СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

JINR Communications, Dubna, No P5 - 11599

Е.П.Жидков, П.Е.Жидков *)

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Часть 1. Безузловые частицеподобные решения

e-mail: zhidkov@theor.jinr.ru

1978

P5 - 11599

Е.П.Жидков, П.Е.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ НЕЛИНЕЙНОЙ ФИЗИКИ

Часть 1. Безузловые частицеподобные решения

Жидков Е.П., Жидков П.Е.

Р5 - 11599

Исследование частицеподобных решений в некоторых моделях нелинейной физики. Часть 1. Безузловые частицеподобные решения

Рассматривается краевая задача для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с сингулярной особенностью, которое возникает при рассмотрении ряда задач в физике элементарных частиц. Методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений исследуется вопрос существования положительных частицеподобных решений с бесконечной последовательностью узлов. Доказано существование частицеподобных решений для широкого класса правых частей уравнения для случая убывания функции, стоящей в правой части, в нуле. Получены достаточные условия существования безузлового частицеподобного решения для случая возрастания правой части в нуле.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Zhidkov E.P., Zhidkov P.E.

Р5 - 11599

Investigation of Particlelike Solutions in Some Models of Nonlinear Physics. I. Knotless Particlelike Solutions

A boundary value problem for nonlinear ordinary differential equation with singularity, which appears in some problems of elementary particles physics is considered. A question about the existence of positive particleline solutions and particlelike solutions with an infinite sequence of knots by methods of qualitative theory for ordinary differential equations is studied. It is proved that there exists particlelike solutions for a wide class of right parts of equation in case, when a function which is in the right part of equation vanishes in zero. Sufficient conditions are presented for the existence of particlelike solution without knots in case when the right part of equation is increases in zero.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

Вопросам существования и свойствам частицеподобных решений нелинейных задач математической физики (солитонов) в последние годы уделяется очень много внимания как физиками, так и математиками.

Большой интерес эти вопросы вызывают в таких разделах физики, как гидродинамика, плазма, физика твердого тела, а также теоретико-полевые проблемы.

В настоящей работе изучается краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$y'' + \frac{2}{x} y' = f(y) , \quad 0 \le x < +\infty \qquad \text{(A)}$$

$$y'(0) = 0 \quad , \quad y(+\infty) = 0 \qquad \text{(B)}$$

Задача (A)-(B) рассматривалась ранее в работах [1-8,10,11] для случаев $f(y) = y - y^n \ (n > 0)$ и $f(y) = \eta^2 y - 4y^3 + 3y^5$, где η - вещественный параметр. Одной из первых работ по данной тематике явилась работа [4], в которой решение задачи (A)-(B), обладающее ровно K корнями (где k - натуральное, либо 0) называлось частицеподобным с K узлами. Мы будем придерживаться этой терминологии, хотя, например, авторы [11] называют решения задачи (A)-(B) солитонами.

В одной из первых работ - работе [4] уравнение (A) с $f(y) = y - y^3$ решалось численно на ЭВМ при различных начальных условиях $y(0) = y_0$, $y'(0) = 0$. Результаты счета указывали на то, что данная задача (A)-(B) имеет частицеподобные решения с любым числом узлов. Затем в двух работах /6/ и /7/, вышедших одновременно, было строго доказано существование частицеподобных решений без узлов для задачи (A)–(B) в случае $f(y)=y-y^n$, для любого $n: 1<n<4$ и $1<n\le 3$ соответственно. В работе /7/ исследование данного уравнения проводилось методами качественной теории дифференциальных уравнений, а в работе /6/ – методом минимизации вариационного функционала. Затем авторы /7/, используя метод минимизации вариационного функционала, доказали (см. /8/) существование частицеподобных решений с любым числом узлов для $f(y)=y-y^n$ при любом $n: 1<n<4$ и $n=\frac{2p+1}{2q+1}$, где $p, q = 0, 1, 2, \dots$. В работе /8/ была также доказана неразрешимость задачи (A)–(B) для любого $n: n\geqslant 5$.

Случай $4\le n<5$ не исследован до сих пор. Рассмотрение другой физической задачи привело авторов /10/ и /11/ к задаче (A)–(B) с $f(y)=\eta^2 y-4y^3+3y^5$, где η – вещественный параметр. Численное решение уравнения (A) на ЭВМ привело автора /10/ к предположению (он сам не настаивал на правильности такого утверждения), что при любом $\eta: 0<|\eta|<1$ задача (A)–(B) имеет частицеподобные решения с любым числом узлов. На основании же результатов счета на ЭВМ и некоторых нестрогих рассуждений авторы /11/ утверждали то же самое. Изложим кратко суть этих рассуждений. Была введена функция

$$U(y)=-2\int_0^y f(t)\,dt \quad , \qquad \text{где } f(t)=\eta^2 t-4t^3+3t^5 .$$

При любом $\eta: 0<|\eta|<1$ ее график имеет следующий вид:

