СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11708

В.М.Лебеденко

О ПОДАЛГЕБРАХ PR-АЛГЕБР

1978

P5 - 11708

В.М.Лебеденко

О ПОДАЛГЕБРАХ **PR**-АЛГЕБР

Лебеденко В.М. P5 - 11708

О подалгебрах PR - алгебр

В работе рассматриваются PR-алгебры, то есть неабелевы алгебры Ли с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i < j)$. Описываются подалгебры PR-алгебр, в частности их центры, абелевы подалгебры и идеалы. Показывается, что всякая неабелева подалгебра PR-алгебры сама является PR-алгеброй.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Lebedenko V.M. P5 - 11708

On Subalgebra of PR-Algebras

PR-algebras that is nonabelian Lie algebras with commutation relations of the $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i<j)$ type are considered. Subalgebras of the PR-algebras are described, in particular, their centres. Abelian subalgebras and ideals. It is shown that any nonabelian subalgebra of the PR-algebra is the PR-algebra itself.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [2-6] изучались PR-группы и соответствующие им PR-алгебры. Неабелеву алгебру Ли L мы называем PR-алгеброй, если она имеет базис

$$[H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n] \quad (\text{PR-базис}, \quad n \geq 2),$$

элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} &[H_i, H_j] = 0 \qquad \text{при всех } i,j \leq p \quad \text{и всех } i,j > p, \\ &[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \qquad \text{при всех } i,j, \quad i \leq p, \ j > p \end{aligned} \tag{1}$$

($r_{ij} \in R$; при любом фиксированном i, $r_{ij} \neq 0$).

В настоящей работе мы опишем подалгебры PR-алгебр, в частности их центры, абелевы подалгебры и идеалы. Мы покажем, что произвольные неабелевы подалгебры PR-алгебр являются PR-алгебрами.

2. ПРИМЕРЫ ПОДАЛГЕБР PR-АЛГЕБР

Пусть $L = \{H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n\}$ - PR-алгебра, где элементы H_i удовлетворяют соотношениям (1) (через $\{M\}$ здесь и ниже мы обозначаем подпространство, натянутое на множество M). Тогда, в силу соотношений (1), для любого подмножества $A \subset [H_1, \dots, H_n]$, $\{A\}$ -подалгебра L. Заметим, что для любых натуральных чисел q и ℓ, $q \le p$, $\ell \le n-p$, в L существует такая подалгебра L', что $\dim([L',L']) \le q$, а $\dim(L'/[L',L']) = \ell$. В качестве L' можно взять подалгебру $\{H_1,\dots,H_q,H_{p+1},\dots,H_{p+\ell}\}$ (здесь производная алгебра $[L',L'] \subseteq \{H_1,\dots,H_q\}$). Очевидно, что все из указанных подалгебр являются PR-алгебрами. Алгебра L содержит абелевы подалгебры. Такими подалгебрами являются множества $\{B\}$ и $\{C\}$ для любых

$$B \subseteq [H_1,\dots,H_p], \quad C \subseteq [H_{p+1},\dots,H_n].$$

3. ЦЕНТРЫ PR-АЛГЕБР

В работе [4] каждой PR-алгебре (см. (1)) сопоставляется каноническая матрица

$$C = \begin{pmatrix} r_{1p+1} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{pp+1} & \dots & r_{pn} \end{pmatrix}.$$

С помощью комбинаций элементарных столбцовых преобразований и перестановок строк каждая такая матрица приводится к одному из видов

$$\left(\begin{array}{c|c} E_\pi & 0 \\ \hline X & 0 \end{array}\right), \qquad (E_\pi \mid 0) \tag{2}$$

или одному из видов

$$\left(\begin{array}{c} E_\pi \\ \hline X \end{array}\right), \qquad (E_\pi), \tag{3}$$

где $\pi = r(C)$, E_π **-единичная** $\pi \times \pi$ -матрица. Такие формы канонических матриц мы называем приведенными. Этим преобразованиям строк и столбцов соответствуют невырожденные преобразования PR-базисов. Перестановке строк, естественно, соответствует перенумерация элементов H_i $(i \le p)$, а всякому преобразованию столбцов $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n \to \alpha'_{p+1},\dots,\alpha'_n$, где

$$\alpha'_i = \sum_{j=p+1}^{n} k_{ij}\,\alpha_j$$

ставится в соответствие переход

$$H_i \to H'_i = \sum_{j=p+1}^{n} k_{ij} H_j \quad (i = p+1,\dots,n).$$

Так как при этом

$$[H_\ell, H'_i] = \sum_{j=p+1}^{n} k_{ij}[H_\ell, H_j] =$$

$$= \Big(\sum_{j=p+1}^{n} k_{ij}\, r_{\ell j}\Big) H_\ell = r'_{\ell i} H_\ell \quad (\ell \le p),$$

то приведенная форма матрицы C является канонической матрицей для преобразованного базиса. Из соображений линейной зависимости вытекает, что алгебра Ли L – без центра, если приведенная форма ее канонической матрицы имеет один из видов (3). Если же она имеет один из видов (2), то центр алгебры L равен $\{H'_{p+\pi+1},\dots,H'_n\}$.

