СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11595

В.М.Лебеденко

О PR -АЛГЕБРАХ

1978

P5 - 11595

В.М.Лебеденко

О PR -АЛГЕБРАХ

Лебеденко В.М. P5 - 11595

О PR-алгебрах

Изучаются PR-алгебры, т.е. алгебры Ли с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i<j)$. На основании результатов, полученных ранее, дается критерий принадлежности 2-разрешимых алгебр Ли к классу PR-алгебр. Условия, налагаемые критерием, формулируются на языке линейной алгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Lebedenko V.M. P5 - 11595

On PR-Algebras

PR-algebras, i.e. Lie algebras with commutation relations of $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i<j)$ type are investigared. On the basis of former results a criterion for the membership of 2-solvable Lie algebras to the PR-algebra class is given. The conditions imposed by the criterion, are formulated in the linear algebra language.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

В работе [5] автором получены условия принадлежности алгебры Ли к классу PR-алгебр. Неабелеву действительную алгебру Ли L мы называем PR-алгеброй, если она имеет базис $[H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n]$ $(n \geq 2)$, элементы которого удовлетворяют соотношениям:

$$[H_i, H_j] = 0 \text{ при всех } i,j \leq p \text{ и всех } i,j > p,$$

$$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \text{ при всех } i,j,\ i \leq p,\ j > p \qquad /1/$$

/$r_{ij} \in R$; при любом фиксированном i, $r_{ij} \not\equiv 0$ /. Всякий базис указанного типа будем называть PR-базисом.

Прежде всего видно, что всякая PR-алгебра 2-разрешима: $[[L,L],[L,L]]=0$, где $[L,L] = \{H_1, \ldots, H_p\} \neq 0$. /Здесь и ниже $\{M\}$ будет означать подпространство, натянутое на $M \neq \emptyset$/.

Далее легко заметить, что всякая PR-алгебра разлагается в прямую сумму $[L,L]$ и некоторой абелевой подалгебры A /например, $A = \{H_{p+1}, \ldots, H_n\}$ /. Кроме того, очевидно, что все элементы H_j $(j>p)$, рассматриваемые как операторы на $\{H_1, \ldots, H_p\}$ $(H_j \Longleftrightarrow -\mathrm{ad}(H_j))$, диагональны.

В указанной выше работе дан следующий критерий расщепляемости алгебры L в прямую сумму $[L,L]+A$. Пусть $L = \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n\}$ $(n \geq 2)$, где $[L,L] = \{H_1, \ldots, H_p\}$, а элементы $H_{p+1}, \ldots, H_n$ линейно независимы по модулю $[L,L]$. Алгебра L разложима в прямую сумму $[L,L]+A$, где A - некоторая абелева подалгебра, тогда и только тогда, когда существуют такие элементы

$$H_j' = H_j + \sum_{t=1}^{p} x_{jt} H_t \qquad (p+1 \le j \le n), \qquad /2/$$

что $[H_j', H_k'] = 0$ при любых $j, k, \; p+1 \le j; \; k \le n$. Другими словами, пусть $[H_i, H_j] = \sum_{t=1}^{p} c_{ij}^{(t)} H_t$ для всех $i, j, \; 1 \le i \le p < j \le n$ и $[H_j, H_k] = \sum_{t=1} \ell_{jk}^{(t)} H_t$ для всех $j, k > p; \; j < k$. Тогда для того чтобы алгебра L имела требуемое разложение, необходимо и достаточно совпадение ранга матрицы системы уравнений

$$\begin{cases} \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{t=1}^{p} (c_{tk}^{(s)} x_{jt} - c_{tj}^{(s)} x_{kt}) = \ell_{jk}^{(s)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad /3/$$

для которой индексы пробегают все допустимые значения: $1 \le s \le p, \quad p+1 \le j, \quad k \le n, \quad j < k$, с рангом ее расширенной матрицы.

Далее в той же работе дан следующий критерий принадлежности расщепляемой 2-разрешимой алгебры Ли к классу PR-алгебр. Пусть 2-разрешимая алгебра Ли L разлагается в прямую сумму

$$L = \{H_1, \ldots, H_p\} + \{H_{p+1}, \ldots, H_n\}$$

$$(p \ge 1, \; n-p \ge 1), \qquad \{H_1, \ldots, H_p\} = [L, L].$$

Алгебра L является PR-алгеброй тогда и только тогда, когда существует такой базис в $\{H_1, \ldots, H_p\}$, относительно которого все операторы $H_j (H_j \Leftrightarrow \mathrm{ad}(H_j)), \; p < j \le n$, диагональны. Иначе говоря, если A-матрицы операторов $H_j \; (p < j \le n)$ в базисе $H_1, \ldots, H_p$, то для того чтобы L была PR-алгеброй, необходима и достаточна выполнимость условий:

а/ все характеристические корни матриц $A_j \; (p < j \le n)$ действительны;

б/ минимальные многочлены матриц $A_j \; (p < j \le n)$ не имеют кратных корней. /4/

Ниже мы объединим эти два критерия в один и тем самым уточним указанные результаты. При этом мы будем пользоваться всеми обозначениями, принятыми в этой главе.

2. *КРИТЕРИЙ ПРИНАДЛЕЖНОСТИ АЛГЕБР ЛИ К КЛАССУ PR-АЛГЕБР*

Теорема. 2-разрешимая алгебра Ли $L = \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n\}$ является PR-алгеброй тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы /3/, связанной с L, совпадает с рангом ее расширенной матрицы, а матрицы A_j полученных операторов $H_j' = H_j + \sum_{t=1}^{p} x_{jt} H_t$ удовлетворяют условиям /4/.

Доказательство. Если алгебра Ли L удовлетворяет нашим условиям, то она, очевидно, является PR-алгеброй.

Пусть алгебра Ли L с некоторым базисом $[H_i]^n$, $([L, L] = \{H_1, \ldots, H_p\})$ является PR-алгеброй. Тогда у нее есть PR-базис $[h_i]_1^n$, $(\{[h_i]_1^p\} = [L, L])$. Элементы H_k линейно выражаются через $[h_i]_1^n$, $\{H_1, \ldots, H_p\} = \{h_1, \ldots, h_p\}$. Поэтому существуют элементы

$$H_j' = H_j + \sum_{t=1}^{p} x_{jt}' h_t = H_j + \sum_{t=1}^{p} x_{jt} H_t$$

требуемого вида, то есть ранг матрицы системы /3/, соответствующей L, совпадает с рангом ее расширенной матрицы. Далее, полученные операторы $H_j' = H_j + \sum_{t=1}^{p} x_{jt} H_t = \sum_{t=1}^{n} \alpha_{jt} h_t$ диагональны в базисе $[h_i]_1^p$ пространства $\{H_1, \ldots, H_p\} = \{h_1, \ldots, h_p\}$.

Следовательно, матрицы этих операторов в базисе $[H_i]_1^p$ удовлетворяют условиям /4/ /см. [5,6]/. Утверждение доказано.

Следствие: Алгебра Ли $L = \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+1}, \ldots, H_n\}$ не является PR-алгеброй, если не все матрицы операторов H_j $(p < j \leq n)$ удовлетворяют условиям /4/.

В заключение автор считает своим принятым долгом выразить благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы и А.В.Матвеенко за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кириллов А.А. Элементы теории представлений. "Наука", М., 1972.*
2. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9384, Дубна, 1975.*
3. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.*
4. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-10535, Дубна, 1977.*
5. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-11415, Дубна, 1978.*
6. *Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. "Наука", М., 1970.*

Рукопись поступила в издательский отдел 23 мая 1978 года.