленных здесь фактов вместе с используемыми далее без ссылок свойствами функций ψ_n, f_n и e_n имеется в /8/ /гл. 3/.

$$\Psi(x,k) - 1/2,\ (k\in(0,\infty)\cup\sigma),\ \dot\Psi_j(x)\ \ (k_j\in\sigma'). \qquad /2.2/$$

Далее построим функции $\{\Phi\}$ следующим образом: при вещественных $k\in(0,\infty)$ положим

$$\Phi(x,k) = -(4/\pi)\,k\,\mathrm{Im}\{F(x,k)E^{-1}(k)\}; \qquad /2.3/$$

при $k_j^{(n)}\in\sigma''=\sigma\setminus\sigma'$ положим

$$\Phi_j^{(n)}(x) = a_j^{(n)}F(x,k_j^{(n)}),\ \ a_j^{(n)} = 4k_j^{(n)}\dot E^{-1}(k_j^{(n)}) \qquad /2.4/$$

и каждому $k_j\in\sigma'$ сопоставим пару функций

$$\Phi_{j,1}(x) = b_j(\dot F(x,k_j) + d_jF(x,k_j)),\ \Phi_{j,2}(x) = b_jF(x,k_j), \qquad /2.5/$$

где $b_j = 8k_j\ddot E^{-1}(k_j)$, $d_j = k_j^{-1} - \dddot E(k_j)(3\ddot E(k_j))^{-1}$.

В случае $e_1(0)=e_2(0)=0$ введем еще

$$\Phi_0(x) = a_0F(x,0),\ \ a_0 = \lim_{k\to0} 2k^2E^{-1}(k). \qquad /2.3'/$$

Замечание. Исходя из тождества

$$W(y_1y_2, z_1z_2) = (k_1^2-k_2^2)^{-1}\frac{d}{dx}(W(y_1,z_1)W(y_2,z_2)), \qquad /2.6/$$

где $y_n = y_n(x,k_1)$, $z_n = z_n(x,k_2)$ - решения уравнений /1/ при $k=k_1,k_2$, нетрудно проверить с помощью сходной с приведенной в /9/ выкладки, что системы функций $\{\Psi\}$ и $\{\Phi\}$ биортогональны относительно отвечающего билинейной форме $[\tilde\Psi,\Phi] = \int_0^\infty\tilde\Psi(x)\frac{d}{dx}\Phi(x)\,dx$ индефинитного скалярного произведения. В частности, при $k_j^{(n)}, k_\ell^{(m)}\in\sigma''$ (n,m=1,2) имеем $[\tilde\Psi_j^{(n)},\Phi_\ell^{(m)}]=\delta_{j,\ell}\delta_{n,m}$, где $\tilde\Psi_j^{(n)}=\tilde\Psi(x,k_j^{(n)})$, при $k_j,k_\ell\in\sigma'$ – $[\tilde\Psi_{j,p},\Phi_{\ell,q}]=\delta_{j,\ell}\delta_{p,q}$ (p,q=1,2), где $\tilde\Psi_{j,1}=\tilde\Psi(x,k_j)$, $\tilde\Psi_{j,2}=\dot\Psi(x,k_j)$, и при $k_j^{(n)}\in\sigma''$, $k_\ell\in\sigma'$ – $[\tilde\Psi_{\ell,q},\Phi_j^{(n)}]=[\tilde\Psi_j^{(n)},\Phi_{\ell,q}]=0$ (q = 1,2).

Лемма 1. Для любой функции $h(x)\in L_1(0,\infty)$ интегралы

$$\Psi(h;k) = \int_0^\infty h(x)\Psi(x,k)\,dx,\ \dot\Psi(h;k_j) = \int_0^\infty h(x)\dot\Psi_j(x)\,dx \qquad /2.7/$$

при $k\in(0,\infty)\cup\sigma$ и $k_j\in\sigma'$ вместе с интегралом $\Psi(h;0)$ при $a_0\neq0$ сходятся абсолютно. При этом функция $\Psi(h;k)$ непрерывна при $k>0$, а если $e_1(0)=e_2(0)=0$, – при $k\geq0$.

