СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11705

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

1978

Р5 - 11705

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, Г.И.Макаренко

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО ЧАСТИЦЕПОДОБНОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Амирханов И.В., Жидков Е.П., Макаренко Г.И. Р5 - 11705

Достаточное условие существования положительного частицеподобного решения уравнения скалярного поля

Проведено исследование нелинейного уравнения

$$\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} - [\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \eta^2]\Psi(r) = -A\frac{\Psi^k(r)}{r^{k-1}} \qquad (1)$$

при граничных условиях

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (1) при значениях параметра $\ell=0$ ранее исследовалось многими авторами.

В настоящей работе рассматриваются любые натуральные значения параметра ℓ. С помощью вариационного подхода доказана следующая основная теорема:

при любых значениях параметров

$A>0,\ \eta^2>0,\ \ell=1,2,3,\ldots$

условие $1<k<5$ является достаточным для существования положительного частицеподобного решения краевой задачи (1)-(2).

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Amirkhanov I.V., Zhidkov E.P., Makarenko G.I. P5 - 11705

Sufficient Condition for the Existence of a Positive Particle-Like Solution to a Scalar-Field Nonlinear Equation

An investigation of nonlinear equation

$$\frac{d^2\Psi(r)}{dr^2} - [\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \eta^2]\Psi(r) = -A\frac{\Psi^k(r)}{r^{k-1}} \qquad (1)$$

for boundary conditions

$$\Psi(0) = \Psi(+\infty) = 0. \qquad (2)$$

is performed.

Equation (1) for zero value of parameter ℓ was investigated by many authors before. In the present paper arbitrary integer value of ℓ is considered. By means of variational approach the following main theorem is proved.

For any values of parameters

$A>0,\ \eta^2>0,\ = 1,2,3,\ldots$

the condition $1<k<5$ is enough for the existence of a positive particle-like solution to the boundary value problem (1)-(2).

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Введение

Различные физические модели, используемые в теории элементарных частиц, приводят к рассмотрению нелинейных дифференциальных уравнений /1-3/. Например, нелинейное уравнение скалярного комплексного поля имеет вид /2/

$$\Delta\Psi - \frac{\partial^2\Psi}{\partial x_0^2} - M^2[1 + \dot F(\Psi^*\Psi)]\Psi = 0 , \qquad (1)$$

где Δ - оператор Лапласа, $\dot F(s) = \frac{dF(s)}{ds}$, $F(s)$ - некоторая нелинейная функция, $x_0 = ct$, $M^2 > 0$.

Представляя функцию Ψ в виде

$$\Psi = \frac{\psi(r)}{r}\cdot Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\cdot e^{-i\varepsilon x_0} , \qquad (2)$$

где $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ - сферическая функция, $\ell = 0,1,2,\ldots$, и $m = 0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm\ell$, для действительной функции $\psi(r)$ получим уравнение

$$\ddot\psi(r) - (\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \eta^2)\psi(r) = M^2\psi(r)\cdot\int Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)Y_{\ell m}(\theta,\varphi)\dot F(|\frac{\psi}{r}Y_{\ell m}|^2)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

где $\eta^2 = M^2 - \varepsilon^2$ (3)

Если нелинейную функцию $\dot F(s)$ выбрать в виде

$$\dot F(s) = -\lambda s^{\frac{k-1}{2}} ,$$

то из уравнения (3) получим

$$\ddot\psi(x) - Q_\ell(x)\psi(x) = -A\frac{\psi^k(x)}{x^{k-1}} , \qquad (4)$$

где

$$Q_\ell(x) = \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} + 1 , \quad x = \eta r , \quad \eta > 0 ,$$

$$A = \lambda\cdot B , \quad B = M^2\eta^{k-3}\cdot\int[Y^*_{\ell m}(\theta,\varphi)\cdot Y_{\ell m}(\theta,\varphi)]^{\frac{k+1}{2}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi ,$$

λ - произвольная постоянная, $k>0$ и $k \neq 1$ (при $k=1$ получаем линейное уравнение).

Для нелинейной полевой теории элементарных частиц представляет интерес исследование частицеподобных решений уравнения (4), а также уравнений, получающихся в других физических моделях.

В работах[4,5] приводятся необходимые условия существования частицеподобных решений для некоторых нелинейных уравнений теории поля.

В работах[6] приведены достаточные условия существования положительных частицеподобных решений для уравнений общего вида и в случае модели Фридберга-Ли-Сирлина[3].