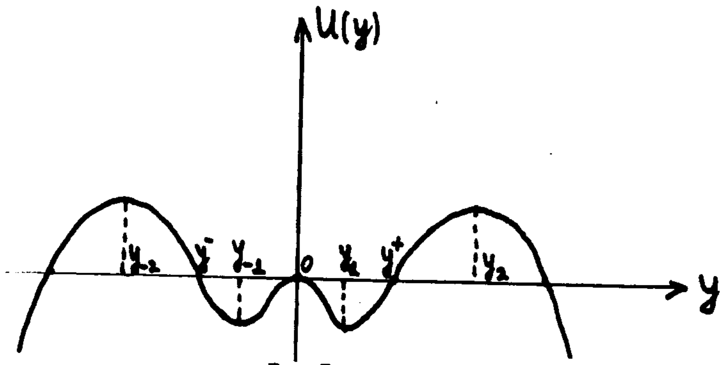

Рис.I.

Рассмотрим теперь уравнение (A) с начальными условиями $y(0)=y_0$, $y'(0)=0$, то есть задачу Коши. Легко можно доказать, что уравнение (A) эквивалентно следующему уравнению:

$$\left\{[y'(x)]^2+U[y(x)]\right\}'=-4\,\frac{[y'(x)]^2}{x}. \qquad \text{(C)}$$

Отсюда следует, что для любого $x>0$ $U[y(x)]<U(y_0)$. Если возьмем y_0 из полуинтервала $(0, y^+]$ (рис.I), то на плоскости (y, U) точка $[y(x), U(y(x))]$ будет двигаться, при возрастании x, по графику функций $U(y)$ между $y=0$ и $y=y^+$, то есть не может достигнуть начала координат. Если же будем увеличивать y_0, то $U(y_0)$ будет увеличиваться, станет положительной величиной и поэтому при некотором y_0 точка $[y(x), U(y(x))]$ будет проскакивать через 0. Взяв теперь $\bar{y}_0$ так, что при $y_0<\bar{y}_0$ решения задачи Коши $y(x)$ не достигают оси Ox, а при $y_0>\bar{y}_0$ – достигают, получим решение задачи (A)–(B). Аналогичны рассуждения в доказательство существования частицеподобных решений с любым числом узлов. Эти рассуждения, как уже указывалось, не строги. Нетрудно привести противоречащий пример. График функции $U(y)=-2\int_0^y(t-t^5)dt$ имеет точки над осью $U=0$, но, как строго доказано в /7/, ни одно решение задачи Коши для уравнения (A) при $f(y)=y-y^5$ не достигает оси Ox.

Нами строго доказано существование частицеподобных решений в задаче (A)–(B) для довольно широкого класса функций $f(y)$.

В частности, показано существование частицеподобных решений с K узлами (K – произвольное) в модели Фридберга-Ли-Сирлина. Настоящая работа состоит из 2 частей. В них доказано существование безузлового решения в модели Фридберга-Ли-Сирлина и теоремы, относящиеся к более общим уравнениям. Нами также доказаны теоремы существования частицеподобных решений с K узлами в модели Фридберга-Ли-Сирлина, а также в более общих моделях, содержащих справа функции довольно общего вида. Эти теоремы войдут в последующие публикации. Большая библиография содержится в обзоре В.Г.Маханькова, посвященном динамике классических солитонов /15/.

I. Рассмотрим следующую задачу Коши для обыкновенного уравнения второго порядка:

$$y''+\frac{2}{x}y'=f(y), \quad 0\le x<+\infty \qquad \text{(I.I)}$$

$$y(0)=y_0<+\infty\quad,\quad y'(0)=0, \tag{I.2}$$

где y_0 – параметр.

Будем предполагать, что функция $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица на любом конечном интервале.

Введем функцию $U(y)=-2\int_0^y f(t)\,dt$.

Для любого решения $y(x)$ уравнения (I.I) имеет место тождество:

$$\left\{[y'(x)]^2+U[y(x)]\right\}'=-4\,\frac{[y'(x)]^2}{x}. \tag{I.3}$$

Из (I.3) следует, что величина $\left\{[y'(x)]^2+U[y(x)]\right\}$ не возрастает на полупрямой $0\le x<+\infty$, следовательно, для произвольного $x\geqslant 0$ имеем: $U[y(x)]\le U[y(0)]$.
Из этого неравенства вытекает, что если только существуют такие числа y_1, y_2 : $y_1<y(0)<y_2$, что $U(y_1)\geqslant U[y(0)]$, $U(y_2)\geqslant U[y(0)]$, то для любого x : $x\geqslant 0$ $y_1<y(x)<y_2$. Основываясь на этих рассуждениях, нетрудно доказать следующую теорему о разрешимости задачи (I.I)-(I.2).

Теорема I. Пусть y_0 таково, что для него найдутся y_1 и y_2 такие, что $y_1<y_0<y_2$, причем $U(y_1)\geqslant U(y_0)$, $U(y_2)\geqslant U(y_0)$. Тогда для данного y_0 существует решение задачи (I.I)-(I.2).

Замечание. Если α – некоторый корень функции $f(y)$, то задача (I.I)-(I.2) разрешима при $y_0=\alpha$ – ее решением является функция $y(x)=\alpha$.

