ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P5 - 11298

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

III. Основные действия над ними

1978

P5 - 11298

Хр.Я.Христов, Б.П.Дамянов

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ - НОВЫЙ КЛАСС ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

III. Основные действия над ними

Направлено в "Болгарский физический журнал"

Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. P5 - 11298

Асимптотические функции - новый класс обобщенных функций. III. Основные действия над ними

В первых двух частях этой работы [1,3] дано определение асимптотических функций и рассмотрен вопрос об их существовании и однозначности разложений, при помощи которых они вводятся. В данной, третьей части введены общие понятия оператора над обобщенными функциями, а также функционала (со значениями - асимптотическими числами). Исследованы основные алгебраические и аналитические операции над асимптотическими функциями. В особенности показано, что действие умножения асимптотических функций всегда определено. Выяснена связь асимптотических функций с распределениями Соболева-Шварца. Показано, что обычные функции, а также δ-функция Дирака и ее производные имеют асимптотические аналоги.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Christov Chr.Ya., Damianov B.P. P5 - 11298

Asymptotic Functions - a New Class of Generalized Functions. III. The Basic Operations on Them

In the two former parts of this investigation [1,3] the general class of asymptotic functions is defined. The questions of the existence and the uniqueness of the decompositions by means of which they are introduced are considered. In the present part, beginning with the general conception of operator and functional on asymptotic functions, we consider the basic algebraic and analytic operations for asymptotic functions and their properties. Especially, it is shown that the operation of multiplication is always defined. The connection with the distributions of Sobolev-Schwartz is cleared up. It is shown that the ordinary functions as well as the Dirac δ-functions and its derivatives have asymptotic translations.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

В первой части этой работы [1] мы предложили некоторое обобщение понятия функции - ввели асимптотические функции $f(x)$, так, чтобы их множество включало в себя обычные функции /бесконечно дифференцируемые/, как и любые линейные комбинации функции Дирака и ее производных, но при этом круг допустимых действий был намного шире, чем у обобщенных функций Соболева-Шварца [2]. Во второй части [3] были рассмотрены некоторые вопросы, связанные с корректностью определения асимптотических функций - с вопросами существования и однозначности введенных разложений. Как было упомянуто в [1], кроме сложения и вычитания, умножения и деления на число, дифференцирования и интегрирования, будут возможны умножение и деление /конечно, при некоторых ограничениях/ асимптотических функций между собой, извлечения нечетных, а при комплексных функциях - и четных корней, а также замена независимой переменной $x \to y = \phi(x)$, причем в особых точках функции $f(x)$ некоторое число производных $\phi(x)$ может быть ноль. При некоторых небольших ограничениях, не затрагивающих включения функций Дирака и их производных, можно обеспечить еще существование определенного интеграла от $x = -\infty$ до $x = +\infty$, а также фурье-преобразование. В настоящей работе мы введем наиболее основные из этих действий, включая умножение.

1. ОПЕРАТОРЫ И ФУНКЦИОНАЛЫ НАД АСИМПТОТИЧЕСКИМИ АРГУМЕНТАМИ

Прежде всего, дадим общий способ, с помощью которого основные арифметические и аналитические действия, а также и ряд функций, определенных в случае, когда аргументы - классические функции, можно перенести на случай асимптотических аргументов. Те и другие можно объединить единым понятием оператора /в общем нелинейного/ - получения новой функции из одной или из нескольких заданных.

Самым общим способом оператор над асимптотическими функциями

$$f(x) = \Phi(f^k(x)) \qquad |k = 1, 2, \ldots K| \tag{/1/}$$

задается

Определением 1. Все характеристики /параметры, индексы и компоненты/ новой асимптотической функции $f(x)$ являются классическими функциями или операторами над характеристиками асимптотических аргументов оператора $f^k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots K)$.

Мы не будем рассматривать операторы этого самого общего типа, а ограничимся случаем квазиклассических операторов:

Определение 2. Представители результата $f(s,x)$ при каждом s задаются некоторым классическим оператором над представителями аргументов $f^k(s,x)$ $(k=1,2,..K)$ при том же s :

$$f(s,x) = F(f^k(s,x)) \qquad |k = 1, 2, \ldots K|. \tag{/2/}$$

Здесь предполагается, что при любом выборе функционных последовательностей $f^k(s,x)$, представляющих $f^k(x)$, оператор /2/ имеет смысл, и когда $f^k(s,x)$ пробегают классы представителей $f^k(x)$, $f(s,x)$ /2/ пробегают весь класс представителей результата $f(x)$ и только их.

Это определение в общем удовлетворительно, но чтобы не натолкнуться на исключения, как и в случае действий и функций над асимптотическими переменными [4], необходимо обобщить его в двух направлениях.

Определение 3.

А/ Если при некотором выборе $f^k(s,x)$ результат $f(s,x)$ /2/ не определен для некоторых значений s и x, он может быть экстраполирован произвольно для этих s и x. Любая доопределенная таким образом функция $f(s,x)$ должна оставаться в классе представителей результата $f(x)$. Если такая экстраполяция не нужна, будем говорить, что результат имеет однозначно определенных представителей.

В/ Если нет функции $f(x)$, все представители которой $f(s,x)$ и только они получаются по /2/ с последующим пополнением по А , то все же потребуем, чтобы все последовательности $f(s,x)$, получаемые по /2/ и А, принадлежали классу представителей некоторой функции $f^{\circ}(x)$. Если такой функции нет, то оператор следует считать неопределенным при заданном выборе $f^k(x)$. Легко увидеть, что если имеется одна такая функция $f^{\circ}(x)$, то обязательно будет еще бесконечное множество других таких функций. Все они получаются из $f^{\circ}(x)$ уменьшением точностей ее разрывов и ее компонент, сохраняя при этом оставшиеся коэффициенты разрывов и коэффициентные функции, или добавлением произвольных новых компонент. Тогда среди них обязательно найдется одна и только одна функция $f(x)$, которая не имеет подчиненных среди остальных функций $f^{\circ}(x)$, т.е. такая, чтобы не было функции $f^{\circ}(x)$, отличной от $f(x)$, все представители которой были представителями и $f(x)$. Эта функция $f(x)$ задает результат рассматриваемого оператора /1/ при заданном выборе аргументов $f^k(x)$. Иными словами, результат задается той функцией $f(x)$, класс представителей которой лучшим образом покрывается множеством функционных последовательностей $f(s,x)$, получаемых по /2/ и А.

Условие В требует, чтобы множества LM^1 и LM для стандартного разложения функции $f(x)$ были минимальны и чтобы каждая из точностей $\nu^{1*}_{\ell_m}$ и $\nu^{*}_{\ell_m}$ $|m \in M|_{\ell_0}|$ для результата $f(x)$ была не меньше соответствующей точности для любой из функций $f^{\circ}(x)$. Это означает, что множество возможных значений для каждой точности $\nu^{1*}_{\ell_m}$ и $\nu^{*}_{\ell_m}$ имеет максимум /причем эти максимумы взаимно не обусловлены - увеличение одной из точностей $\nu^{1*}_{\ell_m}$ или $\nu^{*}_{\ell_m}$ не ведет к уменьшению другой из них/. При этом можем предполагать, что множества LM^1 и LM стандартны.

Определение 4. Если функционные последовательности /2/ покрывают полностью класс представителей

$f(x)$, оператор Φ назовем перфектным /при заданном выборе $f^k(x)$ /. А если он одновременно перфектен и имеет однозначно определенных представителей, т.е. если нет необходимости пользоваться обобщениями А и В, то мы назовем его естественным. Эти понятия можем отнести и к операторам Φ, если они имеют место при любом выборе аргументов $f^k(x)$.