Доказательство. Для обоснования первого утверждения достаточно отметить, что оценки /1.4/, /1.5/ с учетом /1.8/ при $k_j^{(n)}\in\sigma$ дают ограниченность по $0\leq x\leq\infty$ для функций $\Psi(x,k)$ /2.1/, а в силу асимптотики

$$\dot\psi_n(x,k_j) = (2ik_j)^{-1}\dot e_n(k_j)\exp(r_jx)[1+o(1)]\ \ (x\to\infty) \qquad /2.8/$$

и для $\dot\Psi_j(x)$. Второе утверждение очевидно, если $k>0$, а если $k\to0$, его получим, заметив, что при $e_n(0)=0$ в силу /1.4/, /1.9/, /1.10/ имеем $|\psi_n(x,k)|\leq$ const при $0\leq x,k\leq\infty$ и равномерно по $0\leq x\leq N$ $(<\infty)$ при $k\to0$ существует $\lim\psi_n(x,k) = -i\dot e_n(0)f_n(x,0)$. Лемма доказана.

Теорема 1. Пусть заданы две краевые задачи /1/, /2/ с $v_n(x)$, удовлетворяющими неравенству /3/, и пусть $h(x)$ - произвольная вещественная функция, для которой $(1+x)h(x)\in L_1(0,\infty)$. Обозначим через $\tilde\Psi(h;k)$, $\Psi(h;k_j)$ ее коэффициенты разложения /определяемые аналогично /2.7// по системе $\{\tilde\Psi\}$ /2.2/. Тогда:

А. При любом $x\geq0$ справедлива формула обращения

$$-\int_x^\infty h(t)\,dt = \lim_{R\to\infty,\,\epsilon\to0}\int_\epsilon^R\tilde\Psi(h;k)\Phi(x,k)\,dk + \Phi_0(x)\tilde\Psi(h;0) + \sum_{k_j^{(n)}\in\sigma''}\Phi_j^{(n)}(x)\tilde\Psi(h;k_j^{(n)}) + \sum_{k_j\in\sigma'}\{\Phi_{j,1}(x)\tilde\Psi(h;k_j)+\Phi_{j,2}(x)\dot\Psi(h;k_j)\}, \qquad /2.9/$$

где $\Phi(x,k)-\Phi_{j,2}(x)$ даются /2.3/-/2.7/. Интеграл в правой стороне /2.9/ сходится равномерно по x в каждом конечном интервале полуоси $0\le x<\infty$, причем, если $a_0=0$, сходимость абсолютна /по k / при $\epsilon\to 0$, а если $h\in L_1\cap L_2$, - при $R\to\infty$. В общем случае предел является несобственным интегралом и его значение понимается как главное /в смысле Коши/.

Б. Если через $H_{\epsilon,R}(x)$ обозначить правую сторону равенства /2.9/ при конечных $\epsilon>0$, $R<\infty$ и

$$h_R(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\frac{d}{dx}H_{\epsilon,R}(x)=\lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R\tilde\Psi(h;k)\frac{d}{dx}\Phi(x,k)\,dk+\dots, \qquad /2.10/$$

то при $x\ge 0$ разложение $h_R(x)$ равномерно равносходится с косинус-разложением Фурье функций $h(x)$, т.е.

$$\lim_{R\to\infty}\sup_{0\le x<\infty}\left|h_R(x)-\frac{4}{\pi}\int_0^R\left\{\int_0^\infty h(y)\cos 2ky\,dy\right\}\cos 2kx\,dk\right|=0. \qquad /2.11/$$