Справедливы также теоремы о единственности решения задачи (I.I)-(I.2) при любом значении y_0 и о непрерывной его зависимости от начального условия y_0.

Теорема 2. При любом значении параметра y_0 задача (I.I)-(I.2) имеет не более одного решения.

Теорема 3. Для любого промежутка $0\le x\le A<+\infty$ и любого y_0 такого, что для него и для близких к нему значений y_0 существует решение задачи (I.I)-(I.2), имеет место непрерывная зависимость решения и его первой производной от y_0 в этом промежутке.

Определение. Решение $y(x)$ задачи (I.I)-(I.2) назовем частицеподобным, если $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$. Решение задачи (I.I)-(I.2) назовем частицеподобным с k узлами (k –натуральное число или нуль), если оно частицеподобно и имеет ровно k корней.

Теорема 4. Пусть существуют такие α_{-1},α_1 : $\alpha_{-1}<0<\alpha_1$, что $f(y)<0$, если $y\in(0,\alpha_1]$, $f(y)>0$, если $y\in[\alpha_{-1},0)$. Пусть также $U(\alpha_{-1})\geqslant U(\alpha_1)$. Тогда при любом $y_0\in(0,\alpha_1]$ решение задачи (I.I)-(I.2) является частицеподобным решением, т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x)=0$.

Доказательство. Ясно, что для любого y_0 из промежутка $(0,\alpha_1]$ выполнены условия теоремы I. Следовательно, существует решение задачи (I.I)-(I.2). Зафиксируем произвольное $y_0\in(0,\alpha_1]$ и пусть $y=y(x)$ – соответствующее ему решение задачи (I.I)-(I.2). Поскольку $U(y_0)\le U(\alpha_1)\le U(\alpha_{-1})$, то $\alpha_{-1}\le y(x)\le\alpha_1$ для любого $x\geqslant 0$.

Сделаем в уравнении (I.I) замену переменных: $z(x)=x\cdot y(x)$. Получим следующее уравнение для $z(x)$:

$$z''=x\cdot f\left(\frac{z}{x}\right). \tag{I.4}$$

Начальные условия (2) преобразуются так:

$$z(0)=0\,,\quad z'(0)=y_0<+\infty. \tag{I.5}$$

В силу того, что $\alpha_{-1}\le y(x)\leqslant\alpha_1$ для любого $x\geqslant 0$, $z''(x)<0$ при $z(x)>0$ и $z''(x)>0$ при $z(x)<0$. Выясним теперь, как может вести себя функция $z=z(x)$ при $x\to+\infty$. Предположим, что существует такое $A>0$, что при $x\geqslant A$ $z(x)$ не имеет корней. Пусть для определенности $z(A)>0$. Тогда $z(x)>0$ при любом $x\geqslant A$. Тогда $z''(x)<0$ при любом $x\geqslant A$. Так как $z(x)$ не имеет корней при $x\geqslant A$, то $z'(x)>0$ при $x\geqslant A$. Так как при $x\geqslant A$ $z''(x)<0$, то $z'(x)$ монотонно убывает и остается положительной величиной. Поэтому существует $a=\lim\limits_{x\to+\infty} z'(x)<+\infty$, причем $a\geqslant 0$. Предположим сначала, что $a>0$. Так как $\frac{z(x)}{x}=y(x)$, то

$\left|\frac{z(x)}{x}\right| = \frac{z(x)}{x} < y_0$ при $x \geqslant A$. Поэтому, учитывая еще, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{z(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} z'(x) = a$, получаем, в силу уравнения (I.4), что $\lim\limits_{x\to+\infty} z''(x) = -\infty$, а это противоречит тому, что $z'(x)$ монотонно убывает при $x \in [A, +\infty)$ и при этом $z'(A) > 0$, $z'(+\infty) = a > 0$.

Поэтому ситуация $a > 0$ невозможна, и $a = 0$. Но тогда, учитывая, что $y(x) = \frac{z(x)}{x}$, получаем

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{z(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} z'(x) = a = 0,$$

то есть получаем, что $y(x)$ является частицеподобным решением задачи (I.I)–(I.2). Теперь для доказательства теоремы остается рассмотреть случай, когда для любого $A > 0$ существует $x_0 > A$ такое, что $z(x_0) = 0$. Легко видеть, что любой корень функции $z(x)$ – изолированный.

Рассмотрим теперь функцию $y(x) = \frac{z(x)}{x}$. Очевидно, корни функций $y(x)$ и $z(x)$ совпадают.

Обозначим через x_{2i} последовательность корней функции $y(x)$, а через x_{2i+1} – последовательность точек наибольшего отклонения от нуля функции $y(x)$ на интервале (x_{2i}, x_{2i+2}) (если на интервале (x_{2i}, x_{2i+2}) более одной точки наибольшего отклонения от нуля функции $y(x)$, то через x_{2i+1} обозначим любую из них).

Для доказательства теоремы I надо доказать, что $|y(x_{2i+1})| \longrightarrow 0$ при $i \to +\infty$.

Предположим, что это не так.