Примером перфектной и естественной операций, очевидно, может служить сложение: $f''(x)=f(x)+f'(x)$. /При рассмотрении конкретных действий можем пользоваться иными индексированиями аргументов и результата/. Деление $f''(x)=f'(x):f(x)$ не имеет однозначно определенных представителей. В самом деле, у функции $f(x)$ имеются представители $f(s,x)$, которые равны нулю при некоторых x и некоторых $s>0$. Для этих x и s отношение $f''(s,x)=f'(s,x):f(s,x)$ не имеет смысла и появится необходимость экстраполировать $f''(s,x)$. Умножение $f''(x)=f'(x)\cdot f(x)$ иногда имперфектно, например, если ведущие коэффициентные функции множителей равны нулю при некоторых x. Имперфектен также самый простой оператор, при котором $f(s,x)$ /2/ вовсе от $f^k(s,x)$ не зависит. Тогда по /2/ получим всего лишь один представитель $f(s,x)$: $f(s,x)=a=\mathrm{const}$. В силу условия В определения 3 мы должны дополнить это число, рассматриваемое как функция

$$f(s,x)=a+f^*(s,x),$$

где остаточный член $f^*(s,x)$ регулярен и локализован.

Определение 5. Пусть $f_1(s,x)$ и $f_2(s,x)$ - результаты, которые получаются по /2/, если выбирать двумя различными образами остаточные члены аргументов $f^k(s,x)$, и пусть $\Delta f(s,x)=f_2(s,x)-f_1(s,x)$ - их разность. Они задают некоторую нулевую асимптотическую функцию $\Delta f(x)$. При этом очевидно и

$$LM^i_\Delta \subseteq LM^i, \qquad LM_\Delta \subsetneq LM,$$

$$\nu^{i*}_{\Delta\ell_m} \geqq \nu^{i*}_{\ell_m}, \qquad \nu^*_{\Delta\ell_m} \geqq \nu^*_{\ell_m}.$$

Если повсюду имеем равенство, результат назовем точным, а если хотя бы на одном месте равенство нарушено, он будет сглаживающим.

Например, пусть

$$f'(s,x)=\sqrt[3]{f(s,x)}, \quad f(s,x)=\sum_{n=\nu_0}^{\nu_0^*} f_{0n}(x)s^n+f_0^*(s,x)$$

$$(\nu_0^*>\nu_0, \; f^*_{0\nu_0}(x)>0). \qquad /3/$$

Если

$$\nu_0=3k \; (k=0,\pm1,\pm2,\dots),$$

$$f'(s,x)=(f_{0\nu_0}(x))^{1/3}\, s^{\nu_0/3}\Big(1+\frac{\sum_{n=\nu_0+1}^{\nu_0^*} f_{0n}(x)s^n+f_0^*(s,x)}{f_{0\nu_0}(x)s^{\nu_0}}\Big)^{1/3}.$$

Разлагая второй множитель по формуле бинома, видим, что функция $f'(x)$ будет определена как регулярная асимптотическая функция, причем

$$\nu_0'=\nu_0/3, \quad \nu_0^{*\prime}=\nu_0'+\nu_0^*-\nu_0.$$

Этот результат /3/ точен. Если $\nu_0\neq 2k$, а мы хотим остаться в том же первичном множестве асимптотических функций $F(x)$, в котором находится $f(x)$, то должны сказать, что результат задается регулярной асимптотической нулевой функцией точности $\nu_0^{*\prime}=[\nu_0:3]$, несмотря на выбор коэффициентных функций $f_{0n}(x)$, т.е. результат сглаживает всю структуру последовательностей /3/. В этом случае результат был бы сглаживающим и почти не имело бы смысла говорить о том, что корень существует. Конечно, в расширенном множестве асимптотических функций /определение 13 в /1/ / результат опять становится точным и, следовательно, содержательным.

Условие точности результата данного действия является критерием качества. Это условие требует, чтобы точности результата были ограничены только тем, что остаточные члены содержат функции, не имеющие степенных разложений. Напротив, если результат сглажен, это показывает, что и разложимые по степеням s части аргументов вступают в комбинации, которые уже неразложимы или только частично разложимы. Это обедняет содержание самого утверждения о том, что оператор существует. Предположим, что операторы, с помощью которых мы будем работать, точны, хотя из самого определения это не вытекает.

Аналогичным образом можем ввести функционалы /линейные и нелинейные/ над асимптотическими функциями

$$I = \Lambda(f^k(x)) \qquad |k = 1, 2, \ldots K|$$

с представителями

$$I(s) = L(f^k(s, x)),$$

где L - обычный классический функционал, который при каждом заданном s действует над представителями $f^k(s, x)$, рассматриваемыми как функции от x. Функционалы также могут быть перфектными или имперфектными, точными или сглаживающими, с однозначно определенными представителями или без таковых. В дальнейшем всегда будем подразумевать, что результат точен.

2. *УМНОЖЕНИЕ И ДЕЛЕНИЕ НА ЧИСЛО, СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ*

Все теоремы, которые сформулируем здесь и в дальнейшем, справедливы при любом разложении представителей каждого аргумента. Ради простоты предпочтем их стандартные разложения. Однако формулы, которые будут выражать параметры, индексы и коэффициентные функции результата через те же самые величины аргументов, не обеспечивают стандартный вид результата. Если нужно, мы можем дополнительно перевести результат в стандартный вид. При тех простых действиях, которые будем рассматривать здесь, замкнутость имеет место

и по отношению к первичным множествам $F(s, x)$ и $F(x)$ /с фиксированными параметрами L, x_ℓ, M_ℓ, N /. Поэтому, пока не будет сказано другое, будем работать первичными множествами с $N = 0$, а не расширенными $\underline{F}(s, x)$ и $\underline{F}(x)$.

Теорема 1. Каждое первичное множество асимптотических функций $F(x)$ /а следовательно, и $\underline{F}(x)$/ замкнуто по умножению на асимптотическое число, т.е. произведение $f'(x) = a.f(x)$ всегда существует. Множества LM^i и LM остаются: $LM^{i\prime} \equiv LM^i, LM' \equiv LM$. Каждая компонента умножается на число a, на которое умножаем всю функцию. Если ν и ν^* - степень и точность a, то

$$\nu^{i\prime}_{\ell m} = \nu + \nu^i_{\ell m}, \quad \nu'_{\ell m} = \nu + \nu_{\ell m},$$

$$\nu^{i*\prime}_{\ell m} = \min(\nu + \nu^{i*}_{\ell m}, \nu^* + \nu^i_{\ell m}), \quad \nu^{*\prime}_{\ell m} = \min(\nu + \nu^*_{\ell m}, \nu^* + \nu_{\ell m}).$$

Коэффиценты разрывов и коэффицентные функции компонент получаются по формуле Коши для умножения степенных рядов /члены одного из которых зависят и от t /. Аналогично подсчитываются, если нужно, и остаточные члены представителей произведения.

Теорема 2. Деление на число $f'(x) = f(x) : a$ определено, если a не ноль, и сводится к умножению на a^{-1}.

Теорема 3. Умножение и деление на число всегда точны. Умножение всегда имеет однозначно определенные компоненты, а деление - только если выбранный представитель числа a не аннулируется при некотором s. Необходимое и достаточное условие - чтобы эти действия были перфектными $\nu^* - \nu \geq \nu^*_{\ell m} - \nu_{\ell m}$ при всех $(\ell, m) \in LM$.

Указанное ограничение для перфектности обусловлено тем, что иначе ведущая часть соответствующего остаточного члена $f^{*\prime}_{\ell m}(s, t)$ будет иметь вид

$$a^*(s) f_{\ell, m, \nu_{\ell m}}(t) . s^{\nu_{\ell m}},$$

а, очевидно, по этой формуле нельзя получить все остаточные члены точности $\nu^* + \nu_{\ell m}$.

Умножение и деление данной асимптотической функции на некоторое асимптотическое число коммутативны, однако не всегда обратны: после умножения и деления на одно и то же число получим исходную функцию, только если относительная точность $\lambda=\nu^{*}-\nu$ числа a не меньше относительных точностей всех разрывов и всех компонент. Иначе получим некоторую функцию $a.a^{-1}f(x)$, доминирующую $f(x)$ /уменьшенными точностями/.

Теорема 4. Каждое первичное множество асимптотических функций $F(x)$ замкнуто по сложению и вычитанию, т.е. сумма и разность двух асимптотических функций $f''(x)=f(x) \pm f'(x)$ всегда существуют.

Воспользуясь неоднозначностью разложений для f и f', мы всегда можем предположить, что LM^{i}, LM и $LM^{i\,\prime}, LM'$ соответственно совпадают /это означает, что множества особых точек x_{ℓ} и x'_{ℓ}, множества внутренних степеней M^{i}_{ℓ}, M_{ℓ} и $M^{i\,\prime}_{\ell}, M'_{\ell}$ соответственно совпадают/.