Доказательство. Построим функцию

$$G(x,y;k)=\frac{1}{E(k)}\begin{cases} f_1(x)\,\psi_2(x)\,f_2(y)\,\psi_1(y)+\psi_1(x)\,f_2(x)\psi_2(y)f_1(y)\\ -\psi_1(x)\,\psi_2(x)\,f_1(y)\,f_2(y) & (x\le y<\infty),\\ f_1(x)\,f_2(x)\,\psi_1(y)\,\psi_2(y) & (0\le y\le x), \end{cases} \qquad /2.12/$$

где $\psi_n(x)=\psi_n(x,k)$, $f_n(x)=f_n(x,k)$, и пусть

$$Q(x,k)=\int_0^\infty G_1(x,y;k)\,h(y)\,dy \qquad (h\in L_1,\ \mathrm{Im}\,k\ge 0),$$

где $G_1(x,y;k)=4k\,G(x,y;k)-2kF(x,k)\,E^{-1}(k)$. Из оценок /1.4/, /1.5/ и изложенных в §1 аналитических свойств функций ψ_r, f_n и e_n вытекает, что при любом $x\ge 0$ $Q(x,k)$ является регулярной функцией от k при $\mathrm{Im}\,k>0$, за исключением конечного числа полюсов $k_j^{(n)}\in\sigma$, и непрерывной при $\mathrm{Im}\,k\ge 0$, $k\ne 0$.

Рассмотрим интеграл $I_{R,\epsilon}(x)=\int_\gamma Q(x,k)\,dk$ по контуру γ, который проходит вдоль действительной оси от $-R$ до $+R$, обходя точки $k=0$ в верхней полуплоскости по полуокружности γ_ϵ с радиусом $\epsilon<\min|k_j^{(n)}|$, и замыкается полуокружностью γ_R : $k=R\exp(i\phi)$, $(0\le\phi\le\pi)$, $R>\max|k_j^{(n)}|$. Из теоремы о вычетах в силу равенств /1.8/ и леммы 1 следует, что значение $I_{R,\epsilon}(x)$ равно слагаемым в правой стороне /2.9/, отвечающим условию $k_j^{(n)}\in\sigma$.

Пусть теперь $\chi_n(x,k)$ - решения уравнений /1/, определяемые начальными условиями

$$\chi_n(0,k)=-\alpha_n(1+\alpha_n^2)^{-1},\ \chi_n'(0,k)=(1+\alpha_n^2)^{-1}. \qquad /2.13/$$

Тогда из /1.3/ и $W(\psi_n,\ \chi_n)=1$ вытекает, что при $x\le y<\infty$ функция $G_1(x,y;k)$ равна:

$$-4k\prod_{n=1,2}(\psi_n(x,k)\,\chi_n(y;k)-\psi_n(y,k)\,\chi_n(x,k))\ +$$

$$+\ 4kE^{-1}(k)\,F(x,k)\,\tilde\Psi(y,k).$$

Так как первое слагаемое здесь - целая нечетная функция от k и при вещественных $k\ne 0$ $\overline{f(x,k)}=f(x,-k)$, то

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-R}^{-\epsilon}+\int_\epsilon^R\right\}Q(x,k)\,dk=\frac{4}{\pi}\int_\epsilon^R k\tilde\Psi(h;k)\,\mathrm{Im}\{F(x,k)E^{-1}(k)\}dk. \qquad /2.14/$$

Имея в виду /1.10/, /1.11/ при $e_n(0)=0$, получаем, что если $(1+x)\,h(x)\in L_1(0,\infty)$, то предел

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{\gamma_\epsilon}Q(x,k)\,dk=-a_0F(x,0)\,\tilde\Psi(h;0). \qquad /2.15/$$

/Для этого достаточно воспользоваться оценками /1.4/, /1.5/ и учесть, что при $k\to 0$ $(\mathrm{Im}\,k\ge 0)$ $\lim kf_n(x,k)=\lim k\psi_n(x,k)=0$ равномерно по $0\le x\le N\,(<\infty)$/.

