СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

JINR Communications, Dubna, N P5 - 11600

Е.П.Жидков, П.Е.Жидков *)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Часть II. Модель Фридберга-Ли-Сирлина

e-mail: zhidkov@theor.jinr.ru

1978

P5 - 11600

Е.П.Жидков, П.Е.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Часть II. Модель Фридберга-Ли-Сирлина

Жидков Е.П., Жидков П.Е. P5 - 11600

Исследование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики. Часть II. Модель Фридберга- Ли -Сирлина

Рассматривается краевая задача на полупрямой для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с сингулярной особенностью, которая возникает при рассмотрении ряда задач в физике элементарных частиц. Методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется вопрос существования положительных частицеподобных решений в модели Фридберга-Ли-Сирлина. Доказано существование положительных частицеподобных решений для всех малых значений параметра правой части модели Фридберга-Ли-Сирлина.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zhidkov E.P., Zhidkov P.E. P5 - 11600

Investigation of Particlelike Solutions in Some Models of Nonlinear Physics. II. The Friedberg-Lee-Sirlin Model

A boundary value problem on semi-exis for nonlinear ordinary differential equation with singularity, which appears in some problems of elementary particle physics is studied. A question about the existence of positive particlelike solutions in Friedberg-Lee-Sirlins model is investigated by methods of qualitative theory for ordinary differential equations. It is proved that there exists positive particlelike solution for all small meaning parameter in the right part of Friedberg-Lee-Sirlin's model.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Во второй части работы мы применим полученные в I-й части /I/ результаты к конкретной модели Фридберга-Ли-Сирлина. В рамках этой модели будет приведено строгое доказательство существования безузлового частицеподобного решения.

Обратимся теперь к уравнению (I.I)*) с конкретной правой частью, которая встретилась в работе /I2/.

Лемма. Рассмотрим уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' = -4y^3 + 3y^5 , \qquad 0 \le x < +\infty \tag{2.20}$$

с начальными условиями

$$y(0) = y_0 > 0 , \qquad y'(0) = 0. \tag{2.21}$$

Пусть y_0 удовлетворяет условию

$$-4y_0^3 + 3y_0^5 < 0. \tag{2.22}$$

Тогда решение $y(x)$ задачи (2.20)-(2.2I) имеет бесконечную последовательность корней $\{x_k\}$, $k = 1, 2, \ldots$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = +\infty$.

Доказательство. Докажем, во-первых, что любой корень x_k функции $y(x)$ -изолированный. Как показывалось в доказательстве теоремы 4, если $y(x_k) = 0$, то $y'(x_k) \neq 0$. В силу своей непрерывности $y'(x)$ не обращается в ноль и сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_k, а поэтому в этой окрестности не может быть больше корней функции $y(x)$. Это и означает изолированность корней $y(x)$.

*) Нумерация формул - сквозная в обеих частях работы.

В силу изолированности корней функции $y(x)$ достаточно доказать, что для любого числа $A>0$ найдется $\bar{x}>A$ такое, что $y(\bar{x})=0$.

Предположим противное. Пусть при $x>A$ $y(x)\neq 0$. Пусть для определенности $y(x)>0$ при $x>A$. Точно так же, как и в теореме 4, можно доказать неравенство (I.I7) в условиях леммы. Очевидно, что U убывает в точке $y=-y_0$ и возрастает в точке $y=y_0$ как функция аргумента y. Поэтому, в силу неравенства (I.I7), $|y(x)|\leq y_0$ для любого $x>0$.

Рассмотрим функцию $z(x)=x\cdot y(x)$. $z(x)$ удовлетворяет следующему соотношению

$$z''=x\cdot f\left(\frac{z}{x}\right) \tag{2.23}$$

и начальным условиям

$$z(0)=0,\quad z'(0)=y_0, \tag{2.24}$$

$z(x)>0$ при $x>A$. Причем, так как для любого $x>0$ $|y(x)|\leq y_0$, то для любого $x>0$

$$|z(x)|\leq y_0\cdot x. \tag{2.25}$$

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что A – наибольший корень функции $z(x)$, то есть $z(A)=0$. Поэтому, в силу (2.23), $z''(x)<0$ при $x>A$. Поэтому, так как $z(x)$ не достигает оси Ox при $x>A$, то $z'(x)\geqslant 0$ при $x\geqslant A$, причем $z'(x)$ монотонно убывает при $x\geqslant A$.

Поэтому существует $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)\geqslant 0$.

Возможны 2 ситуации: $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)>0$ (случай А) и $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)=0$ (случай В).

<u>Случай А</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)>0$. Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{z(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)$.

Так как $z(x)\leq y_0\cdot x$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{z(x)}{x}\leq y_0$.