Действия производятся по разрывам и по компонентам:

$$\Delta f^{i\,\prime\prime}_{\ell m}=\Delta f^{i}_{\ell m} \pm \Delta f^{i\,\prime}_{\ell m} \quad ((\ell,m)\in LM^{i\,\prime\prime}\equiv LM^{i}\equiv LM^{i\,\prime}),\ f''_{\ell m}=f_{\ell m} \pm f'_{\ell m}$$

$$((\ell,m)\in LM''\equiv LM\equiv LM').$$

Нетрудно проверить, что $\Delta f^{i\,\prime\prime}_{\ell m}$ и $f''_{\ell m}$ удовлетворяют всем требованиям A–D определения 8 в /1/./Мажорирование проверяется по теореме 2 в /3/ /. Структурные индексы для суммы и для разности совпадают:

$$\nu^{i\,\prime\prime}_{\ell m}=\min(\nu^{i}_{\ell m},\nu^{i\,\prime}_{\ell m}),\quad \nu^{i*\prime\prime}_{\ell m}=\min(\nu^{i*}_{\ell m},\nu^{i*\prime}_{\ell m}), \tag{4}$$

$$\nu''_{\ell m}=\min(\nu_{\ell m},\nu'_{\ell m}),\quad \nu^{*\prime\prime}_{\ell m}=\min(\nu^{*}_{\ell m},\nu^{*\prime}_{\ell m}). \tag{5}$$

Коэффициенты разрывов $\Delta f''_{\ell mn}$ и коэффициентные функции $f''_{\ell mn}(t)$ задаются через

$$\Delta f^{i\,\prime\prime}_{\ell mn}=\Delta f^{i}_{\ell mn} \pm \Delta f^{i\,\prime}_{\ell mn} \quad (\nu^{i\,\prime\prime}_{\ell m} \leqq n \leqq \nu^{i*\prime\prime}_{\ell m}),$$

$$f''_{\ell mn}(t)=f_{\ell mn}(t) \pm f'_{\ell mn}(t) \quad (\nu''_{\ell m} \leqq n \leqq \nu^{*\prime\prime}_{\ell m}).$$

Подразумеваем, что при $n<\nu^{i}_{\ell m}$ или $n<\nu^{i\,\prime}_{\ell m}$ $\Delta f^{i}_{\ell mn}=0$, соответственно $\Delta f^{i\,\prime}_{\ell mn}=0$. То же самое относится к $f''_{\ell mn}(t)$.

Теорема 5. Сумма и разность всегда перфектны, а следовательно, и точны действия с однозначно определенными представителями.

Теорема 6. Сложение коммутативно и ассоциативно.

Теорема 7. Разность двух одинаковых функций дает нулевую функцию, и каждую нулевую функцию можно получить как разность двух одинаковых функций. Та же самая связь имеет место между функциями, точности которых $\nu^{i*}_{\ell m}$ и $\nu^{*}_{\ell m}$ бесконечны, и абсолютными нулевыми функциями. Если регулярные части рассматриваемых функций локализованы, то и абсолютная нулевая функция локализована, и наоборот.

Эта теорема может служить как определение нулевых функций, но в духе всей этой работы мы предпочли определить их явно, указывая множества соответствующих представителей.

Ввиду того, что имеется много нулевых функций, получаем, что сложение и вычитание не всегда обратны: из $f''(x)=f(x)+f'(x)$ не всегда следует $f'(x)=f''(x)-f(x)$ и $f(x)=f''(x)-f'(x)$. Можно утверждать только, что при каждом $(\ell,m)\in LM^{i}$ из $f''(x)=f(x)+f'(x)$ следует одно из равенств $\Delta f^{i\,\prime}_{\ell m}=\Delta f^{i\,\prime\prime}_{\ell m}-\Delta f^{i}_{\ell m}$ или $\Delta f^{i}_{\ell m}=\Delta f^{i\,\prime\prime}_{\ell m}-\Delta f^{i\,\prime}_{\ell m}$ и при каждом $(\ell,m)\in LM$ следует одно из равенств $f'_{\ell m}(t)=f''_{\ell m}(t)-f_{\ell m}(t)$ или $f_{\ell m}(t)=f''_{\ell m}(t)-f'_{\ell m}(t)$. При этом через $\Delta f^{i}_{\ell m}$ и $f_{\ell m}(t)$ мы обозначили разрывы и компоненты функции $f(x)$, рассматриваемые как асимптотические числа, и, соответственно, как однокомпонентные асимптотические функции. Отсюда следует еще, что в общем $f(x)+f^{\circ}(x) \neq f(x)$ и $(f(x)+f'(x))-f'(x) \neq f(x)$ /$f^{\circ}(x)$ - некоторая нулевая функция/. Разности левых и правых частей этих равенств являются нулевыми функциями, но так как имеется много таких функций, это не означает, что обе части одинаковы. Их разрывы и их компоненты одинаковы только до точностей соответствующих нулей.

Теорема 8. Законы дистрибутивности

$$(a'+a'')\,f(x)=a'f(x)+a''f(x),$$

$$a(f'(x)+f''(x))=af'(x)+af''(x)$$

могут нарушаться /некоторые точности $\nu^*_{\ell m}$ или $\nu^*_{\ell m}$ левой стороны могут оказаться выше соответствующих точностей правой стороны равенств/ только в очень специальных случаях, соответствующих случаю нарушения того же закона для асимптотических чисел [4], а именно:

первый закон нарушается, если

1/ $\nu_{a'}=\nu_{a''}$,

2/ $\nu_{a'+a''}>\nu_{a'}(=\nu_{a''})$,

3/ существует порядок i и пара $(\ell,m)\in LM^i$ такие, что

$$\nu_{a'+a''}+\nu^{i*}_{\ell m}-\nu^{i}_{\ell m}<\nu^*_{a'},\ \nu^*_{a''},$$

или существует пара $(\ell,m)\in LM$ такая, что

$$\nu_{a'+a''}+\nu^*_{\ell m}-\nu_{\ell m}<\nu^*_{a'},\ \nu^*_{a''}.$$

Второй закон нарушается, если существует порядок i и пара $(\ell,m)\in LM$ такие, что

1/ $\nu^{i\,\prime}_{\ell m}=\nu^{i\,\prime\prime}_{\ell m}$,

2/ $\nu^{i}_{\ell m}>\nu^{i\,\prime}_{\ell m}(=\nu^{i\,\prime\prime}_{\ell m})$,

3/ $\nu_{\ell m}+\nu^*-\nu<\nu^{i*\prime}_{\ell m},\ \nu^{i*\prime\prime}_{\ell m}$,

или если существует пара $(\ell,m)\in LM$ такая, что

1/ $\nu'_{\ell m}=\nu''_{\ell m}$,

2/ $\nu_{\ell m}>\nu'_{\ell m}(=\nu''_{\ell m})$,

3/ $\nu_{\ell m}+\nu^*-\nu<\nu^{*\prime}_{\ell m},\ \nu^{*\prime\prime}_{\ell m}$,

/$\nu^{i}_{\ell m}$, $\nu^{i*}_{\ell m}$, $\nu_{\ell m}$ относятся к $f'+f''$ /.

Видим, что каждое первичное множество $F(x)$ замкнуто по сложению и умножению на число. Однако наличие различных нулевых функций, таких, что при каждом $f(x)$ некоторые из них удовлетворяют соотношению $f(x)+o(x)=f(x)$, а другие - нет, является причиной того, что множество асимптотических функций не является линейным. Множество объектов, в котором сложение и умножение на число определены, причем они коммутативны и ассоциативны, но требование существования единственного нуля, а в связи с этим и дистрибутивность нарушены, назовем полулинейным множеством. Тогда $F(x)$, а также и $\underline{F}(x)$ являются примерами таких множеств.

3. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ

Теорема 9. Каждое множество асимптотических функций $F(x)$ замкнуто по дифференцированию.