Поясним это подробнее. Пусть в первом случае элемент $x = \sum_1^n k_j H'_j$ коммутирует со всеми элементами L. Следовательно, $[H'_i, x] = 0$ для всех $i \le p$. Поэтому

$$\sum_{j=p+1}^{n} k_j [H'_i, H'_j] = \Big(\sum_{j=p+1}^{n} k_j r'_{ij}\Big) H'_i = 0 \quad (i = 1,\dots,p).$$

В силу линейной независимости столбцов нашей матрицы, $k_{p+1} = \dots = k_n = 0$. Следовательно, $x = \sum_{j=1}^{p} k_j H'_j$. Но

$$[x, H'_\ell] = \sum_{j=1}^{p} k_j [H'_j, H'_\ell] = \sum_{j=1}^{p} k_j r'_{j\ell} H'_j = 0, \quad \ell = p+1,\dots,n.$$

Отсюда $k_1 = \dots = k_p = 0$, ввиду линейной независимости $H_1,\dots,H_p$, и $x = 0$.

Рассмотрим второй случай. Пусть $x = \sum_{j=1}^{n} k_j H'_j$ принадлежит центру алгебры L. Тогда точно так же, как и в первом случае, можно показать, что $k_1 = \ldots = k_{p+\pi} = 0$. Отсюда, в частности, следует, что $\{H_1, \ldots, H_{p+\pi}\}$ –подалгебра без центра. Далее получаем, что центр L содержится в алгебре $\{H'_{p+\pi}, \ldots, H'_n\}$. Легко видеть, что все элементы этой алгебры принадлежат центру. Следовательно, центр алгебры L равен $\{H'_{p+\pi+1}, \ldots, H'_n\}$.

4. АБЕЛЕВЫ ПОДАЛГЕБРЫ PR-АЛГЕБР

Не все абелевы подалгебры PR-алгебр имеют вид, указанный в пункте 2. Например, подпространство PR-алгебры L, натянутое на произвольный элемент из $L\setminus 0$, является ее одномерной абелевой подалгеброй. Существуют абелевы подалгебры больших размерностей и не содержащиеся ни в $\{H_1, \ldots, H_p\}$, ни в $\{H_{p+1}, \ldots, H_n\}$. Приведем пример. Пусть $n = 4$, $p = 2$, $L = \{H_1, H_2, H_3, H_4\}$, $r_{ij} = 1$ при всех i, j, $i \le p < j$, $a = H_1 + H_3$, $b = H_1 + H_4$. Тогда $[a, b] = 0$, $\dim\{a, b\} = 2$ и $\{a, b\}$ –абелева подалгебра L. Рассмотрим общий случай. Пусть $L' = \{a_1, \ldots, a_m\}$ –абелева подалгебра

$$L = \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n\}$$

и

$$a_i = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{it} H_t \quad (i = 1, \ldots, m).$$

Так как $[a_i, a_j] = 0$ для всех $i, j \le m$, то

$$\Big[\sum_{t=1}^{n} \alpha_{it} H_t, \sum_{s=1}^{n} \alpha_{js} H_s\Big] =$$

$$= \sum_{t=1}^{p} \Big(\alpha_{it}\Big(\sum_{s=p+1}^{n} \alpha_{js} r_{ts}\Big) - \alpha_{jt}\Big(\sum_{s=p+1}^{n} \alpha_{is} r_{ts}\Big)\Big) H_t = 0$$

и

$$\alpha_{it}\Big(\sum_{s=p+1}^{n} \alpha_{js} r_{ts}\Big) - \alpha_{jt}\Big(\sum_{s=p+1}^{n} \alpha_{is} r_{ts}\Big) = 0, \qquad (4)$$
$$t = 1, \ldots, p; \quad i, j = 1, \ldots, m.$$

Если $[a_1, \ldots, a_m]$ –базис алгебры L', то для любых его элементов a_i и a_j выполняются соотношения (4). Естественно, справедливо и обратное: если некоторое линейно независимое множество $[a_1, \ldots, a_m]$ удовлетворяет соотношениям (4), то $\{a_1, \ldots, a_m\}$ –абелева подалгебра L.

Отметим, что размерность абелевой подалгебры из L может достичь $\dim L - 1$. Например, $L = \{H_1, \ldots, H_n\}$, $[H_i, H_n] = H_i$, $i \le n-1$, $L' = \{H_1, \ldots, H_{n-1}\}$.