Как уже указывалось выше, величина $\{[y'(x)]^2 + u[y(x)]\}$ является невозрастающей функцией x . Так как для любого i $y'(x_{2i+1}) = 0$, то последовательность $\{u[y(x_{2i+1})]\}$ монотонно убывает, причем все ее члены неотрицательны. Поэтому существует предел $u_0 = \lim\limits_{i\to\infty} u[y(x_{2i+1})] \geqslant 0.$

Итак, предположим, что $u_0 > 0$.

Докажем теперь, что существуют такая величина $K > 0$, что

$$x_{n+1} - x_n \leqslant K \tag{I.6}$$

для любого номера n . Из свойств потенциала u сразу вытекает, что существуют $\lim\limits_{i\to+\infty} y(x_{4i+1}) = \bar{y}_1$, $\lim\limits_{i\to\infty} y(x_{4i+3}) = \bar{y}_{-1}$, причем $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_{-1} < 0$. Для определенности будем считать, что $\bar{y}_1 > 0$, $\bar{y}_{-1} < 0$.

Зафиксируем произвольные числа $\tilde{y}_1 \in (0, \bar{y}_1)$, $\tilde{y}_{-1} \in (\bar{y}_{-1}, 0)$. Поскольку $f(y)$ – непрерывная функция, то существует такое $\bar{f} > 0$, что

$$|f(y)| \geqslant \bar{f} \tag{I.7}$$

для всех y : $y \in \{[\tilde{y}_1, \alpha_1] \cup [\alpha_{-1}, \tilde{y}_{-1}]\}$.

Поскольку $u[y(x)] \geqslant 0$ для любого $x \geqslant 0$ и $u[y(x)] + [y'(x)]^2 \leqslant u[y(0)]$, то $|y'(x)|$ – ограниченная величина. Учитывая это и неравенство (I.7), из уравнения (I.I) получаем, что существует номер i_0 такой, что

$$|y''(x)| \geqslant \frac{\bar{f}}{2} \tag{I.8}$$

для всех $x \geqslant x_{2i_0}$ таких, что $y(x) \in \{[\tilde{y}_1, \alpha_1] \cup [\alpha_{-1}, \tilde{y}_{-1}]\}$, причем $y''(x)$ имеет тот же знак, что и $f[y(x)]$. Обозначим через Δ^1_{2i+1} и Δ^2_{2i+1} следующие положительные величины: $y(x) > \tilde{y}_1$ при $x \in (x_{4i+1} - \Delta^1_{4i+1}, x_{4i+1} + \Delta^2_{4i+1})$,

$$y(x_{4i+1} - \Delta^1_{4i+1}) = y(x_{4i+1} + \Delta^2_{4i+1}) = \tilde{y}_1 ,$$

$y(x) < \tilde{y}_{-1}$ при $x \in (x_{4i+3} - \Delta^1_{4i+3} , x_{4i+3} + \Delta^2_{4i+3})$

и $y(x_{4i+3} - \Delta^1_{4i+3}) = y(x_{4i+3} + \Delta^2_{4i+3}) = \tilde{y}_{-1}$.

Докажем, что последовательности $\{\Delta^1_{2i+1}\}$ и $\{\Delta^2_{2i+1}\}$ ограничены. Достаточно доказать их ограниченность для $i \geqslant i_0$. В самом деле, из (I.8) получаем:

$$y(x_{4i+1}) - \tilde{y}_1 \geqslant \frac{\bar{f}}{2}(\Delta^k_{4i+1})^2 , \quad (k = 1, 2) \tag{I.9}$$

$$\tilde{y}_{-1} - y(x_{4i+3}) \geqslant \frac{\bar{f}}{2}(\Delta^k_{4i+3})^2 , \quad (k = 1, 2) \tag{I.10}$$

для всех $i \geqslant [\frac{i_0}{2}] + 1$.

Из (I.9) и (I.I0) вытекает, если учесть, что последовательности $\{y(x_{4i+1})-\tilde{y}_1\}$ и $\{\tilde{y}_{-1}-y(x_{4i+3})\}$ ограничены по i, что существует такая константа $\Delta_1'>0$, что для любых $i\geqslant i_0$ и $k=1,2$ выполняется неравенство $|\Delta^k_{2i+1}|\leq\Delta_1'$, а отсюда следует, что

$$|\Delta^k_{2i+1}|\leq\Delta_1, \tag{I.II}$$

где $\Delta_1=const>0$, $k=1,2$, i – любое натуральное. Теперь докажем, что величины $\{x_{2i+2}-(x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1})\}$ и $\{(x_{2i+1}-\Delta^1_{2i+1})-x_{2i}\}$ ограничены по i. Ограниченность этих двух последовательностей доказывается одинаково, поэтому докажем только ограниченность последовательности $\{x_{2i+2}-(x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1})\}$.
Пусть для определенности $y(x_{2i+1})>0$.
Тогда $f[y(x_{2i+1})]<0$ и поэтому, как выше было показано, $y''(x)<0$ при тех x, при которых $y(x)\in[\tilde{y}_1, y(x_{2i+1})]$, если только $x\geqslant x_{2i_0}$. Поэтому, учитывая, что $y'(x_{2i+1})=0$, получаем, что при $i\geqslant i_0$ $y'(x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1})<0$.
$U(y)$-монотонная функция при $0<y<y_0$, поэтому