Дифференцирование производится почленно при $x\neq x_\ell$. При $x=x_\ell$ производные задаются условиями /28/ и /29/ в [1]. Результат всегда перфектен. Структурные параметры остаются, а структурные индексы и компоненты производной $f'(x)$ функции $f(x)$ получаются так:

$$\nu^{i\,\prime}_{\ell m}=\nu^{i}_{\ell m}-m,\qquad \nu^{i*\prime}_{\ell m}=\nu^{i*}_{\ell m}-m, \qquad /6/$$

$$\nu'_{\ell m}=\nu_{\ell m}-m,\qquad \nu^{*\prime}_{\ell m}=\nu^*_{\ell m}-m\qquad (m\in M_{\ell 0}), \qquad /7/$$

$$f'_{\ell mn}(t)=\frac{d}{dt}f_{\ell,m,n+m}(t). \qquad /8/$$

Условие мажорирования остаточных сумм, очевидно, выполнено, так как оно относится к остаточным суммам не только исходной функции, но и ко всем ее производным.

Теорема 10. Множества $F(x)$ замкнуты по интегрированию /имеются в виду неопределенные интегралы/.

Примитивную функцию $\bar f(x)$ функции $f(x)$ получаем почленным интегрированием. Но ввиду требования $\bar f_{\ell m}(s,t)=0$ при $t\to\pm\infty$ $(m\in M_\ell)$, мы должны по-разному определять интеграционные константы при $t>0$ и $t<0$, а это создает дополнительные разрывы при $t=0$. Их следует компенсировать соответствующими разрывами регулярных частей $f_{\ell 0}(s,t)$ /на них накладываются условия исчезновения на бесконечности/. В результате находим, что структурные параметры L и x_ℓ остаются неизменными, а множества $M_{\ell 0}$ меняются, как следует

$$\bar M^{i+1}_{\ell 0} = M^{i}_{\ell 0}, \quad \bar M^{\circ}_{\ell 0} = (0, M_{\ell 0}), \quad \bar M_{\ell 0} = (0, M_{\ell 0}).$$

При этом элемент o добавляется к множеству $M_{\ell 0}$, если он уже не содержится в нем. Структурные индексы определяются, как следует:

$$\bar\nu^{i+1}_{\ell m} = \nu^{i}_{\ell m} + m, \quad \bar\nu^{i+1*}_{\ell m} = \nu^{i*}_{\ell m} + m \quad (m \in \bar M^{i+1}_{\ell}),$$

$$\bar\nu^{\circ}_{\ell m} = \nu_{\ell m} + m, \quad \bar\nu^{\circ *}_{\ell m} = \nu^{*}_{\ell m} + m \quad (m \in \bar M^{\circ}_{\ell}), \qquad /9/$$

$$\bar\nu_{\ell m} = \nu_{\ell m} + m, \quad \bar\nu^{*}_{\ell m} = \nu^{*}_{\ell m} + m \quad (m \in M_{\ell}), \qquad /10/$$

$$\bar\nu^{i}_{\ell 0} = \min_{m \in \bar M^{i}_{\ell}} (\nu^{i}_{\ell 0}, \bar\nu^{i}_{\ell m} + m.i), \qquad /11/$$

$$\bar\nu^{i*}_{\ell 0} = \min_{m \in \bar M^{i}_{\ell}} (\nu^{i*}_{\ell 0}, \bar\nu^{i*}_{\ell m} + m.i),$$

$$\bar\nu_{\ell 0} = \min_{m \in M_{\ell}} (\nu_{0}, \nu_{\ell m} + m), \quad \bar\nu_{0}^{*} = \min_{m \in M_{\ell}} (\nu^{*}_{0}, \nu^{*}_{\ell m} + m). \qquad /12/$$

Тогда компоненты интеграла будут задаваться через

$$\bar f_{\ell m n}(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} f_{\ell, m, n-m}(t)\,dt, & t<0 \\ -\int_{t}^{\infty} f_{\ell, m, n-m}(t)\,dt, & t>0, \end{cases} \qquad /13/$$

$$\bar f_{\ell 0 n}(t) = \int_{0}^{t} f_{\ell 0 n}(t)\,dt + a^{-}_{\ell 0 n}.$$

Если нужно, аналогичные формулы можно написать и для остаточных членов. При этом разрывы $a^{+}_{\ell 0n} - a^{-}_{\ell 0n}$ и $a^{*+}_{\ell 0} - a^{*-}_{\ell 0}$ выбраны так, чтобы обеспечить непрерывность функции $f(s,x)$ в точках x_ℓ. /Их средние значения $\frac{1}{2}(a^{+}_{\ell 0n} + a^{-}_{\ell 0n})$ и $\frac{1}{2}(a^{*+}_{\ell 0} + a^{*-}_{\ell 0})$ произвольны/. Таким образом, результат интегрирования определен до аддитивных констант - до асимптотических чисел степени $\bar\nu_{\ell 0}$ и точности $\bar\nu^{*}_{\ell 0}$, задающих, например, значения $f_{\ell 0}(s,t)$ при $t \to 0$. Но ввиду того, что только сумма $f_{0}(s,x) = \sum_{\ell}^{L} f_{\ell 0}(s, x - x_{\ell})$ имеет значение для $f(s,x)$, видно, что на самом деле результат определен с точностью только до одного асимптотического числа a степени $\bar\nu_{0} = \min_{\ell} \bar\nu_{\ell 0}$ и точности $\bar\nu^{*}_{0} = \min \bar\nu^{*}_{\ell 0}$.

Условия мажорирования /23/ и /25/ в [1] выполняются при

$$\hat{\bar o}_{\ell m}(s) = \hat o_{\ell m}(s)\, s^{m} \quad (m \in M_{\ell 0}),$$

$$\hat{\bar f}^{\circ}_{\ell m}(t) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{t} \hat f^{\circ}_{\ell m}(t)\,dt, & t<0, \\ \int_{t}^{\infty} \hat f^{\circ}_{\ell m}(t)\,dt, & t>0, \end{cases} \quad (m \in M_{\ell}),$$

$$\hat{\bar f}^{\circ}_{\ell 0}(t) = \begin{cases} |\bar f^{\circ}_{\ell 0}(+0)| + \int_{0}^{t} \hat f_{\ell 0}(t)\,dt, & t>0, \\ |\bar f^{\circ}_{\ell 0}(-0)| + \int_{t}^{0} \hat f_{\ell 0}(t)\,dt, & t<0. \end{cases}$$

Остальные мажорирующие функции $\hat{\hat{f}}_{\ell_m}(t)$ $(i>0)$ задаются просто через

$$\hat{\hat{f}}^{\,i+1}_{\ell_m}(t)=\hat{f}^{\,i}_{\ell_m}(t) \qquad (m \in M_{\ell_0}).$$

Как видно из /11/ и /12/, иногда интегрирование сохраняет точность ν^*_0, а иногда понижает ее. В первом случае результат перфектен, во втором - нет.

Действия дифференцирования и интегрирования всегда коммутативны, но не всегда обратны друг другу. Интегрирование может не быть обратным дифференцированию, только если у исходной функции точности регулярной части и ее разрывов слишком высоки по сравнению с точностями сигнулярных частей и их разрывов. Это связано только с точностями $\nu^*_{\ell_0}$ регулярных компонент и точностями $\nu^{i*}_{\ell_0}$ их разрывов. Если $f(x)$ имеет сингулярные компоненты с точностями $\nu^*_{\ell_m}$ ниже ν^*_0+m и разрывы с точностями $\nu^{i*}_{\ell_m}$ ниже $\nu^{i*}_{\ell_0}+m$, то интегрирование может понизить точности регулярных компонент $\nu^*_{\ell_0}$ и их разрывов $\nu^{i*}_{\ell_0}$, а дифференцирование никогда не может их повысить. Во всяком случае, если $f(x)$ является интегралом некоторой функции $f'(x)$, то для таких функций действия дифференцирования и интегрирования обратны.

4. УМНОЖЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Теорема 11. Каждое первичное множество $F(x)$ замкнуто по умножению

$$f''(x)=f(x)\,f'(x). \qquad /14/$$

Мы не будем указывать в явном виде, как параметры, индексы и компоненты $f''(x)$ выражаются через те, которые характеризуют $f(x)$ и $f'(x)$, а укажем только метод их получения. Не будем рассматривать также вопрос о компенсации разрывов - так как $f(s,x)$ и $f'(s,x)$

непрерывны, то, очевидно, и их произведение $f''(s,x)$ непрерывно. Будем пользоваться разложением

$$f(s,x)=\sum^{LM} f_{\ell_m}(s,t_{\ell_m}) \qquad /15/$$

//33/ в /3/ /, причем предположим, что компоненты $f_{\ell_0}(s,x-x_\ell)$ не только непрерывны вместе с их производными при $x=x_{\ell'}\neq x_\ell$, но и что они вместе с их производными исчезают в этих точках. Этого нетрудно достичь, пользуясь неоднозначностью разложения $f_0(s,x)=\sum_{\ell=1}^{L} f_{\ell_0}(s,x-x_\ell)$. Ввиду /15/ ясно, что представители произведения

$$f''(s,x)=f(s,x)\,f'(s,x) \qquad /16/$$

будут задаваться в виде конечной суммы произведений типа

$$f''_\kappa(s,x)=f_{\ell_m}(s,t_{\ell_m})\,f'_{\ell'm'}(s,t_{\ell'm'}), \qquad (\kappa=(\ell,m,\ell',m')), \qquad /17/$$

причем могут быть три случая:

α) $\ell'=\ell$, $m'=m$,

β) $\ell'=\ell$, $m'\neq m$,

γ) $\ell'\neq\ell$.

Случай α самый простой:

$$f_\kappa(s,t)=f_{\ell_m}(s,t)\,f'_{\ell_m}(s,t) \qquad (\kappa=(\ell,m)).$$

Он, очевидно, обладает всеми свойствами A, B, C определения 8 в /1/. /Как мы упомянули заранее, ясно, что умножение не может нарушить D /. При этом легко проверить, что $\nu''_{\ell_m}=\nu_{\ell_m}+\nu'_{\ell_m}$, $\nu^{*\prime\prime}_{\ell_m}=\min(\nu_{\ell_m}+\nu^{*\prime}_{\ell_m},\ \nu^*_{\ell_m}+\nu'_{\ell_m})$.

Чтобы найти степени и точности разрывов $f''(s,x)$, прежде всего по Лейбницу напишем

$$f_\kappa^{i\,''}(s,t)=\sum_{j=0}^{i} f_{\ell m}^{i-j}(s,t)f_{\ell m}^{j'}(s,t). \qquad /18/$$

Следовательно,

$$\Delta f_\kappa^{i\,''}(s)=\sum_{j=0}^{i}[f_{\ell m}^{i-j}(s,+0)f_{\ell m}^{j'}(s,+0)-f_{\ell m}^{i-j}(s,-0)f_{\ell m}^{j'}(s,-0)]=$$

$$=\sum_{j=0}^{i}(f_{\ell m}^{i-j}(s,+0)\Delta f_{\ell m}^{j'}(s)+\Delta f_{\ell m}^{i-j}(s)f_{\ell m}^{j'}(s,-0))$$

$$[=\sum_{j=0}^{i}(\Delta f_{\ell m}^{i-j}(s)f_{\ell m}^{j'}(s,-0)+f_{\ell m}^{i-j}(s,+0)\Delta f_{\ell m}^{j'}(s))].$$

Отсюда сразу видно, что

$$\nu_\kappa^{i\,''}=\min_{j=0}^{i}(\nu_{\ell m}+\nu_{\ell m}^{j'},\ \nu_{\ell m}^{i-j}+\nu'_{\ell m}),$$

$$\nu_\kappa^{i*''}=\min_{j=0}^{i}(\nu_{\ell m}+\nu_{\ell m}^{j*'},\ \nu_{\ell m}^{*}+\nu_{\ell m}^{j'},\ \nu_{\ell m}^{i-j}+\nu_{\ell m}^{*'},\ \nu_{\ell m}^{i-j*}+\nu'_{\ell m}).$$

Конечно, здесь найдены степени и точности компонент и разрывов, соответствующие данному произведению $f''_\alpha(s,x)$ /17/ в случае α. Остальные произведения /17/ могут дать другие члены $f^{*''}_\alpha(s,x)$ теми же значениями ℓ, m, и, чтобы найти действительные $\nu''_{\ell m}$, $\nu^{*''}_{\ell m}$, $\nu^{i\,''}_{\ell m}$, $\nu^{i*''}_{\ell m}$, мы должны минимизировать еще по α/17/.

Из /17/ в случае α видно, что если $m>0$, то $f''_{\ell m}(s,t)$ будет быстро стремиться к нулю при $t\to\pm\infty$, а из /18/ ясно, что то же самое свойство будет иметь место и для производных. Если же $m=0$, о росте $f''_{\ell m}(s,t)$ при $t\to\pm\infty$ мы ничего не можем утверждать, но это и не нужно.

Из /17/ и /18/ получаем, что для $f''_{\ell m}(s,t)$ мажорирование имеет место при $s''_0=\min(s_0,s'_0)$ и при $\hat{o}''_{\ell m}(s)=$ $=\hat{o}_{\ell m}(s)\hat{o}'_{\ell m}(s)$, $\hat{f}^{i\,''}_{\ell mn}(t)=\sum\hat{f}^{i-j}_{\ell mn}(t)\hat{f}^{j'}_{\ell mn}(t)$. Однако

нам нужно доказать мажорирование еще для остаточных сумм, задаваемых через

$$f''_{\ell m}(s,t)=f^{*''}_{\ell mn}(s,t)+\sum_{n'=\nu''_{\ell m}}^{n} f''_{\ell mn'}(t)s^{n'},$$
$$(\nu''_{\ell m}-1\leq n\leq\nu^{*''}_{\ell m}), \qquad /19/$$

//21/ в /1/ /. Мы можем определить $f^{*''}_{\ell mn}(t)$ и при $n<\nu''_{\ell m}-1$:

$$f''_{\ell m}(s,t)=f^{*''}_{\ell mn}(s,t) \qquad \text{при } n\leq\nu''_{\ell m}-1. \qquad /20/$$

Пусть $\nu''_{\ell m}\leq n\leq\nu^{*''}_{\ell m}$. Пользуясь равенствами /19/ и /20/, для $f_{\ell m}(s,t)$, а затем и для $f'_{\ell m}(s,t)$, находим:

$$f''_\kappa(s,t)=\sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n-\nu'_{\ell m}} f_{\ell mn'}(t)s^{n'}f'_{\ell m}(s,t)+$$

$$+f^*_{\ell,m,n-\nu'_{\ell m}}(s,t)f^*_{\ell,m,\nu'_{\ell m}-1}(s,t)=$$

$$=\sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n-\nu'_{\ell m}} f_{\ell mn'}(t)s^{n'}\Big(\sum_{n''=\nu'_{\ell m}}^{n-n'} f'_{\ell mn''}(t)s^{n''}+f^{*'}_{\ell,m,n-n'}(s,t)\Big)+$$

$$+f^*_{\ell mn-\nu'_{\ell m}}(s,t)f^*_{\ell m\nu'_{\ell m}-1}(s,t).$$

В двойной сумме заменяем $n'+n''$ на n'. Получаем

$$f''_\kappa(s,t)=\sum_{n'=\nu_{\ell m}+\nu'_{\ell m}}^{n}\Big(\sum_{n''=\nu_{\ell m}}^{n'-\nu_{\ell m}} f_{\ell mn'-n''}(t)f'_{\ell mn''}(t)\Big)s^{n'}+$$

$$+\sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n-\nu'_{\ell m}} f_{\ell mn'}(t)s^{n'}f^{*'}_{\ell mn-n'}(s,t)+$$

$$+f^*_{\ell mn-\nu'_{\ell m}}(s,t)f^*_{\ell,m,\nu'_{\ell m}-1}(s,t).$$

Ввиду /19/ мы можем написать

$$f_{\ell mn'}(t)\,s^{n'} = f^{*}_{\ell mn'-1}(s,t) - f^{*}_{\ell mn'}(s,t) \qquad /21/$$