В работах[7,8] приводятся достаточные условия существования частицеподобных решений для нелинейного уравнения

$$\ddot{\Psi}(x) - \Psi(x) = -\frac{\Psi^k(x)}{x^{k-1}} \qquad (5)$$

при граничных условиях

$$\Psi(0) = \Psi(\infty) = 0, \qquad (6)$$

где $\Psi(\infty) = \lim\limits_{x\to\infty} \Psi(x)$, причем под символом ∞ мы здесь и всюду в дальнейшем понимаем $+\infty$.

Отметим, что уравнение (5) получается из уравнения (4) при $\ell = 0$.

В данной работе исследуется существование решения уравнения (4) при граничных условиях (6) для любых натуральных значений параметра ℓ.

В §I показано, что необходимым условием существования положительного частицеподобного решения нелинейного уравнения (4) при граничных условиях (6) является положительность величины A.

В §2 формулируется теорема, содержащая достаточное условие существования положительного частицеподобного решения задачи (I.3)-(I.4). Здесь же приводится теорема 3 о существовании решения некоторой вариационной задачи.

Эта теорема в дальнейшем используется для доказательства теоремы 2.

В §§3-6 приведены доказательства утверждений, сформулированных в §2.

§ I. В этом параграфе формулируется и доказывается необходимое условие существования положительного частицеподобного решения уравнения (4) при граничных условиях (6).

Под частицеподобным решением понимается любое нетривиальное решение $\Psi(x)$ уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям (6). Положительное частицеподобное решение - это частицеподобное решение, не обращающееся в нуль ни в одной точке, кроме $x=0$ и $x=\infty$ и $\Psi(x)>0$ при $x>0$.

Теорема I. Для существования положительного частицеподобного решения уравнения (4) при граничных условиях (6) необходимо, чтобы выполнялось условие

$$A>0.$$

Доказательство. Предположим обратное. Пусть существует положительное частицеподобное решение $\Psi(x)$ уравнения (4) при $A<0$. Тогда, переписав уравнение (4) в виде

$$\ddot{\Psi}(x) = \Psi(x)\left[Q_\ell(x) - A\frac{\Psi^{k-1}(x)}{x^{k-1}}\right], \qquad (I.I)$$

замечаем, что при $0<x<\infty$ правая часть (I.I) положительна, а значит, при $0<x<\infty$ и $\ddot{\Psi}(x)>0$.

Пусть точка x_0 принадлежит ε - окрестности точки $x=0$, $x_0>0$. Тогда по теореме Лагранжа имеем

$$\Psi(x_0) - \Psi(0) = \dot{\Psi}(\xi)(x_0 - 0), \quad \xi \in (0, x_0).$$

Отсюда следует, что $\dot{\Psi}(\xi)>0$. Так как при $0<x<\infty$ $\ddot{\Psi}(x)>0$, то $\dot{\Psi}(x)$ - возрастающая положительная функция при $x>\xi$, а значит, и $\Psi(x)$- возрастающая положительная функция при $x>\xi$, так что граничное условие $\Psi(\infty)=0$ не может быть выполнено. Это противоречит нашему предположению о том, что $\Psi(x)$ есть положительное частицеподобное решение. Значит, предположение, что $A<0$ неверно, и для существования положительного частицеподобного решения уравнения (4) при граничных условиях (6) необходимо выполнение условия $A>0$, что и требовалось доказать.

Замечание. Делая линейную замену функции

$$\Psi(x) = \frac{\varphi(x)}{A^{\frac{1}{k-1}}}, \quad A>0, \qquad (I.2)$$

уравнение (4) и граничные условия (6) перепишем в виде

$$\ddot{\varphi}(x) - Q_\ell(x)\varphi(x) = -\frac{\varphi^k(x)}{x^{k-1}}, \qquad (I.3)$$

и

$$\varphi(0) = \varphi(\infty) = 0 \ . \tag{I.4}$$

Всюду в дальнейшем будем рассматривать задачу (I.3)-(I.4) при любых натуральных значениях параметра ℓ.

§ 2. В этом параграфе формулируется достаточное условие существования положительного частицеподобного решения задачи (I.3) -(I.4) (теорема 2). Кроме того, приводится теорема 3 о существовании решения некоторой вариационной задачи. Эта теорема в дальнейшем используется для доказательства теоремы 2, но она имеет и самостоятельное значение.

<u>Теорема 2</u>. При выполнении условия

$$1 < k < 5 \tag{2.I}$$

существует положительное частицеподобное решение $\varphi(x)$ задачи (I.3)-(I.4). Это решение обладает следующими свойствами:

$$\lim_{x\to 0} \varphi(x)\,\dot\varphi(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x)\,\dot\varphi(x) = 0. \tag{2.2}$$

Доказательство теоремы 2 проведено в §§3-6 с помощью вариационного подхода.