Далее из асимптотик /1.6/, /1.7/ и вытекающей оттуда асимптотики $e_n(k)=ik(1+O(k^{-1}))$ следует, что при $|k|\to\infty$

$$Q(x,k) = -\frac{2}{k}\int_x^\infty h(y)\,dy - \frac{2i}{k}\sin 2kx \int_x^\infty h(y)\, e^{2iky}\,dy -$$

$$-\frac{2e^{2ikx}}{k}\int_0^x h(y)\cos 2ky\,dy + O\Big(\frac{1}{k^2}\int_0^\infty |h(y)|\,dy\Big).$$

Оценивая здесь второе и третье слагаемые, как обычно /см., напр.,/[10]/ /стр. 331/, на основе леммы Жордана и равномерной непрерывности при $x \geq 0$ функций $\int_x^\infty h(y)\,dy$ находим, что равномерно по $0 \leq x < \infty$ $\lim_{R\to\infty}(2\pi i)^{-1}\int_{\gamma_R} Q(x,k)\,dk = -\int_x^\infty h(y)\,dy$. Сравнивая таким образом вычисленный непосредственно по контуру $\lim I_{R,\epsilon}(x)$ $(\epsilon \to 0,\ R\to\infty)$ со значением $I_{R,\epsilon}(x)$, найденным в начале, по теореме о вычетах получаем формулу обращения /2.9/.

Указанные в теореме условия абсолютной сходимости интеграла /2.14/ являются прямым следствием приведенных в §1 оценок и асимптотик.

Формулы разложения /2.10/, /2.11/ получаются, как выше, с помощью контурного интеграла $(2\pi i)^{-1}\int_\gamma \frac{d}{dx}Q(x,k)\,dk$ ввиду того, что из /1.6/ и /1.7/ имеем при $|k|\to\infty$ равенства

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\frac{d}{dx}Q(x,k)\,dk = -\frac{2}{\pi}\int_{\gamma_R}\Big\{e^{2ikx}\int_0^x h(y)\cos 2ky +$$

$$+\cos 2kx\int_x^\infty h(y)\,e^{2iky}\,dy\Big\}\,dk + o(1) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\int_0^R\Big\{\int_0^\infty h(y)\cos 2ky\,dy\Big\}\cos 2kx\,dk + o(1).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Если в /2.9/ заменим коэффициенты разложения $\widetilde{\Psi}(h;k)$, $(k\in(0,\infty)\cup\sigma)$ на $\Psi(h;k)$ (2.7), то полученная формула обращения остается справедливой при $x>0$.

Доказательство следует из определения $\widetilde{\Psi}(x,k)$ /2.2/, если при $x>0$ воспользоваться равенством

$$\lim_{R\to\infty,\epsilon\to 0}\int_\epsilon^R \Phi(x,k)\,dk + \Phi_0(x) + \sum_{k_j^{(n)}\in\sigma''}\Phi_j^{(n)}(x) +$$

$$+\sum_{k_j\in\sigma'}\Phi_{j,1}(x) = \begin{cases} 0, & (x>0), \\ 2, & (x=0), \end{cases} \qquad /2.16/$$

которое получается вычислением контурного интеграла $(2\pi i)^{-1}\int_\gamma kF(x,k)E^{-1}(k)\,dk$ по способу, указанному в доказательстве теоремы 1.

Следствие 2. Пусть функция $h(x)$ удовлетворяет неравенству /3/. Тогда условия

$$\Psi(h;k) = \mathrm{const}\ (k\in(0,\infty)\cup\sigma),\quad \dot{\Psi}(h;k_j),\ (k_j\in\sigma')$$

являются необходимыми и достаточными для того, чтобы $h(x)=0$ почти всюду. /Отсюда видно, что системы $\{\Psi\}$ /2.1/ и $\{\widetilde{\Psi}\}$ /2.2/ полны в классе функций $h(x)$, для которых $(1+x)h(x)\in L_1(0,\infty)$/.

