ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 11438

Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ $\Psi|\Psi|^{\nu}$

1978

P5 - 11438

Ю.В.Катышев, Н.В.Махалдиани, В.Г.Маханьков

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ $\Psi|\Psi|^{\nu}$

Направлено в "Physics Letters"

Катышев Ю.В., Махалдиани Н.В., Маханьков В.Г.

Р5 - 11438

Об устойчивости солитонных решений уравнения Шредингера с нелинейностью $\psi|\psi|^{\nu}$

Исследована устойчивость солитонных решений

$$\psi = \frac{A_0 e^{i[(\frac{v^2}{4}+\frac{2\beta}{\nu+2}A_0^{\nu})t+\frac{v}{2}(x-vt)]}}{\mathrm{ch}^{\frac{2}{\nu}}[\frac{\nu}{2}A_0^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{2\beta}{\nu+2}}(x-vt)]}$$

нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \beta|\psi|^{\nu}\psi = 0$$

для произвольных положительных ν.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Katyshev Yu.V., Makhaldiani N.V., Makhankov V.G.

P5 - 11438

On Stability of Soliton Solutions to the Schrödinger Equation with Nonlinearity $\psi|\psi|^{\nu}$

The stability of soliton solutions

$$\psi = \frac{A_0 e^{i[(\frac{v^2}{4}+\frac{2\beta}{\nu+2}A_0^{\nu})t+\frac{v}{2}(x-vt)]}}{\mathrm{ch}^{\frac{2}{\nu}}[\frac{\nu}{2}A_0^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{2\beta}{\nu+2}}(x-vt)]}$$

to the nonlinear Schrödinger equation

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \beta|\psi|^{\nu}\psi = 0$$

is investigated for arbitrary positive ν's.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

Используя метод, подробно описанный в наших работах /1,2/, исследуем двумерную устойчивость плоских солитонных решений нелинейного уравнения Шредингера

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \beta\psi|\psi|^{\nu} = 0 \qquad /1/$$

для произвольных положительных ν и β. Когда $\nu = 2$, мы имеем случай широко известного кубического уравнения Шредингера S3 /см., например, обзор /1/ и цитированную в нем литературу/. Когда $\nu = 4$, мы приходим к случаю так называемых спайконов /см., например, работы /3,4//.

Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что уравнение /1/ для произвольных положительных ν и β обладает следующими солитоноподобными решениями:

$$\psi = \frac{A_0 e^{i[(\frac{v^2}{4}+\frac{2\beta}{\nu+2}A_0^{\nu})t+\frac{v}{2}(x-vt)]}}{\mathrm{ch}^{\frac{2}{\nu}}[\frac{\nu}{2}A_0^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{2\beta}{\nu+2}}(x-vt)]}, \qquad /2/$$

где A - амплитуда солитона, v - его скорость.

Для изучения поперечной устойчивости этих решений используем плотность лагранжиана

$$\mathfrak{L} = -\frac{i}{2}(\psi\psi_t^* - \psi^*\psi_t) - |\psi_x|^2 - |\psi_y|^2 + \frac{2\beta}{\nu+2}|\psi|^{\nu+2} \qquad /3/$$

и пробную функцию, имеющую в системе покоя солитона солитоноподобную форму *

$$\psi = \frac{A(y,t)e^{-i\Phi(y,t)}}{\mathrm{ch}^{\frac{2}{\nu}}[D(y,t)x]}. \qquad /4/$$

Подставим /4/ в /3/ и проинтегрируем по продольной координате x . Тогда

$$\tilde{\mathfrak{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{L}\, dx = \frac{A^2\Phi_t}{D} - \frac{4I(\nu)}{\nu^2 B(\frac{2}{\nu},\frac{1}{2})}\,\frac{D_y^2 A^2}{D^3} +$$

$$+ \frac{AA_y D_y}{D^2} - \left(\frac{A_y^2}{A^2} + \Phi_y^2\right)\frac{A^2}{D} - \frac{4DA^2}{\nu(\nu+4)} + \frac{8\beta}{(\nu+2)(\nu+4)}\,\frac{A^{\nu+2}}{D},$$

где $B(\frac{2}{\nu}, \frac{1}{2})$ - бета-функция Эйлера, а

$$I(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi^2\, \mathrm{th}^2\xi\, d\xi}{\mathrm{ch}^{\frac{4}{\nu}}\xi}. \qquad /5/$$