Сформулируем соответствующую вариационную задачу. Ищется минимум функционала

$$J(y) = \int_0^\infty [\dot y^2(t) + Q_\ell(t)\,y^2(t)]\,dt \tag{2.3}$$

при граничных условиях

$$y(0) = y(\infty) = 0 \tag{2.4}$$

и нормировочном условии

$$K(y) = \int_0^\infty \frac{y^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\,dt = 1 \ . \tag{2.5}$$

Вариационную задачу (2.3)-(2.5) будем рассматривать на классе функций $Y(0,\infty)$, определяемом следующими условиями:

а) $y(t)$ - непрерывны на $[0,\infty)$ и имеют кусочно-непрерывные первые производные $\dot y(t)$ на $(0,\infty)$;

б) $y(t)$- положительны при $0<t<\infty$;

в) $y(0) = y(\infty) = 0$;

г) $J(y) < \infty$;

д) $K(y) = 1$.

Под решением вариационной задачи (2.3)-(2.5) будем понимать функцию $y(t) \in Y(0,\infty)$, доставляющую минимум функционалу (2.3).

<u>Теорема 3</u>. Для существования решения вариационной задачи (2.3)-(2.5), рассматриваемой на классе функций $Y(0,\infty)$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$1 < k < 5 \ .$$

Доказательство теоремы 3 является следствием утверждений, доказанных в следующих трех леммах (§§3-5).

§ 3. В этом параграфе установим некоторые свойства функций $y(t)$ из класса $Y(0,\infty)$.

<u>Лемма I.</u> При выполнении условия $1<k<5$ в классе функций $Y(0,\infty)$ существует последовательность $\{y_n(t)\}$, минимизирующая функционал (2.3) и такая что:

I. $\lim\limits_{n\to\infty} J(y_n) = \lambda$, $\qquad \lambda > 0$. (3.I)

2. Для любого конечного $T>0$ из последовательности $\{y_n(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся на отрезке $0 \le t \le T$ подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$, такую, что существует

$$\lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t) = y(t), \tag{3.2}$$

где $y(t)$ - непрерывная функция на $[0,T]$.

Доказательство разобъем на несколько этапов.

I°. Установим некоторые оценки для функций $y(t)$ из класса $Y(0,\infty)$.

Введем обозначения

$$\int_0^T [\dot y^2(t) + Q_\ell(t)\,y^2(t)]\,dt = J_T(y), \tag{3.3}$$

$$\int_0^T \frac{y^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\,dt = K_T(y) \ . \tag{3.4}$$

Используя (3.3) и то, что $y(0)=0$, при $0\le t\le T$ будем иметь:

$$y^2(t) = \Big(\int_0^t \dot y(s)\,ds\Big)^2 \le t\int_0^t \dot y^2(s)\,ds \le t\,J_T(y) \tag{3.5}$$

и

$$y^2(t) = 2\int_0^t y(s)\,\dot y(s)\,ds \le \int_0^t (\dot y^2(s) + y^2(s))\,ds \le J_T(y) \ . \tag{3.6}$$

Из (3.5) и (3.6) для $K_T(y)$ получаем оценку

$$K_T(y) \le \sigma\, J_T^{\frac{k+1}{2}}(y) \quad , \text{ где } \ \sigma = \frac{\ell(\ell+1)+1}{\ell(\ell+1)}. \tag{3.7}$$

Так как

$$\lim_{T\to\infty} J_T(y) = J(y) < \infty \ , \tag{3.8}$$

то из (3.5), (3.6) и (3.8) получим

$$y^2(t) \leq t\, \mathcal{J}(y), \tag{3.9}$$

$$y^2(t) \leq \mathcal{J}(y). \tag{3.10}$$

2^0. Докажем первое утверждение леммы I.

Переходя к пределу в (3.7) при $T \to \infty$ и учитывая (2.5) и (3.8), получим

$$\sigma^{-\frac{2}{k+1}} \leq \mathcal{J}(y) \tag{3.11}$$

Отсюда следует, что точная нижняя грань функционала (2.3) является положительной:

$$\inf_{y \in Y(0,\infty)} \mathcal{J}(y) = \lambda > 0.$$

Тогда существует такая последовательность функций $\{y_n\} \in Y(0,\infty)$ - минимизирующая последовательность, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{J}(y_n) = \lambda \quad , \qquad \lambda > 0.$$

Это и доказывает первое утверждение леммы I.

3^0. Докажем второе утверждение леммы I.