Доказательство при $a_0=0$ получается сразу из /2.9/ и /2.16/, а при $a_0\neq 0$ следует дополнительно учесть указанную в лемме 1 непрерывность $\Psi(h;k)$ при $k\to 0$.

Замечание. Так как условие $(1+x)h(x)\in L_1(0,\infty)$ использовалось лишь в доказательстве существования предела /2.15/ при $a_0\neq 0$, то, если $a_0=0$, утверждения теоремы 1 и следствия 1, 2 имеют место для любой функции $h(x)\in L_1(0,\infty)$.

Остановимся в заключение этого параграфа коротко на конструкции основной в наших построениях функции G /2.12/ и возможных обобщениях изложенной выше схемы обращения. Очевидно, если в /2/ $a_n = \infty$ и $\phi_n(x, k)$ - решение уравнения /1/, определяемое условиями $\phi_n(0,k) = 0$, $\phi'_n(0,k) = 1$, то роль G играет функция, полученная из /2.12/ путем замены соответствующих ψ_n на ϕ_n и e_n/1.3/ на $f_n(0,k)$. Явный вид вытекающего отсюда разложения вполне аналогичен /2.9/ /и для $v_1 \equiv v_2$ имеется в [2]/. Здесь нетрудно также вывести с помощью тождества /2.6/ соответствующие аналоги преобразований Крама-Крейна[5] /стр. 96/ для произведений решений двух уравнений вида /1/. На их основе можно получить формулы обращения при $a_n = \infty$ непосредственно из /2.9/ и далее распространить их на случай, когда $v_n(x)$ имеют слагаемое вида $\ell(\ell + 1)x^{-2}$ $(\ell = 1,2,\ldots)$.

Обозначим теперь через $\psi_n(x,\lambda)$ и $\chi_n(x,\lambda)$ введенные ранее посредством /1.1/ и /2.13/ решения уравнения /1/ с $k^2 = \lambda$. Определим функцию Вейля $m_n(\lambda)$ из условия

$$\chi_n(x,\lambda) + m_n(\lambda)\psi_n(x,\lambda) = \theta_n(x,\lambda) \in L_2(0,\infty) \qquad /2.17/$$

при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. Так как при условии /3/ для оператора /1/,/2/ имеем случай предельной точки, то /2.17/ определяем функцию m_n единственным образом:

$$m_n(\lambda) = (f_n(0,k) + a_n f'_n(0,k))((1+a_n^2)e_n(k))^{-1}, (k^2=\lambda, \operatorname{Im} k>0).$$

Это вместе с /1.2/ и /1.3/ дает для функций $G(x,y;k^2)$ /2.12/ следующую запись:

$$G(x,y;\lambda) = \begin{cases} \theta_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\theta_2(y,\lambda)\psi_1(y,\lambda)+\theta_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)\theta_1(y,\lambda)\psi_2(y,\lambda) \\ -\psi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\theta_1(y,\lambda)\theta_2(y,\lambda) \qquad (x \le y < \infty), \\ \theta_1(x,\lambda)\theta_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)\psi_2(y,\lambda) \qquad (0 \le y \le x). \end{cases} \qquad /2.18/$$

Ввиду того, что функция Вейля существует /возможно, она не является единственной/ для всякого

$u_n \in L_{loc}$ /см., напр.,[10] /гл. 9//, то выражение /2.18/ с m_n из /2.17/ имеет смысл для любых двух краевых задач /1/, /2/ и в силу характеристических свойств $m_n(\lambda)$ /формально/ порождает формулу обращения для разложений по $\psi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)$. Отметим еще, что если $v_1 \equiv v_2 = v(x) \in C_1$ и хотя бы одно из чисел $a_n = \infty$, то G определяет функцию Грина для краевой задачи[1,2]

$$AY \equiv -Y''' + 4vY' + 2v'Y = 4\lambda Y', \; Y'(0) - 2a\,Y(0) = 0 \quad (0<x<\infty)$$

/сопряженной к задаче $AY = 4\lambda Y'$, $Y(0) = Y''(0) - 2aY'(0) = 0$/. Функцию /2.18/ можно рассматривать как ее естественное обобщение на случай $v_1 \neq v_2$, $a_n \neq \infty$ $(n = 1,2)$.