Варьируя действие $\tilde{S} = \int \tilde{\mathfrak{L}}\, dy\, dt$ по A , D и Φ независимо, имеем следующие три уравнения движения Эйлера-Лагранжа *:

$$2A_t D - AD_t - 2AD\Phi_{yy} = 0,$$

$$AD_{yy} - 2A_{yy}D - 2AD\Phi_t + \frac{8}{\nu(\nu+4)}AD^3 - \frac{8\beta}{\nu+4}A^{\nu+1}D = 0,$$

$$\frac{8}{\nu^2}\,\frac{I(\nu)}{B(\frac{2}{\nu},\frac{1}{2})}AD_{yy} - AD\Phi_t - \frac{4}{\nu(\nu+4)}AD^3 - A_{yy}D -$$

$$- \frac{8\beta}{(\nu+2)(\nu+4)}A^{\nu+1}D = 0.$$

Для исследования дисперсионных свойств этой системы линеаризуем ее по малым возмущениям δA , δD и $\delta\Phi$ в окрестности солитонного решения /2/, положив

$$A = A_0 + \delta A\, \exp(-i\omega t + ik_\perp y),$$

$$D = \frac{\nu}{2}A_0^{\frac{\nu}{2}}\sqrt{\frac{2\beta}{\nu+2}} + \delta D\, \exp(-i\omega t + ik_\perp y),$$

$$\Phi = -\frac{2\beta}{\nu+2}A_0^{\nu}t + \delta\Phi\, \exp(-i\omega t + ik_\perp y).$$

В результате получаем следующее дисперсионное уравнение, описывающее поперечные устойчивость $(\omega^2 > 0)$ и неустойчивость $(\omega^2 < 0)$ солитонного решения /2/ /случай $\omega^2 = 0$, нуждающийся в дополнительном исследовании, рассмотрен ниже/:

---

*Отметим, что в системе покоя солитон характеризуется тремя параметрами, поэтому выражение /4/ для пробной функции, зависящее от трех "параметров" A , D и Φ , является довольно общим и оправданным.

* При получении этих уравнений отброшены члены, не дающие вклада в линейном приближении.

$$\omega^2 = \frac{\left[1-\frac{16}{\nu^2}\frac{I(\nu)}{B(\frac{2}{\nu},\frac{1}{2})}\right]k_\perp^6 - \frac{8\beta A_0^\nu}{\nu+4}\left[\frac{3\nu}{\nu+2} - \frac{8I(\nu)}{\nu B(\frac{2}{\nu},\frac{1}{2})}\right]k_\perp^4 + \frac{32\nu^2\beta^2 A_0^{2\nu}}{(\nu+2)^2(\nu+4)}k_\perp^2}{\left[1-\frac{16}{\nu^2}\frac{I(\nu)}{B(\frac{2}{\nu},\frac{1}{2})}\right]k_\perp^2 + \frac{4\nu(\nu-4)}{(\nu+2)(\nu+4)}\beta A_0^\nu} \qquad /6/$$

Знак ω^2 определяется относительным знаком числителя и знаменателя в формуле /6/. В силу громоздкости этих выражений рассмотрим предельные случаи больших и малых $k_\perp$.

В первом пределе имеем $\omega^2 \simeq k_\perp^4 > 0$ /при $k_\perp^2 \gg \beta A_0^\nu$ /, т.е. при больших градиентах поля в y-направлении солитон оказывается устойчивым независимо от вида нелинейности.

При малых $k_\perp (k_\perp^2 \ll \beta A_0^\nu)$ ситуация в корне меняется, теперь мы имеем

$$\omega^2 \simeq \frac{8\nu\beta A_0^\nu}{(\nu+2)(\nu-4)}k_\perp^2, \qquad /7/$$

откуда следует, что точка $\nu=4$ является особой точкой, где знаменатель меняет знак. Это означает, что при $\nu<4$ солитоны неустойчивы по отношению к возмущениям в поперечном направлении. При нелинейностях с $\nu>4$ солитоны оказываются поперечно-устойчивыми. При $\nu=4$, вычисляя интеграл /5/, из формулы /6/ получим

$$\omega^2 = k_\perp^4 - 2A_0^4\beta k_\perp^2 - \frac{64}{45}A_0^8\beta^2. \qquad /8/$$

Это означает, что солитоны /спайконы/ уравнения

$$i\psi_t + \psi_{xx} + \beta\psi|\psi|^4 = 0$$

являются и продольно- и поперечно-неустойчивыми /видимо, поэтому их иногда называют короткоживущими/. Время жизни спайкона можно оценить из формулы /8/:

$$\tau \simeq 1/(\beta A_0^4).$$

Из формулы /7/ следует, что при $k_\perp \to 0$ частота колебаний ω также стремится к нулю. Как уже отмечалось, этот случай требует дополнительного исследования. Проведем его, используя Q-теорему, доказанную в /1/ /стр. 97-98/ * .