Из (3.I) следует, что числовая последовательность $\{\mathcal{J}(y_n)\}$ ограничена, т.е, существует положительная постоянная C, не зависящая от n, такая, что

$$\mathcal{J}(y_n) \leq c^2 \quad , \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3.12}$$

Тогда из (3.10) и (3.12) имеем

$$y_n(t) \leq C \quad , \qquad n = 1, 2, \dots, \tag{3.13}$$

т.е. последовательность $\{y_n(t)\}$ равномерно ограничена. Кроме того, для $0 \leq t_1 < t_2 < \infty$ имеем

$$|y_n(t_2) - y_n(t_1)|^2 = \Big(\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_n(s)\,ds\Big)^2 \leq (t_2 - t_1)\int_{t_1}^{t_2} \dot{y}_n^2(s)\,ds \leq \tag{3.14}$$

$$\leq (t_2 - t_1)\,\mathcal{J}(y_n) \leq c^2 (t_2 - t_1).$$

Это устанавливает равностепенную непрерывность последовательности $\{y_n\}$.

Тогда из последовательности $\{y_n(t)\}$, рассматриваемой на любом конечном отрезке $0 \leq t \leq T$, согласно теореме Арцела можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$, которая сходится к непрерывной функции $y(t)$ на $[0,T]$, что и доказывает второе утверждение Леммы I.

В следующих двух параграфах исследуется вопрос о непрерывности предельной функции $y(t)$ и ее производной на бесконечном интервале $(0, \infty)$.

§ 4. Следуя Нехари[8], рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$\ddot{u}_n(t) - Q_e(t)\, u_n(t) = -\alpha_n \frac{y_n^k(t)}{t^{k-1}} \tag{4.1}$$

при граничных условиях

$$u_n(0) = u_n(\infty) = 0, \tag{4.2}$$

где α_n - некоторые положительные постоянные, которые будут выбраны ниже, а $y_n(t)$- ранее выбранная равномерно сходящаяся подпоследовательность $\{y_{n_m}(t)\}$ (для краткости индекс m опущен).

Лемма 2. При выполнении условия $1<k<5$ существует единственное решение $u_n(t)$ задачи (4.I)-(4.2). Это решение обладает следующими свойствами:

$$\lim_{t\to 0} u_n(t)\,\dot{u}_n(t) = 0 \;, \quad \lim_{t\to\infty} u_n(t)\,\dot{u}_n(t) = 0. \tag{4.3}$$

Доказательство леммы разобъем на два пункта.

1^0. Повторяя рассуждения, аналогичные тем, которые проведены при доказательстве теоремы I, получаем, что однородное уравнение

$$\ddot{\Phi}(t) - Q_e(t)\,\Phi(t) = 0,$$

соответствующее уравнению (4.I), при граничных условиях $\phi(0)=\phi(\infty)=0$ имеет только тривиальное решение.

2^0. Докажем, что при выполнении условия $1<k<5$ решение краевой задачи (4.I)-(4.2) представимо в виде интеграла

$$u_n(t) = \alpha_n \int_0^\infty D(t,s)\, \frac{y_n^k(s)}{s^{k-1}}\, ds \tag{4.4.}$$

или

$$u_n(t) = \alpha_n \Big\{ \Phi_2(t) \int_0^t \Phi_1(s) \frac{y_n^k(s)}{s^{k-1}}\, ds + \Phi_1(t) \int_t^\infty \Phi_2(s) \frac{y_n^k(s)}{s^{k-1}}\, ds \Big\} , \tag{4.5}$$

где

$$D(t,s) = \begin{cases} \Phi_1(s)\,\Phi_2(t) & 0 \leq s \leq t, \\ \Phi_1(t)\,\Phi_2(s) & t \leq s < \infty \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ - соответственно регулярное и нерегулярное в точке $t=0$ линейно независимые решения однородного уравнения $\ddot{\Phi}(t) - Q_e(t)\,\Phi(t) = 0$, причем $[\dot{\Phi}_1 \Phi_2 - \Phi_1 \dot{\Phi}_2] = 1$. При $0<t<\infty$ для функций $\Phi_1(t)$ и $\Phi_2(t)$ имеют место оценки[9]

$$\Phi_1(t) \leq \beta_{1\ell} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell+1} e^{t}, \qquad \Phi_2(t) \leq \beta_{2\ell} \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t}, \tag{4.7}$$

где $\beta_{1\ell}$ и $\beta_{2\ell}$ – положительные постоянные.