5. ИДЕАЛЫ PR-АЛГЕБР

Пусть PR-алгебра $L = \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n\}$ и A –идеал в L. Матрицы операторов $\mathrm{ad}\, H_j (j > p)$ на L диагональны (в базисе $[H_i]_1^n$), а подпространство A инвариантно относительно всех этих операторов. Следовательно (см. /7/), у алгебры A есть такой базис $[a_1, \ldots, a_m]$, что $[a_i, H_j] = k_{ij} a_i$ $(i = 1, \ldots, m; j = p+1, \ldots, n)$. Пусть $a_i = \sum_{t=1}^{p} \alpha_{it} H_t + \sum_{t=p+1}^{n} \alpha_{it} H_t$ $(i = 1, \ldots, m)$.
Тогда для любых $i \le m$ и $j \ge p+1$ $[a_i, H_j] = \sum_{t=1}^{p} \alpha_{it} r_{tj} H_t$.
Если для некоторого i $\sum_{t=p+1}^{n} \alpha_{it} H_t \ne 0$, то $k_{ij} = 0$ и $\alpha_{it} r_{tj} = 0$ $(t = 1, \ldots, p; j = p+1, \ldots, n)$. Так как $r_{tj} \ne 0$ $(j = p+1, \ldots, n)$ при каждом фиксированном t, то $\sum_{t=1}^{p} \alpha_{it} H_t = 0$. Если $\sum_{t=p+1}^{n} \alpha_{it} H_t = 0$, то $a_i = \sum_{t=1}^{p} \alpha_{it} H_t$ и для всех t, для которых $\alpha_{it} \ne 0$, $r_{tj} \equiv k_{ij}$ (при каждом фиксированном $j \ge p+1$).). Либо указанный базис A состоит из элементов только первого типа, либо только второго типа, либо из тех и других.
В первом случае элементы a_i имеют вид $a_i = \sum_{t=p+1}^{n} \alpha_{it} H_t$.
Так как $[H_s, a_i] \in A$ для любого $s \le p$, , то

$\sum_{t=p+1}^{n} r_{st}\alpha_{it}=0$ $(s=1,\dots,p; i=1,\dots,m)$. Иными словами, все a_i принадлежат центру L. Рассмотрим третий случай. Для всякого элемента $a_i=\sum_{t=p+1}^{n}\alpha_{it}H_t\in A$ и любого элемента H_s, $s\le p$, подалгебра A должна содержать элемент $[H_s,a_i]=(\sum_{t=p+1}^{n}\alpha_{it}r_{st})H_s$, который, в частности, может равняться и нулю. Если для какого-то H_s $(s\le p)$ и некоторого i $\sum_{t=p+1}^{n}\alpha_{it}r_{st}\ne 0$, то $H_s\in A$. Если при этом H_s не содержится в базисе $[a_i]_1^m$, то множество типа $[H_s]\cup[a_{i_k}-\alpha_{i_k s}H_s]_{k=1}^{m-1}$ является базисом для A. Аналогичные операции можно провести и для других элементов $H_{s'}$, $s'\le p$, если $\sum_{t=p+1}^{n}\alpha_{it}r_{s't}\ne 0$ при некотором $i\le m$.

Таким образом, в третьем случае идеал A может иметь базис одного из типов:

1) $[a_i]_{i=1}^m$, где $a_1,\dots,a_{m_1}$ –элементы второго типа, а $a_{m_1+1},\dots,a_m$ –элементы первого типа, принадлежащие центру L;

2) $([H_{s_k}]_{k=1}^{m_2})\cup([a_{i_k}]_{k=1}^{m_3})$, $1\le s_k\le p$, $m_2+m_3=m$, где a_{i_k} –элементы первого типа, перестановочные со всеми H_s, $H_s\ne H_{s_k}$;

3) $([H_{s_k}]_{k=1}^{m_4})\cup([a_{i_k}]_{k=1}^{m_5})$, $1\le s_k\le p$, $m_4+m_5=m$, $m_4, m_5\ge 1$, a_{i_k} при $1\le k\le m_6$ $(m_6<m_5)$ –элементы второго типа, имеющие нулевые компоненты по H_{s_k} $(1\le k\le m_4)$, а при $m_6<k\le m_5$ –элементы первого типа, перестановочные со всеми $H_s, H_s\ne H_{s_k}$ $(1\le k\le m_4, s\le p)$.

Легко проверить, что всякий базис одного из указанных пяти типов порождает идеал L. Таким образом, мы описали все идеалы PR-алгебр.