Поэтому и из уравнения (I.I0) следует, что $\lim\limits_{x\to+\infty} z''(x)=-\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)=z'(A)+\int\limits_A^{+\infty} z''(x)\,dx=-\infty$,

что противоречит тому, что $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)>0$. Поэтому случай А невозможен.

<u>Случай В</u>. Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)=0$. Здесь возможны 2 ситуации (поскольку $z'(x)\geqslant 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x)$ существует, конечный или равный $+\infty$): $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x)=z_\infty<+\infty$, где z_∞ – некоторая константа (I случай) и $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x)=+\infty$ (2 случай).

I) Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x)=z_\infty<+\infty$.

Из (2.23) следует, что существует такое $c>A$, что $z''(x)\leq -2\frac{z^3(A)}{x^2}$ (при $x\geqslant c$). Поэтому имеем (при $x\geqslant c$):

$$z'(x)=-\int\limits_x^{+\infty} z''(t)\,dt\geqslant 2\int\limits_x^{+\infty}\frac{z^3(t)}{t^2}\,dt. \tag{2.26}$$

Существует такое число $B\geqslant C$, что $z(x)\geqslant\frac{1}{2}z_\infty$ при $x\geqslant B$. Поэтому из (2.26) получаем для $x\geqslant B$:

$$z'(x)\geqslant\frac{2z_\infty^3}{2^3}\cdot\frac{1}{x}. \tag{2.27}$$

Из (2.27) получаем при $x\geqslant B$:

$$z(x)=z(B)+\int\limits_B^x z'(t)\,dt\geqslant z(B)+\frac{z_\infty^3}{4}\ln x.$$

Следовательно, $z(x)\to+\infty$ при $x\to+\infty$, но это противоречит тому, что $z_\infty<+\infty$. Поэтому случай I невозможен.

2) Пусть $\lim\limits_{x\to+\infty} z(x)=+\infty$.

Рассмотрим правую часть соотношения (2.23).

$$\Pi(x,z)=z\cdot\left(-4\frac{z^2}{x^2}+3\frac{z^4}{x^4}\right)=\frac{3z^3}{x^2}\left(\frac{z}{x}-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

Как указывали выше, $\left|\frac{z}{x}\right|\leq y_0$, а так как $-4y_0^3+3y_0^5<0$, то $|y_0|<\frac{2}{\sqrt{3}}$. Поэтому для любого $x\geqslant A$ выполняется следующее неравенство:

$$D_2 \frac{z^3(x)}{x^2} \leq \Pi[x, z(x)] \leq D_1 \frac{z^3(x)}{x^2} , \qquad (2.28)$$

где $D_1 = [z'(0) - \frac{2}{\sqrt{3}}] \cdot 2\sqrt{3} < 0$, $D_2 = -8 < 0$.

Рассмотрим теперь уравнение для неизвестной функции $U = U(x)$:

$$U''(x) - D_1 \frac{z^2(x)}{x^2} U(x) = 0, \quad x \geq A, \quad U(A) = 0, \quad U'(A) = z'(A).$$

Докажем, что $U(x)$ достигает оси Ox при $x > A$. Для этого воспользуемся следующей теоремой (см. /15/). Рассмотрим уравнение $y'' + A(x) y = 0$ (1) , где $A(x) > 0$ при $x \geq q$, где q - константа, причем либо $\lim_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$, либо $\lim_{x \to +\infty} A(x) = 0$. Пусть $A(x)$ в уравнении (I) непрерывна в промежутке $[q, +\infty)$. Пусть, кроме того, каковы бы ни были положительные числа K и τ , найдется такое значение x^0, что при $x \geq x^0$, $0 \leq h \leq \frac{K}{\sqrt{A(x)}}$ выполняется неравенство

$$\left| \frac{A(x \pm h)}{A(x)} - 1 \right| < \tau. \qquad (2.29)$$

При этих предположениях любое решение $y(x)$ уравнения (I) имеет бесконечно много нулей $x_0, x_2, \ldots, x_{2n}, \ldots$ и каждому значению τ : $0 < \tau < 1$ соответствует такой индекс n_0 , что при $n > n_0$ имеем

$$\frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})(1+\tau)}} < x_{2n+2} - x_{2n} < \frac{\pi}{\sqrt{A(x_{2n})(1-\tau)}}$$

$$(n = n_0 + 1, n_0 + 2, \ldots).$$

Воспользуемся этой теоремой. Очевидно, что все ее предположения, кроме неравенства (2.29), заведомо выполняются: $q = A$,

$A(x) = -D_1 \frac{z^2(x)}{x^2} > 0$ при $x \geq q$, $\lim_{x \to +\infty} A(x) = 0$,

так как $\lim_{x \to +\infty} A(x) = -D_1 \lim_{x \to +\infty} \frac{z^2(x)}{x^2} = -D_1 \lim_{x \to +\infty} y^2(x)$,

а $\lim_{x \to +\infty} y^2(x) = 0$ в силу теоремы 4. Проверим теперь неравенство (I.27).