§3. Сопоставим каждой краевой задаче

$$y'' + (k^2 - v(x))y = 0, \; y'(0) - a\,y(0) = 0 \quad (0<x<\infty) \qquad /3.1/$$

ее данные рассеяния [8]:

$$\eta(v,a;k), \; (0<k<\infty); \quad \lambda_j(v,a), \; m_j(v,a), \; (j = 1,\ldots,N), \qquad /3.2/$$

где $\eta(k) = \arg e(k)$ /$e(k) = e(v,a;k)$ определяется формулой /1.3// - фаза рассеяния, $\lambda_j = -\kappa_j^2$ $(e(i\kappa_j)=0)$ - собственные числа, $m_j^{-1/2}$ - нормы собственных функций /1.8/ в $L_2(0,\infty)$:

$$m_j = \{\int_0^\infty f^2(x,k_j)\,dx\}^{-1} = 2k_j(f(0,k_j)\,\dot{e}(k_j))^{-1}. \qquad /3.3/$$

Здесь приведем элементарное доказательство следующей известной теоремы Марченко о единственности решения обратной задачи рассеяния:

Т е о р е м а 2 /см.[8]/стр. 184//. Набор величин /3.2/ определяет однозначно функцию $v(x)$ и число a в /3.1/.

Для доказательства этой теоремы нам понадобится л е м м а 2. Пусть $\eta_n(k) = \eta(v_n, a_n; k)$ - фазы рассеяния краевых задач /1/, /2/. Тогда: при $k>0$ справедливо равенство

$$k^{-1}|e_1(k)\,e_2(k)|\sin(\eta_2(k)\quad\eta_1(k))-\Delta\alpha=\Psi(\Delta v;k)\quad /3.4/$$

где $\Delta\alpha=\alpha_2-\alpha_1$, $\Delta v(x)=v_2(x)-v_1(x)$, и если $\lim_{k\to\infty}k(\eta_2(k)-\eta_1(k))=0$, то

$$\alpha_1+\frac{1}{2}\int_0^\infty v_1(x)\,dx=\alpha_2+\frac{1}{2}\int_0^\infty v_2(x)\,dx. \qquad /3.5/$$

При $k=k_j$, где $e_1(k_j)=e_2(k_j)=0$, имеем

$$\Delta\alpha=-\Psi(\Delta v;k_j),\ m_j^{(2)}-m_j^{(1)}=(1/2)\,b_j\,\dot\Psi(\Delta v;k_j), \qquad /3.6/$$

а если $e_n(k_j^{(n)})=0$, $e_m(k_j^{(n)})\neq 0$ $(m\neq n,\ m,n=1,2)$, то

$$2m_j^{(n)}=(-1)^n a_j^{(n)}(\Delta\alpha+\Psi(\Delta v;k_j^{(n)})). \qquad /3.7/$$

Доказательство. Равенство /3.4/ получим, проинтегрировав по x от 0 до ∞ тождество

$$\frac{d}{dx}W(y_1(x,k),y_2(x,k))=(v_2(x)-v_1(x))\,y_1(x,k)\,y_2(x,k) \qquad /3.8/$$

с $y_n(x,k)=\psi_n(x,k)$, учитывая при $x\to\infty$ вытекающую из /1.6/ и /1.9/ асимптотику

$$\psi_n(x,k)=-k^{-1}|e_n(k)|\sin(kx-\eta_n(k))+o(1).$$

Точно так же выводится /3.7/ и первое из равенств /3.6/, если учесть /1.8/ и /3.3/. Дифференцируя /3.8/ по $k(y_n=\psi_n(x,k))$ и затем полагая $k=k_j$, получаем, как выше, второе равенство в /3.6/, если воспользоваться /2.8/. Равенство /3.5/ является прямым следствием известной асимптотики $\eta(k)=-\frac{\pi}{2}+\frac{1}{k}(\alpha+\frac{1}{2}\int_0^\infty v_n(x)\,dx)+o(\frac{1}{k})$ $(k\to\infty)$.