и находим

$$f^{*''}_{\kappa n}(s,t) = \sum_{n'=\nu_{\ell m}+1}^{n-\nu'_{\ell m}+1} f^{*}_{\ell mn'} f^{*}_{\ell mn-n'-1} +$$

$$+ f^{*}_{\ell mn-\nu'_{\ell m}} f^{*}_{\ell m\nu'_{\ell m}-1} - \sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n-\nu'_{\ell m}} f^{*}_{\ell mn'} f^{*'}_{\ell mn-n'} =$$

$$= \sum_{n'=\nu'_{\ell m}}^{n-\nu_{\ell m}+1} f_{\ell m\,n-n'}(s,t)\, f^{*'}_{\ell mn'-1}(s,t) -$$

$$- \sum_{n'=\nu'_{\ell m}}^{n-\nu_{\ell m}} f^{*}_{\ell mn-n'}(s,t)\, f^{*'}_{\ell mn'}(s,t), \qquad /22/$$

$$(\nu''_{\ell m} - 1 \leq n \leq \nu^{*''}_{\ell m}). \qquad /23/$$

Видим, что остаточная сумма $f^{*''}_{\ell mn}$ выражается как конечная сумма произведений типа /17/, и, следовательно, учитывая теорему 2 в [3], мы можем мажорировать ее таким же образом. При этом мы должны учесть, что s_0 и s'_0 от n не зависят, так что это будет иметь место и для s''_0. Конечно, если $m > 0$, $\hat{f}''_{\kappa n}(t)$ при $t \to \pm\infty$ будут стремиться быстро к нулю, а если $m=0$, о росте $\hat{f}''_{\kappa n}(t)$ при $t \to \pm\infty$ мы ничего не можем утверждать, но это и не нужно.

Мажорирование производных доказывается тем же самым способом, если учитывать /23/ и то, что по Лейбницу производная произведения задается в виде конечной суммы произведений множителей и их производных, а производные множителей мажорируются таким же образом, как и сами множители.

Перейдем к случаю β. Без ограничения общности будем считать $m>m'$. Рассмотрим сначала случай, когда $m'>0$, или же $m'=0$, но функция $f'_{\ell 0}(s,x-x_{\ell})$ локализована. Покажем, что произведение /17/ в этом случае является функцией типа $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$, с тем же самым значением ℓ, со значением m, как у первого множителя $(m>m')$, и с надлежаще выбранными степенью, точностью и коэффициентными функциями. Обозначим $t=(x-x_{\ell})s^{-m}$, $t' = (x-x_{\ell})s^{-m'} = t.s^{m-m'}$. Разложим прежде всего функцию $f'_{\ell m'}(s,ts^{m-m'})$ по s в обоих аргументах до некоторой степени n $(\nu'_{\ell m'}-1 \leq n \leq \nu^{*'}_{\ell m'})$.

Чтобы найти это разложение в необходимом для нас виде, обозначим через $f^{xi}_{\ell mn}{}^{*}(s,t)$ двойную остаточную сумму порядка n по s $(n=\nu_{\ell m}-1, \nu_{\ell m}, \nu_{\ell m}+1, \ldots, \nu^{*}_{\ell m})$ и порядка i по t $(i=-1,0,1,\ldots)$, т.е. остаточную сумму порядка i по степеням t остаточной суммы $f^{*}_{\ell mn}(s,t)$ порядка n по степеням s функции $f_{\ell m}(s,t)$. /Функции $f_{\ell m}(s,t)$ имеют производные любого порядка по t и поэтому они имеют асимптотические разложения любой точности по неотрицательным степеням t /. Следовательно, мы можем писать

$$f_{\ell m}(s,t) = \sum_{i'=0}^{i} \sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n} f^{i'}_{\ell mn'} s^{n'} t^{i'} + \sum_{i'=0}^{i} f^{i'*}_{\ell mn}(s)\,t^{i'} +$$

$$+ \sum_{n'=\nu_{\ell m}}^{n} f^{xi}_{\ell mn'}(t)\,s^{n'} + f^{xi}_{\ell mn}{}^{*}(s,t). \quad \text{/см. *рис. 1*/.}$$

Здесь точками обозначены члены двойного разложения. Горизонтальными чертами представлены остаточные суммы разложений по s коэффициентов разложения по t. Вертикальными чертами даны остаточные суммы разложений по t коэффициентов разложения по s. Прямоугольник вправо и вверх соответствует $f^{x}_{n}{}^{*}$. Эти определения и эта схема не предполагают сходимости разложений - двойные разложения, как и все разложения, которые мы здесь рассматриваем, являются асимптотическими.

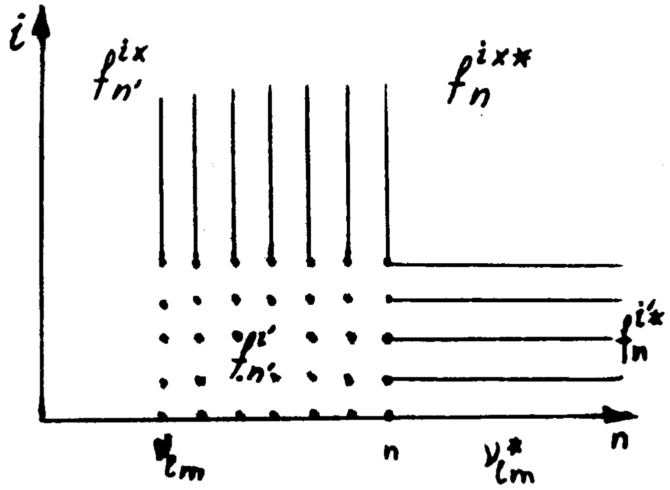

Рис. 1

Разложим функцию $f_{\ell_m'}(s, ts^{m-m'})$ сначала по второму аргументу t' :

$$f_{\ell_m'}(s,ts^{m-m'}) = \sum_{i=0}^{i_n} f^{i'}_{\ell_m'}(s)\, s^{(m-m')i}\, t^i + f^{x\, i_n'}_{\ell_m'}(x,t'),$$

причем i_n - самое большое значение i , при котором

$$\nu'_{\ell_m'} + (m-m')i \leqq n, \qquad /24/$$

т.е.

$$i_n = [(n-\nu'_{\ell_m'})/(m-m')].$$

Идти дальше по степеням t' нет необходимости, потому что мы получили бы члены, степени которых превышают искомую точность результата n . Разлагаем теперь $f^{i'}_{\ell_m'}(s)$ по s до степени $n-(m-m')i$ /с тем, чтобы степени членов разложения не превышали n /. Находим

$$f_{\ell_m'}(s,ts^{m-m'}) = \sum_{i=0}^{i_n} t^i s^{(m-m')i}\Big(\sum_{\nu'_{\ell_m'}}^{n-(m-m')i} f^{i'}_{\ell_m' n'}\, s^{n'} +$$

$$+ f^{i*'}_{\ell,m',n-(m-m')i}(s)\Big) + f^{x i_n'}_{\ell_m'}(s,t') =$$

$$= \sum_{i=0}^{i_n} \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}}^{n-(m-m')i} f^{i'}_{\ell_m' n'}\, t^i s^{n'+(m-m')i} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i_n} t^i s^{(m-m')i} f^{i*'}_{\ell,m',n-(m-m')i}(s) + f^{x i_n'}_{\ell_m'}(s,t').$$

Воспользуемся соотношениями

$$f^{i_n *'}_{\ell_m'}(s,t') = \begin{cases} f^{x i_n *'}_{\ell_m',\nu'_{\ell_m'}-k}(s,t') \quad |k \geq 1| \ \text{при}\ \nu'_{\ell_m'} \leqq \nu^{*'}_{\ell_m'} \\ f^{x\, i_n *'}_{\ell,m',\nu'_{\ell_m'}}(s,t') \quad \text{при}\ \nu'_{\ell_m'} = \nu^{*'}_{\ell_m'} + \epsilon, \end{cases}$$

$$t^i s^{(m-m')i} f^{i*'}_{\ell,m',n-(m-m')i}(s) = f^{x\, i-1\, *'}_{\ell,m',n-(m-m')i}(s,t') -$$

$$- f^{xi*'}_{\ell,m',n-(m-m')i}(s,t'),$$

которые аналогичны соотношениям /19/, /2O/ и /21/. В случае $\nu'_{\ell_m'} \leqq \nu^{*'}_{\ell_m'}$ **при** $k=1$ **находим**

$$f_{\ell_m'}(s,ts^{m-m'}) = \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}}^{n} s^{n'} \sum_{i=0}^{i_n'} f^{i'}_{\ell,m',n'-(m-m')i}\, t^i +$$

$$+ \sum_{i=0}^{i_n} f^{x\, i-1\, *'}_{\ell,m',n-(m-m')i}(s,t') + f^{x\, i_n\, *'}_{\ell_m' \nu'_{\ell_m'}-k}(s,t') -$$

$$- \sum_{i=0}^{i_n} f^{x i *'}_{\ell_m' n-(m-m')i}(s,t'),$$

причем $i_{n'}$ задается через /24/ при $n=n'$. Выбирая для удобства

$$k = 1 + \left[\frac{n-\nu'_{\ell_m'}}{m-m'} \right] - \frac{n-\nu'_{\ell_m'}}{m-m'} ,$$