$$0<U[y(x)]\leq max\{U(\tilde{y}_1);\ U(\tilde{y}_{-1})\}<U_0 \tag{I.I2}$$

при $x\in[x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1}, x_{2i+2}]$.
Для любого $x\in[x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1}, x_{2i+2}]$ имеет место следующее неравенство:

$$U[y(x)]+[y'(x)]^2>U_0. \tag{I.I3}$$

Из (I.I2) и (I.I3), учитывая непрерывность $y'(x)$, заключаем:

$$y'(x)<-\check{y},$$

где $\check{y}$ – константа, большая нуля, если $x\in[x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1}, x_{2i+2}]$.
Отсюда следует ограниченность последовательности

$$\{x_{2i+2}-(x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1})\}.$$

Итак, имеем: для любого $i>0$

$$|x_{2i+2}-(x_{2i+1}+\Delta^2_{2i+1})|\leq\Delta_2,\ |(x_{2i+1}-\Delta^1_{2i+1})-x_{2i}|\leq\Delta_2.$$

Обозначим через K величину $\Delta_1+2\Delta_2$, получаем для любого n:

$$x_{n+1}-x_n\leq K.$$

Рассмотрим теперь функционал

$$4\int_{x_1}^{x_2}\frac{[y'(x)]^2}{x}dx \tag{I.I4}$$

и докажем, что функция

$$\bar{y}(x)=\frac{y_1-y_2}{x_1^2-x_2^2}x^2+\left(y_1-x_1^2\frac{y_1-y_2}{x_1^2-x_2^2}\right)$$

минимизирует его в классе один раз непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих условиям $y(x_1)=y_1$, $y(x_2)=y_2$.
В самом деле, указанная функция удовлетворяет условиям на концах отрезка. Рассмотрим функцию $\tilde{y}(x)=\bar{y}(x)+\tau(x)$, где $\tau(x)$ – один раз непрерывно дифференцируемая функция, $\tau(x_1)=\tau(x_2)=0$

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{[\tilde{y}'(x)]^2}{x}dx=\int_{x_1}^{x_2}\frac{[\bar{y}'(x)]^2}{x}dx+2K\int_{x_1}^{x_2}\tau'(x)dx+\int_{x_1}^{x_2}\frac{[\tau'(x)]^2}{x}dx.$$

Здесь

$$K=\frac{y_1-y_2}{x_1^2-x_2^2}.\ \text{Но}\ \int_{x_1}^{x_2}\tau'(x)dx=0,\ \int_{x_1}^{x_2}\frac{[\tau'(x)]^2}{x}dx\geqslant 0,$$

поэтому, действительно, $\bar{y}(x)$ минимизирует функционал (I.I4).
Учитывая это, рассмотрим теперь

$$\int_0^\infty\{[y'(x)]^2+U[y(x)]\}'\,dx. \tag{I.I5}$$

В силу (I.3) он равен $-4\int_0^\infty\frac{[y'(x)]^2}{x}dx=C+\int_{x_N}^\infty(-4)\frac{[y'(x)]^2}{x}dx$,
где C – некоторая константа, $N>0$ – некоторый номер.
Докажем, что $4\int_{x_N}^{+\infty}\frac{[y'(x)]^2}{x}dx$ расходится. Он равен

$$\sum_{n=N}^{+\infty} 4\int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{[y'(x)]^2}{x}\,dx \geqslant 4\sum_{n=N}^{\infty} 4\cdot\left(\frac{y_n-y_{n+1}}{x_n^2-x_{n+1}^2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}\left(x_{n+1}^2-x_n^2\right)=$$

$$=8\sum_{n=N}^{\infty}\frac{C_n}{x_{n+1}^2-x_n^2}\geqslant\frac{8}{K}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{C_n}{x_{n+1}+x_n}\geqslant\frac{4}{K}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{C_n}{x_{n+1}}\ .$$

Здесь $C_n=(y_{n+1}-y_n)^2\geqslant\bar{y}^2$,
где $\bar{y}=\min\{-\bar{y}_{-1}\,;\,\bar{y}_1\}$.
Предположим, что $\bar{y}_1\cdot\bar{y}_{-1}<0$.Тогда получаем, что $C_n\geqslant\bar{y}^2$ при любом n . Поэтому

$$-\int_0^{\infty}\left\{[y'(x)]^2+U[y(x)]\right\}'dx\geqslant\frac{4\bar{y}^2}{K}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{x_{n+1}}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{4\bar{y}^2}{K}\sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{x_N+(n-N)\cdot K}=+\infty\ .$$

С другой стороны,

$$-\int_0^{+\infty}\left\{[y'(x)]^2+U[y(x)]\right\}'dx=U(y_0)-U_0\ .$$

Таким образом, получаем противоречие, ибо $U(y_0)-U_0$ – конечная величина. Поэтому $\bar{y}_{-1}=\bar{y}_1=0$ и тем самым теорема 4 доказана.