Найдем поведение функций $u_n(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Для этого соотношение (4.5) перепишем в виде

$$u_n(t) = \alpha_n \left[\Phi_2(t)\Psi_1(t) + \Phi_1(t)\Psi_2(t)\right], \tag{4.8}$$

где

$$\Psi_1(t) = \int_0^t \Phi_1(s) \cdot \frac{y_n^k(s)}{s^{k-1}}\, ds, \tag{4.9}$$

$$\Psi_2(t) = \int_t^\infty \Phi_2(s) \frac{y_n^k(s)}{s^{k-1}}\, ds. \tag{4.10}$$

Используя неравенства (3.10), (3.13) и (4.7), получаем следующие оценки для $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$:

а) при $t \to 0$

$$\begin{aligned} &\Psi_1(t) \leq B_1 \cdot e^{t} \cdot t^{\ell+3-\frac{k}{2}}, && 2\ell+6-k>0 \\ &\Psi_2(t) \leq \Psi_2(1) + B_2 e^{-t}, && 4-2\ell-k \geq 0 \\ &\Psi_2(t) \leq \Psi_2(1) + B_2 e^{-t} \cdot t^{2-\ell-\frac{k}{2}}, && 4-2\ell-k<0; \end{aligned} \tag{4.11}$$

б) при $t \to \infty$

$$\begin{aligned} &\Psi_1(t) \leq \Psi_1(t_0) + \ell(\ell+1) B_1 \left(\frac{t}{1+t}\right)^{\ell+1} \cdot e^{t} \cdot t^{1-k}, \\ &\Psi_2(t) \leq \ell(\ell+1) B_2 \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t} t^{1-k} \qquad \text{для} \quad k>1, \end{aligned} \tag{4.12}$$

где

$$B_1 = \beta_{1\ell} \frac{C^k}{\ell(\ell+1)}, \qquad B_2 = \beta_{2\ell} \frac{C^k}{\ell(\ell+1)}$$

$$\Psi_2(1) = \beta_{2\ell} C^k \cdot e^{-1}, \quad \text{для} \quad \ell+k-1>0$$

$$\Psi_1(t_0) = B_1 e^{t_0} t_0^{\ell+3-\frac{k}{2}} \quad \text{для} \quad 2\ell+6-k>0,$$

$$t_0 = 2(k-1).$$

Учитывая оценки (4.11) и (4.12), из равенства (4.8) получаем оценки для $u_n(t)$:

а) при $t \to 0$

$$\begin{aligned} &u_n(t) \leq A_1\left[t^{3-\frac{k}{2}} + (\ell(\ell+1)e^{t-1}+1)t^{\ell+1}\right], \quad \text{для} \quad (2\ell+6-k)>0,\ (4-2\ell-k)\geq 0 \\ &u_n(t) \leq A_1\left[2t^{3-\frac{k}{2}} + \ell(\ell+1)e^{t-1}t^{\ell+1}\right], \quad \text{для} \quad (2\ell+6-k)>0,\ (4-2\ell-k)<0; \end{aligned} \tag{4.13}$$

б) при $t \to \infty$

$$u_n(t) \leq \ell(\ell+1)A_1\left[2t^{1-k} + A_2\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t}\right], \quad \text{для} \quad [2\ell+6-k]>0,\ k>1, \tag{4.14}$$

где $A_1 = \alpha_n \beta_{1\ell}\beta_{2\ell} \dfrac{C^k}{\ell(\ell+1)}$, $A_2 = \dfrac{\Psi_1(x_0)}{\beta_{1\ell} C^k}$.

Покажем, что выполняются предельные соотношения (4.3). Для этого найдем поведение производных $\dot{u}_n(t)$ при $t \to 0$ и $t \to \infty$. Дифференцируя равенство (4.8) по t, получаем

$$\dot{u}_n(t) = \alpha_n\left[\dot{\Phi}_2(t)\Psi_1(t) + \dot{\Phi}_1(t)\Psi_2(t)\right]. \tag{4.15}$$

Используя оценки (4.11) и (4.12), из (4.15) получаем оценки для $\dot{u}_1(t)$:

а) при $x \to 0$

$$\begin{aligned} &\dot{u}_n(t) \leq A_1\left[t^{2-\frac{k}{2}} + (\ell(\ell+1)e^{t-1}+1)t^{\ell}\right], \quad \text{для} \quad (2\ell+6-k)>0,\ (4-2\ell-k)\geq 0 \\ &\dot{u}_n(t) \leq A_1\left[2t^{2-\frac{k}{2}} + \ell(\ell+1)e^{t-1}t^{\ell+1}\right], \quad \text{для} \quad (2\ell+6-k)>0,\ (4-2\ell-k)<0; \end{aligned} \tag{4.16}$$

б) при $x \to \infty$

$$\dot{u}_n(t) \leq \ell(\ell+1)A_1\left[2t^{-k} + A_2\left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell-1} e^{-t}\right], \quad \text{для} \quad [2\ell+6-k]>0,\ k>1. \tag{4.17}$$

Если выполняется условие $1<k<5$, то из (4.13)-(4.17) следуют предельные соотношения (4.3) и функция (4.4) является единственным решением краевой задачи (4.1)-(4.2). Лемма 2 доказана полностью.