Доказательство теоремы 2. Пусть заданы две краевые задачи /1/, /2/, для которых $\eta(v_1,\alpha_1;k)=\eta(v_2,\alpha_2;k)$ $(0<k<\infty)$, $\lambda_j(v_1,\alpha_1)=\lambda_j(v_2,\alpha_2)$, $m_j(v_1,\alpha_1)=m_j(v_2,\alpha_2)$ $(j=1,\dots,N)$.

Тогда из леммы 2 имеем

$$\tilde\Psi(\Delta v;k)=0,\ (0<k<\infty),\ \tilde\Psi(\Delta v;k_j)=\dot\Psi(\Delta v;k_j)=0,$$

$(j=1,\dots,N)$, что в силу следствия 2 теоремы 1 дает $\Delta v(x)=0$ почти всюду. Отсюда в силу /3.5/ следует $\Delta\alpha=0$. Теорема доказана.

В качестве еще одного простого приложения результатов §1 и леммы 2 отметим следующую лемму.

Лемма 3. Пусть $\{\eta_n(k),\lambda_j^{(n)},m_j^{(n)}\}$ $(n=1,2)$ – данные рассеяния /3.2/ краевых задач /1/, /2/, $S_n(k)=\exp(-2i\eta_n(k))$, $(S_n(-k)=\bar S_n(k))$. Тогда при $x>0$ имеем

$$\frac{1}{2}\int_x^\infty(v_1(y)-v_2(y))\,dy=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\{S_1(k)-S_2(k)\}F(x,k)\,dk+$$

$$+\sum_{k_j^{(n)}\in\sigma''}(-1)^n m_j^{(n)}F(x,k_j^{(n)})+\sum_{k_j\in\sigma'}(m_j^{(2)}-m_j^{(1)})F(x,k_j). \qquad /3.9/$$

Равенство /3.9/ при условии /3.5/ остается справедливым и в точке $x=0$, причем, если $v_n(x)$ - абсолютно непрерывные функции, /3.9/ допускает дифференцирование по x в смысле /2.10/, /2.11/.

Доказательство в силу представлений /3.4/-/3.7/ для коэффициентов разложения /2.7/ функций $h=\Delta v$ получаем сразу из формул обращения /2.9/, /2.11/ и тождества /2.16/, учитывая, что при $a_0\neq 0$ из /3.4/ следует $\Delta\alpha=-\Psi(\Delta v;0)$.

Замечание. В связи с устойчивостью о.з.р. равенство /3.9/ для случая $\alpha_n=\infty$ $(n=1,2)$ было получено в [8]/стр. 199/ как следствие уравнения Марченко в о.з.р.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barcilon V. J.Math.Phys., 1974, 15, No. 4.*
2. *Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-11251, Дубна, 1978.*

3. Borg G. Acta Math., 1946, 78.
4. Левитан Б.М. ДАН СССР, 1952, 83, №3.
5. Левитан Б.М. Теория операторов обобщенного сдвига. "Наука", М., 1973.
6. Jost R., Kohn W. Kgl. Danske Vid. Selsk. Math.Phys. Medd., 1953, 27, No. 9.
7. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. "Мир", М., 1969.
8. Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. "Наукова думка", Киев, 1972.
9. Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Функциональный анализ. 1971, 5, №4.
10. Коддингтон Э.А., Левинсон А. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. ИЛ., М., 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1978 года.