Проверим условия применимости этой теоремы. Запишем /2/ в виде $\psi_s = \phi_s(x)\exp(i\mu t)$, где $\mu > 0$, тогда вместо /1/ получим в системе покоя солитона

$$F(\phi) = -\phi_{xx} + \mu\phi - \beta\phi^{\nu+1} = 0. \qquad /9/$$

Тестовый гамильтониан этого уравнения

$$\hat{H}(\phi_s) = \frac{\partial F(\phi)}{\partial\phi}\Big|_{\phi=\phi_s}$$

имеет нулевое собственное значение /с.з./ и соответствующую ему собственную функцию /с.ф./

$$f_0(x) \sim \frac{\partial}{\partial x}\phi_s(x),$$

обязанные трансляционной симметрии задачи, поскольку $\hat{H} f_0(x) = 0$. Функция $f_0(x)$ является одноузловой, поэтому существует одна безузловая с.ф. с отрицательным с.з., т.е. Q-теорема применима. В соответствии с ней солитон ψ_s устойчив, если

$$d\left[\int|\psi_s|^2 dx\right]/d\mu = dS/d\mu > 0,$$

и неустойчив, когда $dS/d\mu \le 0$.

Зависимость $S(\mu)$ найдем с помощью масштабного преобразования $x \to \bar{x}\sqrt{\mu}$, $\phi \to \mu^{\frac{1}{\nu}}\bar{\phi}/\beta^{\nu+1}$, при котором /9/ принимает вид, свободный от μ:

$$-\bar{\phi}_{\bar{x}\bar{x}} + \bar{\phi} - \bar{\phi}^{\nu+1} = 0.$$

* Отметим, что в формуле /6.58/ и формуле перед ней, а также в /6.59/ допущены опечатки: знаки неравенств должны быть изменены на обратные.

Поэтому $S = \int \phi^2 dx = \mu^{(4-\nu)/2\nu} c(\nu,\beta)$, где $c(\nu,\beta) > 0$ - функция, зависящая лишь от параметров ν и β. Отсюда

$$\frac{dS}{d\mu} \sim 4-\nu,$$

а условие неустойчивости плоского (x,t) солитона есть $\nu \geq 4$.

Резюмируя, можно сказать, что солитоны уравнения /1/ неустойчивы при любых ν , либо в продольном направлении при $\nu \geq 4$, либо в поперечном при $\nu \leq 4$. В точке $\nu = 4$ солитоны неустойчивы как в продольном, так в поперечном направлениях.

Иногда рассматривают уравнение вида [4]

$$i\psi_t + \psi_{xx} - a\psi|\psi|^{\eta} + \beta\psi|\psi|^{\nu} = 0.$$

Возможные решения уравнений подобного типа в пространстве d измерений, равно как и их устойчивость в четырехмерном пространстве-времени, рассматривались в работах [5]. Разработанные там методы легко переносятся на случай двумерного пространства-времени.

Литература

1. *Makhankov V.G. Phys.Reports, 1978, 35, p. 1.*
2. *Katyshev Yu.V., Makhankov V.G. Phys.Lett., 1976, 57A, p. 10;*
   Боголюбский И.Л. и др. ОИЯИ, Р2-9673, Дубна, 1976.
3. *Valeo E.J., Kruer W.L. Phys.Rev.Lett., 1974, 33, p. 750; Tsytovich V.N. Physica, 1976, 82C, p. 141.*
4. *Веряев А.А., Цытович В.Н. Известия ВУЗов, Радиофизика, 1977, 20, с. 1639.*
5. *Makhankov V.G. Phys.Lett., 1977, 61A, p. 431;*
   Маханьков В.Г., Катышев Ю.В. ОИЯИ, Р2-10547, Дубна, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 апреля 1978 года.