§ 5. В этом параграфе установим свойства решений краевой задачи (4.1)-(4.2).

<u>Лемма 3.</u> Если выполнено условие $1<k<5$, то имеют место следующие утверждения:

1°. Решения $u_n(t)$ краевой задачи (4.1)-(4.2) принадлежат классу функций $Y(0,\infty)$.

2°. Из последовательности $\{u_n(t)\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_m}(t)\}$, причем предельная функция $u(t) = \lim\limits_{m\to\infty} u_{n_m}(t)$ является непрерывной при $0 \leq t < \infty$.

Пределы последовательностей $\{u_{n_m}(t)\}$ и $\{y_{n_m}(t)\}$ совпадают, т.е.

$$u(t)=\lim_{m\to\infty} u_{n_m}(t)=\lim_{m\to\infty} y_{n_m}(t)=y(t) \tag{5.1}$$

при $0\le t<\infty$.

Производная $\dot u(t)$ предельной функции $u(t)$ непрерывна при $0<t<\infty$, причем

$$\lim_{m\to\infty} \dot u_{n_m}(t)=\dot u(t). \tag{5.2}$$

Доказательство леммы проведем в несколько этапов.

I⁰. Сначала докажем, что $u_n(t)\in Y(0,\infty)$, и укажем способ выбора α_n. Убедимся, что функции $u_n(t)$ удовлетворяют всем условиям, налагаемым на функции, принадлежащие к классу $Y(0,\infty)$.

В самом деле:

а) Так как по условию леммы 3 функция $u_n(t)$ является решением уравнения второго порядка (4.I), то она непрерывна на $[0,\infty)$ и имеет непрерывную первую производную $\dot u_n(t)$ на $(0,\infty)$.

б) Так как $\alpha_n>0$, $y_n(t)$ и $D(t,s)$ – положительные функции при $0<t<\infty$, то из (4.4) следует, что и $u_n(t)$ – положительная функция при $0<t<\infty$.

в) Так как $u_n(t)$ – решение краевой задачи (4.I)-(4.2), то, очевидно, $u_n(0)=u_n(\infty)=0$.

г) Покажем, что интеграл $J(u_n(t))$ (см.(2.3)) существует. Умножая уравнение (4.I) на $u_n(t)$, интегрируя обе части по t от 0 до T и учитывая (3.3) и (4.3), получим

$$J_T(u_n)=\alpha_n\int_0^T u_n(t)\,\frac{y_n^k(t)}{t^{k-1}}\,dt+u_n(T)\cdot\dot u_n(T). \tag{5.3}$$

Применим неравенство Гёльдера к интегралу, стоящему в правой части (5.3):

$$\int_0^T u_n(t)\,\frac{y_n^k(t)}{t^{k-1}}\,dt\le\left[\int_0^T\frac{y_n^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\,dt\right]^{\frac{k}{k+1}}\cdot\left[\int_0^T\frac{u_n^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\,dt\right]^{\frac{1}{k+1}}. \tag{5.4}$$

Используя неравенства (3.7), (5.4) и учитывая обозначение (3.4), из (5.3) будем иметь

$$J_T(u_n)\le\alpha_n\left[K_T(y_n)\right]^{\frac{k}{k+1}}\sigma^{\frac{1}{k+1}}J_T^{\frac12}(u_n)+u_n(T)\dot u_n(T). \tag{5.5}$$

Отсюда, в силу (4.3) и того, что $\lim_{T\to\infty}K_T(y_n)=1$, получаем $J(u_n)<\infty$.

д) Так как неравенство (3.7) справедливо для функции $u_n(t)$

$$K_T(u_n)\le\sigma\, J_T^{\frac{k+1}{2}}(u_n) \tag{5.6}$$

и $J(u_n)<\infty$, то, переходя в (5.6) к пределу при $T\to\infty$, получим

$$\int_0^\infty\frac{u_n^{k+1}}{t^{k-1}}\,dt<\infty.$$

Поэтому постоянные α_n можно подобрать так, чтобы

$$K(u_n)=\int_0^\infty\frac{u_n^{k+1}(t)}{t^{k-1}}\,dt=1. \tag{5.7}$$

Итак, доказано, что $u_n(t)\in Y(0,\infty)$.