находим

$$f'_{\ell_m'}(s,t') = \sum_{n'=\nu'_{\ell_m}}^{n} f'_{\ell_m'(n')}(t)\, s^{n'} + f^{*\prime}_{\ell_m'(n)}(s,t), \qquad /25/$$

где

$$f'_{\ell_m'(n')}(t) = \sum_{i=0}^{i_{n'}} f^{\,i-1}_{\ell_m' n'-(m-m')\,i}\; t^{i} , \qquad /26/$$

$$f^{*\prime}_{\ell_m'(n)}(s,t) = \sum_{i=0}^{i_n+1} f^{\,x\ i-1\ *\prime}_{\ell_m' n-(m-m')i}(s,t') -$$

$$- \sum_{i=0}^{i_n} f^{\,x\, i *\prime}_{\ell_m' n-(m-m')i}(s,t'). \qquad /27/$$

Для наглядности все члены и остаточные суммы, из которых составлено выражение /25/ с учетом /26/ и /27/, представлены на *рис. 2* /где $m-m'=5$, $\nu_{\ell_m'}=1$, $n=13$ /. Члены разложения представлены точками, а суммы - заштрихованными квадрантами.

Случай $\nu_{\ell_m'} = \nu^{*\prime}_{\ell_m'} + \epsilon$ аналогичен и даже более элементарен. Мы не будем его рассматривать.

Теперь найдем разложение по степеням s произведения $f''_{\kappa}(s,t)$ /17/:

$$f''_{\kappa}(s,t) = \sum_{n'=\nu''_{\kappa}}^{n} f''_{\kappa n'}(t)\, s^{n'} + f^{*\prime\prime}_{\kappa n}(s,t), \qquad /28/$$

где

$$\nu''_{\kappa} = \nu_{\ell_m} + \nu'_{\ell_m'}, \qquad \nu^{*\prime\prime}_{\kappa} = \min(\nu_{\ell_m} + \nu^{*\prime}_{\ell_m'},\ \nu^{*}_{\ell_m} + \nu'_{\ell_m'}),$$

$$\nu''_{\kappa} - 1 \le n \le \nu^{*\prime\prime}_{\kappa}, \qquad f^{*\prime\prime}_{\kappa n}(s,t) : s^{n} \underset{s\to 0}{\to} 0.$$

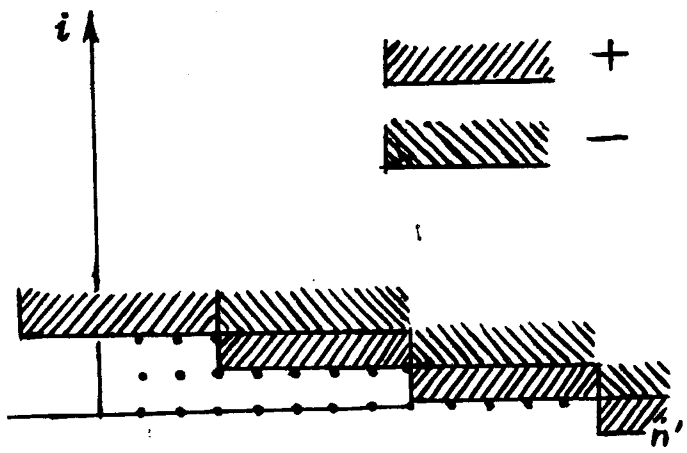

Рис. 2

При этом, ввиду /17/, /25/ и /26/,

$$f''_{\kappa n'}(t) = \sum_{n''=\nu'_{\ell_m'}}^{n'-\nu_{\ell_m}} f_{\ell_m n'-n''}(t)\, f'_{\ell_m'(n'')}(t) =$$

$$= \sum_{n''=\nu'}^{n'-\nu_{\ell_m}} \sum_{i=0}^{i_{n''}} f_{\ell_m n'-n''}(t)\, f'_{\ell_m' n''-(m-m')i}\, t^{i} . \qquad /29/$$

Что касается остаточной суммы в случае $\nu_{\ell_m} \le \nu^{*}_{\ell_m}$ и $\nu'_{\ell_m'} \le \nu^{*\prime}_{\ell_m'}$, то ввиду /27/, получим

$$f^{*\prime\prime}_{\kappa n}(s,t) = \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}-1}^{n-\nu_{\ell_m}} f^{*}_{\ell_m n-n'-1}(s,t)\, f^{*\prime}_{\ell_m'(n')}(s,t) -$$

$$- \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}}^{n-\nu_{\ell_m}} f^*_{\ell_{mn-n'}}(s,t) f^{*\prime}_{\ell_m'(n')}(s,t) =$$

$$= \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}-1}^{n-\nu_{\ell_m}} \sum_{i=0}^{i_{n'}+1} f^*_{\ell,m,n-n'-1}(s,t) f^{x\,i-1\,*\prime}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,t')+$$

$$+ \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}-1}^{n-\nu_{\ell_m}} \sum_{i=0}^{i_{n'}} f^*_{\ell,m,n-n'-1}(s,t) f^{x\,i\,*\prime}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,t')-$$

$$- \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}}^{n-\nu_{\ell_m}} \sum_{i=0}^{i_{n'}+1} f^*_{\ell,m,n-n'}(s,t) f^{x\,i-1\,*\prime}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,t')+$$

$$+ \sum_{n'=\nu'_{\ell_m'}}^{n-\nu_{\ell_m}} \sum_{i=0}^{i_{n'}} f_{\ell,m,n-n'}(s,t) f^{x\,i\,*\prime}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,t'),$$

$$(t' = ts^{m-m'}). \qquad /30/$$

Случаи, когда $\nu_{\ell_m} = \nu^*_{\ell_m}+\epsilon$ или $\nu'_{\ell_m'} = \nu^{*\prime}_{\ell_m'}+\epsilon$, аналогичны.

Этим все индексы и коэффициентные функции $f''_{\kappa}(s,t)$, а также и остаточные суммы при любом n найдены. Условия A и B, а как уже отмечено,- и D, явно имеют место. Остается доказать C.

Ограничиваясь случаем $\nu_{\ell_m} \leq \nu^*_{\ell_m}$ и $\nu'_{\ell_m'} \leq \nu^{*\prime}_{\ell_m'}$, из /30/ видим, что $f^{*\prime\prime}_{\kappa n}(s,t)$ - конечные суммы членов типа

$$S(s,t) = f^*_{\ell_{mn-n'-1}}(s,t) f^{x\,i-1\,*\prime}_{\ell_m' n'-(m-m')i}(s,t,s^{m-m'}) \qquad /31/$$

/суммирование по n' и i; $i \geq 0$ /. Так как эта сумма конечна, то по теореме 2 в /3/ вопрос сводится к мажорированию отдельного члена типа /31/. /Члены в /30/, у которых i или n на 1 больше, рассматриваются аналогично и даже легче/. По теореме Тейлора мы можем писать

$$f^{x\,i-1\,*\prime}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,ts^{m-m'}) = t^i s^{(m-m')i} \times$$

$$\times f^{i\,*\prime}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,\theta t s^{m-m'}), \qquad /32/$$