<u>Теорема 5</u>. Пусть для функции $f(y)$ выполняются следующие условия:

1) $f(0)=f(\alpha_0)=0$, где $\alpha_0>0$
2) $f(\alpha)>0$ при $\alpha\in(0,\alpha_0)$
3) Существует константа $\beta_0>\alpha_0$ такая, что $f(y)<0$ при $y\in(\alpha_0\,,\,\beta_0)$
4) $f(y)$ удовлетворяет на любом конечном интервале условию Липшица.

Пусть некоторая интегральная кривая уравнения (I.I), удовлетворяющая начальным условиям $y'(0)=0$, $y(0)=y_0>0$, достигает оси Ox при некотором $x>0$, причем пусть $\alpha_0<y_0<\beta_0$.

Тогда существует неотрицательное частицеподобное решение задачи (I.I)-(I.2) для некоторого значения параметра y_0 .

<u>Доказательство</u>. В силу наложенного на функцию $f(y)$ условия 4), для уравнения (I.I) по-прежнему выполняются утверждения I-3 о существовании, единственности и непрерывной зависимости от начального условия решения уравнения (I.I).

Обозначим через E множество всех значений $y_0>0$,при которых решение уравнения (I.I) с начальными условиями $y(0)=y_0$, $y'(0)=0$ достигает оси Ox при некотором $x>0$. Докажем, что множество E – открытое. Для этого возьмем произвольное $y_0\in E$. Пусть $y_0(x)$ – решение уравнения (I.I) при начальных условиях $y_0(0)=y_0$, $y_0'(0)=0$. Пусть x_0 – некоторый положительный корень функции $y_0(x)$: $y_0(x_0)=0$. Докажем, что $y_0'(x_0)\neq0$. В самом деле, предположим, что $y_0'(x_0)=0$. Тогда уравнение (I.I) при начальных условиях $y(x_0)=0$, $y'(x_0)=0$ имеет 2 различных решения на промежутке $(0,x_0]$ – это тривиальное решение и $y_0(x)$. Но это противоречит единственности решения такой задачи. Поэтому $y'(x_0)\neq0$. В силу непрерывности $y_0'(x)$, она не обращается в ноль и сохраняет знак в некоторой окрестности точки x_0 , а поэтому в некоторой окрестности точка x_0 $y_0(x)$ имеет разные знаки и не обращается в нуль слева и справа от точки x_0 . Отсюда следует, что существует такая точка $x_1>0$, что числа y_0 и $y_0(x_1)$ имеют разные знаки и не равны нулю. Из непрерывной зависимости решения уравнения (I.I) от начальных условий (теорема 3) следует, что существует число $\delta>0$ такое, что если только $|y_0-\bar{y}_0|<\delta$, то решение уравнения (I.I) $y(x)$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=\bar{y}_0$, $y'(0)=0$, также имеет разные знаки и не обращается в нуль в точках 0 и x_1 , а поэтому $y(x)$ пересекает ось Ox в некоторой точке $x>0$. Тем самым доказано, что множество E – открытое. Обозначим через $\bar{y}_0$ величину $\inf E$, а через $\bar{y}(x)$ – решение уравнения (I.I), удовлетворяющее начальным условиям $\bar{y}(0)=\bar{y}_0$, $\bar{y}'(0)=0$.

Следствием уравнения (I.I) является следующее тождество:

$$\left\{[\bar{y}'(x)]^2 + U[\bar{y}(x)]\right\}' = -4\frac{[\bar{y}'(x)]^2}{x}, \tag{I.I6}$$

где $U(y) = -2\int_0^y f(t)\,dt$.

Из тождества (I.I6) следует, что как функция аргумента x величина $[\bar{y}'(x)]^2 + U[\bar{y}(x)]$ не возрастает при $x \geqslant 0$. Поэтому для любого $x \geqslant 0$ имеет место неравенство:

$$[\bar{y}'(x)]^2 + U[\bar{y}(x)] \leq U[\bar{y}(0)]. \tag{I.I7}$$

Докажем, что $U[\bar{y}(0)] \geqslant 0$. В самом деле, если мы предположим противное, то есть что $U[\bar{y}(0)] < 0$, то, по определению $\bar{y}(0)$, найдется число $\tilde{y}_0 \in E$ такое, что $U(\tilde{y}_0) < 0$, следовательно, в силу неравенства (I.I7)

$$[\tilde{y}'(x)]^2 + U[\tilde{y}(x)] < 0$$

для любого $x \geqslant 0$ (в этом неравенстве $\tilde{y}(x)$ – решение уравнения (I.I) с начальными условиями $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$, $\tilde{y}'(0) = 0$), а это неравенство противоречит тому, что в точке пересечения $\tilde{y}(x)$ с осью Ox (такая точка существует по определению множества E) очевидным образом

$$[\tilde{y}'(x)]^2 + U[\tilde{y}(x)] \geqslant 0.$$

Итак, доказали, что $U[\bar{y}(0)] \geqslant 0$. Из определения функции $U(y)$ следует, что найдется такое число $\sigma > 0$, что $U(y) < 0$ при $y \in (0, \alpha_0 + \sigma)$. Отсюда следует, что $\bar{y}(0) > \alpha_0$.