Покажем теперь, что последовательность $\{\alpha_n\}$, подобранная из условия нормировки (5.7), является ограниченной и

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lambda. \tag{5.8}$$

Из (5.3) с учетом (2.5), (4.3), (5.4) и (5.7), при $T\to\infty$, имеем

$$J(u_n)\le\alpha_n. \tag{5.9}$$

Умножая уравнение (4.I) на $y_n(t)$, интегрируя обе части по t от 0 до ∞ и используя (2.5) и (4.3), получим

$$\int_0^\infty\left[\dot u_n(t)\dot y_n(t)+Q_\ell(t)\,u_n(t)\cdot y_n(t)\right]dt=\alpha_n \tag{5.10}$$

или

$$J(u_n)+J(y_n)-J(u_n-y_n)=2\alpha_n.$$

Из (5.9) и (5.10) получаем неравенства

$$J(u_n)\le J(y_n) \tag{5.11}$$

и

$$\alpha_n\le J(y_n). \tag{5.12}$$

Объединяя неравенства (5.9), (5.II) и (5.I2), будем иметь

$$J(u_n)\le\alpha_n\le J(y_n). \tag{5.13}$$

Так как последовательность функций $\{u_n(t)\}$ также является допустимой для вариационной задачи (2.3)-(2.5), то нижний предел

$$\varliminf_{n\to\infty} J(u_n)\ge\lambda. \tag{5.14}$$

Тогда из (3.I), (5.I3) и (5.I4) получим (5.8)

$$\lim_{n\to\infty}J(u_n)=\lim_{n\to\infty}\alpha_n=\lim_{n\to\infty}J(y_n)=\lambda. \tag{5.15}$$

Значит, последовательность $\{\alpha_n\}$ ограничена, и из (3.I2) и (5.I2) следует, что

$$\alpha_n \le c^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots . \tag{5.I6}$$

2°. Докажем утверждения пункта 2° леммы 3.

Учитывая (5.I6), оценки (4.I3) и (4.I4) перепишем в виде

а) при $t \to 0$

$$u_n(t) \le \bar{A}_1 \left[t^{3-\frac{k}{2}} + (\ell(\ell+1)e^{t-1}+1) t^{\ell+1} \right], \text{ для } \begin{matrix}(2\ell+6-k)>0, \\ (4-2\ell-k)\ge 0;\end{matrix} \tag{5.I7}$$

$$u_n(t) \le \bar{A}_1 \left[2t^{3-\frac{k}{2}} + \ell(\ell+1)e^{t-1} t^{\ell+1} \right], \text{ для } (2\ell+6-k)>0, (4-2\ell-k)<0;$$

б) при $t \to \infty$

$$u_n(t) \le \ell(\ell+1)\bar{A}_1 \left[2t^{1-k} + A_2 \left(\frac{t}{1+t}\right)^{-\ell} e^{-t} \right], \text{ для } [2\ell+6-k]>0, \ k>1, \tag{5.I8}$$

где $\bar{A}_1 = \beta_{1\ell}\beta_{2\ell}\frac{c^{k+2}}{\ell(\ell+1)}$ и не зависит от индекса n.

Из (3.I0) и (5.II) имеем

$$u_n(t) \le c, \quad n = 1, 2, \dots , \tag{5.I9}$$

т.е. последовательность $\{u_n(t)\}$ равномерно ограничена.

Тогда, учитывая (5.I7)-(5.I9), убеждаемся, что при $1<k<5$ последовательность функций $\{u_n(t)\}$ удовлетворяет всем условиям теоремы о компактности класса функций на бесконечном интервале /I0/. Следовательно, из $\{u_n\}$ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\{u_{n_m}(t)\}$:

$$\lim_{m\to\infty} u_{n_m}(t) = u(t), \tag{5.20}$$

причем $u(t)$ является непрерывной функцией при $0 \le t < \infty$.

Так как формулы (5.I0) и (5.I5) справедливы и для подпоследовательности $\{u_{n_m}(t)\}$, то из (5.I0) и (5.I5) имеем

$$\lim_{m\to\infty} \mathcal{J}(u_{n_m} - y_{n_m}) = 0. \tag{5.2I}$$

Тогда из (3.I0) и (5.2I) получим

$$\lim_{m\to\infty} |u_{n_m}(t) - y_{n_m}(t)| = 0, \tag{5.22}$$

откуда с учетом (5.20) вытекает соотношение (5.I), что и требовалось доказать.