Рассмотрим выражение:

$$\left| \frac{x^2}{(x \pm h)^2} \cdot \frac{z^2(x \pm h)}{z^2(x)} - 1 \right| .$$

Из условия $0 \leq h \leq \frac{K}{\sqrt{A(x)}}$ получаем:

$$0 \leq h \leq \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)} . \qquad (2.30)$$

Рассмотрим отдельно $\frac{x^2}{(x \pm h)^2} = \frac{1}{(1 \pm \frac{h}{x})^2}$.

В силу (2.30) $\left| \frac{h}{x} \right| \leq \frac{C}{z(x)} \to 0$ при $x \to +\infty$, поскольку, по предположению, $\lim_{x \to +\infty} z(x) = +\infty$. Поэтому $\frac{x^2}{(x \pm h)^2} \to 1$ при $x \to +\infty$. Поэтому для того, чтобы доказать, что неравенство (2.29) выполняется для $A(x) = -D_1 \frac{z^2(x)}{x^2}$, достаточно доказать, что $\lim_{x \to +\infty} \frac{z(x \pm h)}{z(x)} = 1$.

В силу монотонности $z(x)$ имеем:

$$\frac{z\left[x - \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)}\right]}{z(x)} \leq \frac{z(x \pm h)}{z(x)} \leq \frac{z\left[x + \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)}\right]}{z(x)} \qquad (2.31)$$

для любого h , удовлетворяющего неравенству (2.30). Обозначим $z\left[x \pm \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)}\right] / z(x)$ через $R[x, z(x)]$. В силу того, что при $x \geq A$ $z(x)$ - вогнутая функция, так как $z''(x) < 0$, получаем:

$$z\left[x + \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)}\right] \leq z(x) \cdot \frac{x + \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)} - A}{x - A} = z(x) \left[1 + \frac{K}{\sqrt{-D_1}} \cdot \frac{1 + \frac{A}{x-A}}{z(x)}\right]$$

и

$$z\left[x - \frac{Kx}{\sqrt{-D_1}\, z(x)}\right] \geq z(x) \cdot \left[1 - \frac{K}{\sqrt{-D_1}} \cdot \frac{1 + \frac{A}{x-A}}{z(x)}\right].$$

Из этих двух неравенств вытекает следующее неравенство:

$$1-\frac{K}{\sqrt{-D_1}}\cdot\frac{1+\frac{A}{x-A}}{z(x)}\leq R[x,z(x)]\leq 1+\frac{K}{\sqrt{-D_1}}\cdot\frac{1+\frac{A}{x-A}}{z(x)}. \quad (2.32)$$

Поскольку $\lim_{x\to+\infty} z(x)=+\infty$, то из неравенства (2.32) вытекает, что $\lim_{x\to+\infty} R[x,z(x)]=1$.

Тем самым мы проверили, что неравенство (2.29) выполняется для $A(x)=-D_1\frac{z^2(x)}{x^2}$.

Поэтому функция $u(x)$ достигает оси Ox при некотором $x=\bar{x}$, где $\bar{x}>A$. Так же, как и для функции $z(x)$, для функции $u=u(x)$ доказывается, что все корни ее – изолированные. Поэтому существует минимальный среди корней $u(x)$, больших A (поскольку корень A функции $u(x)$ – изолированный). Обозначим этот корень через $\bar{x}$. Положим

$$Q(x)=-D_1\frac{z^2(x)}{x^2}, \quad Q_1(x)=-4\frac{z^2(x)}{x^2}+3\frac{z^4(x)}{x^4}.$$

Тогда $Q(x)$, $Q_1(x)$ – непрерывные функции, не обращающиеся одновременно тождественно в ноль $Q(x)\geqslant Q_1(x)$ при $x\geqslant A$.
Воспользуемся следующей теоремой сравнения Штурма (см. /14/):
Пусть даны два дифференциальных уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[\theta(x)\frac{dy}{dx}\right]-Q(x)y(x)=0, \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\theta_1(x)\frac{dz}{dx}\right]-Q_1(x)z(x)=0, \quad (2.34)$$

где $\theta(x)$, $\theta'(x)$, $Q(x)$, $\theta_1(x)$, $\theta_1'(x)$, $Q_1(x)$ – непрерывные функции от x в $[a,b]$, $\theta(x), Q_1(x)>0$; пусть, далее, ни на каком лежащем в $[a,b]$ отрезке функции $Q(x)$ и $Q_1(x)$ не обращаются одновременно тождественно в нуль и, кроме того, пусть

$$\theta(x)\geqslant\theta_1(x), \quad Q(x)\geqslant Q_1(x). \quad (2.35)$$

Докажем тогда, что если $y(x)$ является решением уравнения (I.33), обращающимся в нуль в точках α и β, где β – первая сопряженная точка справа для α, то любое решение уравнения (2.34) имеет по меньшей мере один корень, лежащий в (α,β), за исключением случая, когда уравнения (2.33) и (2.34) совпадают на $[\alpha,\beta]$, а $y(x)$ и $z(x)$ отличаются постоянным множителем.