Рассмотрим теперь функцию $\bar{z}(x) = x \cdot \bar{y}(x)$. Поскольку $\bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению (I.I), $\bar{z}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\bar{z}'' = x \cdot f\left(\frac{\bar{z}}{x}\right). \tag{I.I8}$$

Начальные условия для $\bar{y}(x)$ перейдут в следующие условия для $\bar{z}(x)$:

$$\bar{z}(0) = 0, \quad \bar{z}'(0) = \bar{y}_0. \tag{I.I9}$$

Очевидно, что множества положительных корней функций $\bar{y}(x)$ и $\bar{z}(x)$ совпадают.

По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+0}\frac{\bar{z}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+0}\bar{z}'(x) = \bar{z}'(0) = \bar{y}_0$.

Поэтому существует правая полуокрестность точки 0, такая, что если x лежит в ней, то $\alpha_0 < \frac{\bar{z}(x)}{x} < \beta_0$, то есть тогда $\bar{z}'' < 0$. Докажем, что при некотором $x_1 > 0$ кривая $z = \bar{z}(x)$ пересечет прямую $z = \alpha_0 x$.

Предположим противное, то есть то, что $\frac{\bar{z}(x)}{x} > \alpha_0$ при любом $x > 0$. Из неравенства (I.I7) следует, что $\bar{y}(x) \leq \bar{y}_0$, поскольку $f(\bar{y}_0) < 0$ и, следовательно, функция $U(y)$ возрастает в некоторой окрестности точки $\bar{y}_0$. Учитывая, что $\frac{\bar{z}(x)}{x} = \bar{y}(x)$, получаем $\frac{\bar{z}(x)}{x} \leq \bar{y}_0$. Окончательно получаем $\alpha_0 < \frac{\bar{z}(x)}{x} \leq \bar{y}_0$.

Поэтому $\bar{z}''(x) < 0$ при любом $x > 0$. Следовательно, $\bar{z}'(x)$ – монотонно убывающая функция, причем $z'(x) > \alpha_0$ для любого $x > 0$, так как иначе кривая $\bar{z}(x)$ пересекала бы прямую $z = \alpha_0 x$ при некотором положительном x. Поэтому существует $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar{z}'(x)$. Обозначим его через K. Тогда $K \geqslant \alpha_0$.

Рассмотрим отдельно 2 возможных случая: $K > \alpha_0$ (I случай) и $K = \alpha_0$ (2 случай).

<u>I-й случай</u>. Предположим, что $K > \alpha_0$. По правилу Лопиталя $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\bar{z}(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\bar{z}'(x) = K$. Поскольку $\alpha_0 < K < \beta_0$, то $f(K) < 0$. Очевидно, в силу непрерывности $f(y)$, что существует число $A > 0$ такое, что если $x \geqslant A$, то $f\left[\frac{\bar{z}(x)}{x}\right] \leq \frac{f(K)}{2}$. Тогда при $x \geqslant A$ $\bar{z}''(x) \leq \frac{f(K)}{2}\cdot x$.

Поэтому имеем: $\bar{z}'(+\infty) - \bar{z}'(A) = \int_A^{+\infty}\bar{z}''(x)\,dx \leq \int_A^{+\infty}\frac{f(K)}{2}\cdot x\,dx = -\infty$.

Таким образом, получаем: $\bar{z}'(+\infty) - \bar{z}'(A) = -\infty$, что невозможно, так как $\bar{z}'(+\infty)$ и $\bar{z}'(A)$ – конечные величины. Получили противоречие, поэтому I случай невозможен.

<u>2-й случай</u>. Предположим, что $K = \alpha_0$. Учитывая, что $\alpha_0 < \frac{\bar{z}(x)}{x} < \beta_0$, найдем:

$$\bar{y}'(x) = \frac{\bar{z}'(x)\cdot x - \bar{z}(x)}{x^2}.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar y'(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar y(x)=\alpha_0$.
Поскольку $U(\alpha_0)<0$, то найдется $\tilde x>0$ такое, что $[\bar y'(\tilde x)]^2+U[\bar y(\tilde x)]<0$, причем $\bar y(x)>\alpha_0$ при $x<\tilde x$.
Используя определение $\bar y(0)$ и теорему 3, получим, что найдется решение уравнения (I.I) $\tilde y(x)$ такое, что $\tilde y(x)>0$ при $0\le x\le\tilde x$ и $[\tilde y'(\tilde x)]^2+U[\tilde y(\tilde x)]<0$, причем $\tilde y'(0)=0$, $\tilde y(0)\in E$.

Но так как величина $\{[\tilde y'(x)]^2+U[\tilde y(x)]\}$ монотонно не возрастает как функция x, и функция $\tilde y(x)$ не имеет корней при $x\le\tilde x$, то $\tilde y(x)$ вообще не имеет положительных корней, так как в точке пересечения с осью Ox величина $[\tilde y'(x)]^2+U[\tilde y(x)]$ должна быть неотрицательной. Но это противоречит тому, что $\tilde y(0)\in E$. Получили противоречие, поэтому случай 2 также невозможен.