6. О ПРОИЗВОЛЬНЫХ ПОДАЛГЕБРАХ

Пусть A –неабелева подалгебра PR–алгебры $L=\{H_1,\dots,H_p,H_{p+1},\dots,H_n\}$. Тогда $0\ne[A,A]\subseteq[L,L]$. Так как матрица любого элемента $\sum_{t=1}^{n}\beta_t H_t$ на $[L,L]$ диагональна, то у A есть такой базис $[a_1,\dots,a_m, b_1,\dots,b_\ell]$, где $\{a_1,\dots,a_m\}=[A,A]$, что $[a_i,b_j]=k_{ij}a_i$ $(i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,\ell)$ и $[b_j,b_r]=\sum_{t=1}^{m}c_{jr}^{(t)}a_t$. Это значит, что при $b_j=\sum_{t=1}^{n}\beta_{jt}H_t$ $(j=1,\dots,\ell)$, $a_i=\sum_{s=1}^{p}\alpha_{is}H_s$ $(i=1,\dots,m)$ справедливы соотношения:

$$\alpha_{is}\Big(\sum_{t=p+1}^{n}\beta_{jt}r_{st}\Big)=k_{ij}$$

при всех $i\le m$, $j\le\ell$, $s\le p$. Наоборот, всякое линейно независимое множество $[a_1,\dots,a_m,b_1,\dots,b_\ell]$ такого типа порождает подалгебру L. Покажем теперь, что всякая подалгебра A в L расщепляется в прямую сумму $[A,A]$ и своей абелевой подалгебры, точнее A является PR –алгеброй.

Л е м м а. Пусть B –собственная подалгебра $[L,L]$ (в наших обозначениях). Тогда существует такой идеал $C\subset L$, что $[L,L]=B+C$ $(B\cap C=0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $B\ne[L,L]$, то есть элементы H_i $(i\le p)$, не принадлежащие B. Пусть C –максимальная подалгебра среди подалгебр, натянутых на такие элементы и имеющих нулевое пересечение с B.

Если некоторый элемент H_i $(i\le p)$ не принадлежит B и C, то $\{C,H_i\}\cap B\ne 0$ и $H_i\in B+C$, так как $C\cap B=0$. Следовательно, $[L,L]=B+C$. C–идеал в L в силу построения. Лемма доказана.

Если для рассмотренной выше подалгебры A множество $[A,A]=[L,L]$, $A=\{a_1,\dots,a_m,b'_1,\dots,b'_\ell\}$, где $b'_j=\sum_{t=p+1}^{n}\beta_{jt}H_t$ $(j=1,\dots,\ell)$ и $[a_1,\dots,a_m,b'_1,\dots,b'_\ell]$ –

PR-базис для A. Если $[A,A] \neq [L,L]$, то, в силу леммы, $[L,L] = [A,A] + C$, где C идеал в L. Каждый элемент $b_j (j \leq \ell)$ можно теперь представить в виде:

$$b_j = a'_j + c'_j + \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{jt} H_t ,$$

где $a'_j \in [A,A], c'_j \in C$.
Так как коммутаторы

$$[b_j, b_r] = [a'_j, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{rt} H_t] + [c'_j, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{rt} H_t] -$$

$$-[a'_r, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{jt} H_t] - [c'_r, \sum_{p=1}^{n} \beta_{jt} H_t] \in [A,A],$$

$$[a'_j, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{rt} H_t], [a'_r, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{jt} H_t] \in [A,A],$$

а $[c'_j, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{rt} H_t], [c'_r, \sum_{p+1}^{n} \beta_{jt} H_t] \in C,$

то $[c'_j, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{rt} H_t] - [c'_r, \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{jt} H_t] = 0.$

Пусть $b''_j = c'_j + \sum_{t=p+1}^{n} \beta_{jt} H_t \ (j = 1,\dots,\ell, b''_j \in A)$.

Тогда $[a_1,\dots,a_m, b''_1,\dots,b''_\ell]$ – PR-базис A.
Итак, всякая подалгебра PR-алгебры является PR-алгеброй. Из наших построений вытекает
Предложение. Для всякой PR-алгебры L неабелевы подалгебры исчерпываются подпространствами, натянутыми на линейно независимые множества типа $[a_1,\dots,a_m, b''_1,\dots,b''_\ell]$, где $\{a_1,\dots,a_m\}$ и $\{b''_1,\dots,b''_\ell\}$ – абелевы подалгебры,

$$\{a_1,\dots,a_m\} \subsetneq [L,L], \quad [a_i, b''_j] = k_{ij} a_i$$

$$(i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,\ell), \{a_1,\dots,a_m\} \cap \{b''_1,\dots,b''_\ell\} = 0.$$

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы, Г.И.Колерову и А.В.Матвеенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кириллов А.А. Элементы теории представлений, "Наука", М., 1972.
2. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9384, Дубна, 1975.
3. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.
4. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-10535, Дубна, 1977.
5. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11415, Дубна, 1978.
6. Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11595, Дубна, 1978.
7. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры, "Наука", М., 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1978 года.