Сравнивая уравнения для $z(x)$ и $u(x)$, легко убедиться, что все условия этой теоремы для них выполнены на отрезке $[A,\bar{x}]$. Поэтому $z(x)$ имеет корень на $[A,\bar{x}]$, а это противоречит предположению о том, что $z(x)$ не имеет корней при $x>A$.

Тем самым доказано, что для любого A существует $x>A$ такое, что $y(x)=0$. Лемма доказана.

II. Теперь рассмотрим уравнение

$$y''+\frac{2}{x}y'=\eta^2 y-4y^3+3y^5 \quad (2.36)$$

с краевыми условиями

$$y(0)=y_0<\infty, \quad y'(0)=0. \quad (2.37)$$

(Здесь η – константа).
Задача (2.36)-(2.37) встретилась в работах /II,I2/. Численное решение этой задачи на ЭВМ описано в работе /I2/.

Теорема 6. Пусть $\eta=0$. Тогда задача (2.36)-(2.37) имеет частицеподобное решение тогда и только тогда, когда $|y_0|<\frac{2}{\sqrt{3}}$, причем это решение имеет бесконечное число корней, последовательность которых является бесконечно большой.

Доказательство. Если $|y_0|<\frac{2}{\sqrt{3}}$, то по теоремам I,4 из части I решение задачи (2.36)-(2.37) существует и является частицеподобным. По лемме оно имеет бесконечно большую последовательность корней. Теорема 6 доказана.

Теорема 7. Существует такая положительная константа η_0, что при любом η : $0<\eta^2<\eta_0$ задача (2.36)-(2.37) имеет неотрицательное частицеподобное решение.

Доказательство. В силу леммы при $\eta=0$ существует решение задачи (2.36)-(2.37) $\bar{y}(x)$ такое, что $\bar{y}(0)>0$ и существует $\bar{x}$ такое, что $\bar{y}(\bar{x})<0$.

В силу непрерывной зависимости решения задачи (2.I)-(2.2) от параметра η, существует такое $\eta_0>0$, что если $\eta^2<\eta_0$, то решение задачи (2.36)-(2.37) $y(x)$: $y(0)=\bar{y}(0)$ больше нуля в точке $x=0$ и меньше нуля в точке $x=\bar{x}$ и, следовательно, пересекает ось Ox в некоторой точке. Поэтому в силу теоремы I, существует такое значение параметра y_0, что существует неотрицательное частицеподобное решение задачи (2.36)-(2.37). Тем самым теорема 5 доказана.

Литература

I. Е.П.Жидков, П.Е.Жидков ОИЯИ, Р5-II599, Дубна, I978.
2. R.J.Finkelstein, R.Lelevier, M.Ruderman. Phys. Rev., 83, 326 (1951).
3. Rosen, Rosenstock, Phys. Rev., 85, 257 (1952).
4. R.J.Finkelstein, C.Fronsdal, P.Kaus. Phys. Rev. 103, 1571 (1956).
5. Гласко В.Б., Лерюст Ф., Терлецкий Я.П., Шушурин С.Ф. ЖЭТФ, т.35, вып.2(8), I958.
6. В.П.Шириков. ОИЯИ, Р5-II599, Дубна, I978.
7. Z.Nehari. Proc. Royal Arish. Acad., 1963, N 9, A62, 118-135.
8. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, Р-I3I9, Дубна, I963 и ЖВМ, I964, 4, №5, 804-8I6.
9. Е.П.Жидков, Шириков В.П., Пузынин И.В. ОИЯИ, 2005, Дубна, I965.
IO. G.H.Ryder, Pacific J. Math. 22, 477 (1967).
II. D.L.T.Anderson, J.Math. Phys. 12, 945 (1971).
I2. R.Friedberg, T.D.Lee, A.Sirlin, Nucl. Phys. B115, 1(1976).
I3. Маханьков В.Г., Катышев Ю.В. ОИЯИ, Р2-I0547, Дубна, I977.
I4. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.I, ИЛ, I953.
I5. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.II, ИЛ, I954.
I6. V.G.Makhankov, Phys. Reports, vol.35, N.1, January 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая I978 года.