Покажем, что при выполнении условия $1<k<5$ предельная функция $y(t)$ (или $u(t)$) является решением некоторого интегрального уравнения. Для этого перепишем (4.4) в виде

$$\left| y_{n_m}(t) - \alpha_{n_m}\int_0^\infty D(t,s)\frac{y_{n_m}^k(s)}{s^{k-1}}\,ds \right| = \left| y_{n_m}(t) - u_{n_m}(t) \right|$$

и перейдем к пределу при $m\to\infty$. Учитывая (5.I), (5.I5) и (5.22), получим

$$y(t) = \lambda\int_0^\infty D(t,s)\frac{y^k(s)}{s^{k-1}}\,ds. \tag{5.23}$$

Дифференцируя (5.23) по t, заменяя $y(t)$ на $u(t)$, будем иметь

$$\dot{u}(t) = \lambda\left[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s)\frac{u^k(s)}{s^{k-1}}\,ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s)\frac{u^k(s)}{s^{k-1}}\,ds\right]. \tag{5.24}$$

Отсюда следует, что если выполняется условие $1<k<5$, то функция $\dot{u}(t)$ непрерывна при $0<t<\infty$.

Теперь перепишем (4.I5) в виде

$$\dot{u}_{n_m}(t) = \alpha_{n_m}\left[\dot{\phi}_2\int_0^t \phi_1(s)\frac{y_{n_m}^k(s)}{s^{k-1}}\,ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s)\frac{y_{n_m}^k(s)}{s^{k-1}}\,ds\right]. \tag{5.25}$$

Переходя к пределу при $m\to\infty$ и учитывая (5.I) и (5.I5), из (5.25) имеем

$$\lim_{m\to\infty}\dot{u}_{n_m}(t) = \lambda\left[\dot{\phi}_2(t)\int_0^t \phi_1(s)\frac{u^k(s)}{s^{k-1}}\,ds + \dot{\phi}_1(t)\int_t^\infty \phi_2(s)\frac{u^k(s)}{s^{k-1}}\,ds\right]. \tag{5.26}$$

Сравнивая (5.24) и (5.26), получим

$$\lim_{m\to\infty}\dot{u}_{n_m}(t) = \dot{u}(t),$$

что и доказывает (5.2).

Лемма 3 доказана полностью.

Следствие. Из (5.I) и (5.2) получаем

$$\mathcal{J}(u) = \lim_{m\to\infty}\mathcal{J}(u_{n_m}). \tag{5.27}$$

Таким образом, если выполняется условие $1<k<5$, то из Лемм I, 2 и 3 следует, что предельная функция $y(t)$ и будет решением рассматриваемой вариационной задачи (2.3)-(2.5). Теорема 3 доказана полностью.

§ 6. Покажем, наконец, что при выполнении условия (2.I) из существования решения вариационной задачи (2.3)-(2.5) следует существование решения краевой задачи (I.3)-(I.4).

Дифференцируя (5.23) дважды по t, получим

$$y(t) - Q_\ell(t)\,y(t) = -\lambda\frac{y^k(t)}{t^{k-1}}, \tag{6.I}$$

причем $y(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$y(0) = y(\infty) = 0. \tag{6.2}$$

Так как дифференциальное уравнение (6.I) посредством линейной замены

$$t = x \quad , \quad y(t) = \frac{\varphi(x)}{\lambda^{\frac{1}{k-1}}}$$

приводится к виду (I.3)и граничные условия (6.2)переходят в (I.4), то из существования решения вариационной задачи (2.3)-(2.5) следует существование решения краевой задачи (I.3)-(I.4) и тем самым завершается доказательство теоремы 2.

Литература

I. R.Finkelstein, R. Le Levier and Ruderman, Phys.Rev. 83, 326 (1951);
R.Finkelstein, C.Fronsdal and P.Kaus, Phys. Rev. 103 , 1571 (1956).

2. Гласко В.Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я.П., Шушурин С.Ф. ЖЭТФ, 35, 452, (1958).

3. R.Friedberg, T.D.Lee and A.Sirlin, Nucl. Phys. B115, 1(1976); B115 , 32 (1976).

4. Жидков Е.П., Пузынин И.В., Шириков В.П. ОИЯИ, 2005, Дубна,1965.

5. V.G.Makhankov, Phys. Lett 61A 431, 1977;
Маханьков В.Г., Катышев Ю.В. ОИЯИ, Р2-10547, Дубна, 1977.

6. Жидков Е.П., Жидков П.П. ОИЯИ, Р5-II599, Р5-II600, Дубна, 1978.

7. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, Р-1319, Дубна, 1963; ЖВМ и МФ, № 4,, 804 (1964).

8. Z.Nehari, Proc. R. Irish Acad. A62, 117(1963).

9. Тейлор Дж. Теория рассеяния . "Мир", М., 1975.

10. Функциональный анализ. Под редакцией С.Г.Крейна. Изд-во "Наука", М., 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июня 1978 года.