Тем самым доказано, что $\bar z(x)$ достигает прямой $z=\alpha_0 x$ в некоторой точке $x_1>0$. Из того, что график функций $\bar z(x)$ пересекает прямую $z=\alpha_0 x$ в точке x_1, сразу следует,что $\bar z'(x_1)\le\alpha_0$. Предположим, что $\bar z'(x_1)=\alpha_0$.
Тогда задача Коши

$$z''=x\cdot f\left(\frac{z}{x}\right),\qquad 0<x\le x_1$$
$$z(x_1)=\alpha_0 x_1$$
$$z'(x_1)=\alpha_0$$

имеет неединственное решение. Это невозможно, поэтому $\bar z'(x_1)<\alpha_0$. **Следовательно, существует правая полуокрестность точки** x_1 такая, что если x принадлежит ей, то $0<\frac{\bar z(x)}{x}<\alpha_0$.

Докажем, что при любом $x>x_1$ $\bar z'(x)\le 0$. В самом деле, предположим, что существует такая точка $\tilde x>x_1$, что $\bar z'(\tilde x)\ge 0$.

Поскольку множество E – открытое, то $\bar z(x)$ не обращается в нуль при $x\ge 0$.

Поэтому, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $0<\frac{\bar z(\tilde x)}{\tilde x}<\alpha_0$.

Существование точки $x_2>x_1$ и такой, что $\bar z(x_2)=\alpha_0 x_2$ доказывается точно так же, как доказывалось существование точки x_1. Тогда $\bar y(x_1)=\bar y(x_2)=\alpha_0$, причем $\bar y(x_1)<\alpha_0$ в некоторой правой полуокрестности точки x_1. Поэтому существует точка $x_3\in(x_1,x_2)$ такая, что $0<y(x_3)<\alpha_0$, $y'(x_3)=0$. В точке x_3: $[\bar y(x_3)]^2+U[\bar y(x_3)]<0$. Следовательно, в силу теоремы 3 выполняется неравенство $[y'(x_3)]^2+U[y(x_3)]<0$, причем $y(x)>0$ при $x\in[0,x_3]$, где $y(x)$ – решение уравнения (I.I) с начальными условиями $y(0)=y_0$, $y'(0)=0$, если только число y_0 достаточно близко к числу $\bar y_0$. Но тогда $y(x)$ не обращается в нуль при любом $x>0$, если y_0 достаточно близко к $\bar y_0$, а это утверждение противоречит тому, что число y_0, сколь угодно близкое к $\bar y_0$, может быть взято из множества E.

Ясно, что $\bar z'(x)\to 0$ при $x\to+\infty$, так как, во-первых, поскольку $\bar z'(x)<0$, $\bar z''(x)>0$ при $x>x_1$, а во-вторых, если предположить, что $\bar z'(x)$ не стремится к 0 при $x\to+\infty$, то в силу того, что $\bar z''(x)>0$ при $x>x_1$, получаем: $\bar z'(x)\le-\delta$, где $\delta>0$ при $x>x_1$, а тогда кривая $z=\bar z(x)$ обязательно пересечет ось Ox в некоторой точке, чего не может быть, как мы уже доказали. Но если $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar z'(x)=0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\bar y(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\bar z(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\bar z'(x)=0$.
То есть доказано, что $\bar y(x)\to 0$ при $x\to+\infty$ и тем самым теорема 5 полностью доказана.

Литература

I. R.J.Finkelstein, R.Lelevier, M.Ruderman. Phys. Rev., 83, 326 (1951).
2. Rosen, Rosenstock. Phys. Rev., 85, 257 (1952).
3. R.J.Finkelstein, C.Fronsdal, P.Kaus. Phys. Rev. 103, 1571 (1956).
4. Гласко В.Б, Лерюст Ф., Терлецкий Я.П., Шушурин С.Ф. ЖЭТФ, т.35, вып.2(8), I958.
5. В.П.Шириков. ОИЯИ, Р-I682, Дубна, I964.

6. Z.Nehari. Proc. Royal Arish. Acad., 1963, N 9, A62, 118-135.
7. Жидков Е.П., Шириков В.П. ОИЯИ, Р-1319, Дубна, 1963 и ЖВМ, 1964, 4, № 5, 804-816.
8. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965.
9. G.H.Ryder, Pacific J. Math. 22, 477 (1967).
10. D.L.T.Anderson, J.Math. Phys. 12, 945 (1971).
11. R.Friedberg, T.D.Lee, A.Sirlin, Nucl. Phys. B115, 1(1976).
12. Маханьков В.Г., Катышев Ю.В. ОИЯИ, Р2-10547, Дубна, 1977.
13. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.I, ИЛ 1953.
14. Сансоне Дж. Обыкновенные дифференциальные уравнения, т.II, ИЛ, 1954.
15. V.G. Makhankov, Phys. Reports, vol.35, N.1, January 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 мая 1978 года