и тогда $S(s,t)$ принимает вид

$$S(s,t) = s^{(m-m')i} t^i f^*_{\ell,m,n-n'-1}(s,t) \times$$

$$\times f^{i*\prime}_{\ell,m'n'-(m-m')i}(s,\theta t s^{m-m'}).$$

Следовательно,

$$|S(s,t)| \leqq s^{(m-m')i}|t|^i \hat{o}_{n-n'-1}(s)\hat{f}_{\ell m\,n-n'-1}(t)\times$$

$$\times \hat{o}'_{n'-(m-m')i}(s) \hat{f}^{i\,\prime}_{\ell m' n'-(m-m')i}(\theta t s^{m-m'}). \qquad /33/$$

Определим

$$o_S(s) = s^{(m-m')i} \hat{o}_{n-n'-1}(s) \hat{o}^{i\,\prime}_{n'-(m-m')i}(s). \qquad /34/$$

Множитель $f^{i*\prime}_{\ell m' n'-(m-m')i}(s,t')$ имеет степень n', а по общим правилам множитель $f^*_{\ell m\,n-n'-1}$ имеет степень $n-n'-1$. Однако, учитывая, что функция f_{ℓ_m} развиваема по степеням s до порядка $\nu^*_{\ell_m}$, а $n-n'-1 \leq \nu^*_{\ell_m}$, находим, что эта степень $n-n'$, т.е. $\hat{o}_{n-n'-1}(s) = O^{n-n'}(s)$. Следовательно, $\hat{o}_s(s) = o^n(s)$, как и должно быть. Пусть еще напишем

$$\hat f_s(t) = |t|^i\, \hat f_{\ell m n-n'}(t)\, \hat f^{\,i}_{\ell m' n' - (m-m')i},$$

причем $\hat f^{\,i}_{\ell m' n' - (m-m')i}$ - верхний предел последнего множителя в /33/. Ввиду того, что $\hat f_{\ell, m, n-n'}(t)$ стремится быстро к нулю, ясно, что множитель $(t)^i$ не может нарушить мажорирования. Этим мажорирование члена $S(s,t)$ доказано.

Остается рассмотреть мажорирование производных остаточных сумм по t. Ввиду /18/, /30/ и /33/, j-тая производная /деленная на $j\,!$/ задается в виде конечной суммы членов типа

$$T(s,t) = s^{(m-m')k}\,\left(f^*_{\ell,m,n-n'-1}(s,t)\right)^{j-k} \times$$

$$\times \left(f^{xi-1*'}_{\ell,m',n'-(m-m')i}(s,ts^{m-m'})\right)^k \qquad /35/$$

/суммирование по n', i и k; $0 \le k \le j$ /. Чтобы свести мажорирование к уже доказанному мажорированию выражений типа $S(s,t)$ /31/, достаточно принять в соображение тождество

$$(f^{xq}(t))^p = f^{px\overline{q-p}}(t), \qquad /36/$$

где $f^{px\overline{q-p}} = f^{pxq-p}$ при $q \ge p$ и $f^{px\overline{q-p}} = f^p$ при $p > q$. Чтобы доказать /36/, достаточно сравнить p-тую производную разложения $f(t)$ до степени $q - f^p(t) = \sum_{q'=0}^{q-p} f^{p+q'} t^{q'} + (f^{xq}(t))^p$ с разложением p-той производной $f^p(t)$, до степени $q-p$, если $q \ge p - f^p(t) =$

$= \sum_{q'=0}^{q-p} f^{p+q'} t^{q'} + f^{pxq-p}$, или с самой этой производной $p > q$, если $p>q$. Тогда /35/ записывается в виде

$$T(s,t) = s^{(m-m')k} f^{\,i-k\,x-1*}_{\ell m n-n'}(s,t)\, f^{\,kx\overline{j-k}*'}_{\ell m' n' - (m-m')j}(s,ts^{m-m'}).$$

Далее мажорирование сводится к мажорированию выражений типа /31/ - для остаточных сумм производных оно таково же, как и для исходных функций. /Следует учесть, что ввиду разложимости $f'_{\ell m'}$ по степеням t степень первого множителя $n-n'+(i-k)(m-m')$, а не $n-n'+(i-k-1)(m-m')$, какой бы получилась по общим правилам/. Этим доказательство в случае, когда $m>m'>0$ или когда $m>m'=0$, , но $f'_{\ell 0}(s,t')$ локализована, закончено.

Рассмотрим еще случай $m'=0$, не предполагая локализованности $f_{\ell 0}(s,t)$. Разложим

$$f'_{\ell 0}(s,t') = \tilde f'_{\ell 0}(s,t') + \underset{\sim}{f}'_{\ell 0}(s,t') \qquad (t' = x - x_\ell = ts^m). \quad /37/$$

При этом $\tilde f'_{\ell 0}(s,t')$ локализована, а $\underset{\sim}{f}'_{\ell 0}(s,t')$ такова, что функции $\hat f^{\,i}_{\ell 0}{}'(t')$, при помощи которых она мажорируется, равны нулю при $t=0$. Такое разложение возможно. В самом деле, пусть $q(t)$ - бесконечно дифференцируемая, возрастающая при $t<0$ и убывающая при $t>0$ функция, отличная от нуля только в конечном интервале $(-r,+r)$, которая равна 1 при $t=0$, а все ее производные при $t=0$ исчезают. Пример такой функции - /8/ в /3/. Тогда мы можем выбрать

$$\tilde f'_{\ell 0}(s,t') = f'_{\ell 0}(s,t')\, g(t');$$

$$\underset{\sim}{f}'_{\ell 0}(s,t') = f'_{\ell 0}(s,t')\,[1 - \dot q(t')].$$

Что обе эти функции мажорируемы, видно сразу - достаточно заменить $f'_{\ell 0}(t)$ на $f'_{\ell 0}(t')q(t')$, и соответственно, на $\hat{f}'_{\ell 0}(t')[1-q(t')]$. Дифференцируем $\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t')$:

$$\frac{d}{dt'}\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t') = \frac{d}{dt'}[\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t')]\, q(t') + \tilde{f}'_{\ell 0}(s,t')\frac{d}{dt'}q(t')$$

и находим

$$\left|\frac{d}{dt'}\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t')\right| \leqq \hat{o}'_{\ell 0}(s)\hat{f}^{1\prime}_{\ell 0}(t')q(t') + \hat{o}'_{\ell 0}(s)\hat{f}'_{\ell 0}(t')\left|\frac{d}{dt'}q(t')\right| \leqq$$

$$\leqq \hat{o}'_{\ell 0}(s)\hat{\tilde{f}}'_{\ell 0}(t'),$$

где $\hat{\tilde{f}}'_{\ell 0}(t') = \hat{f}^{1\prime}_{\ell 0}(t')q(t') + \hat{f}'_{\ell 0}(t')\left|\frac{d}{dt'}q(t')\right|$.

Аналогично доказывается мажорирование следующих производных функции $\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t')$, а также производных функции $f'_{\sim \ell 0}(s,t')$. Ввиду того, что функция $1-g(t)$ и все ее производные исчезают при $t'=0$, то из самого определения функций $\hat{f}^{i\prime}_{\sim \ell 0}(t')$ ясно, что все они будут исчезать при $t'=0$.

Видим, что произведение /17/ при $\ell=\ell'$ разлагается на

$$\tilde{f}''_{\kappa}(s,t) = f_{\ell m}(s,t)\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t'),$$

$$f''_{\sim\kappa}(s,t) = f_{\ell m}(s,t)f'_{\sim\ell 0}(s,t'). \qquad /38/$$

Функция $\tilde{f}''_{\kappa}(s,t)$ рассматривается по вышеуказанному способу, который имеет место и при $m'=0$, если $\tilde{f}'_{\ell 0}(s,t')$ локализована, а она такова и есть.

Покажем теперь, что $f''_{\sim\kappa}(s,t)$ представляет собой безразрывную регулярную компоненту бесконечной степени, т.е. она - представитель регулярной нелокализованной абсолютной нулевой функции. Ввиду того, что

мы относим $f''_{\kappa}(s,t)$ к регулярной компоненте результата, мы предпочтем здесь буквой t обозначить не $(x-x_{\ell})s^{-m}$, а $x-x_{\ell}$. Тогда

$$f''_{\sim\kappa}(s,t) = f_{\ell m}(s,ts^{-m})f'_{\sim\ell 0}(s,t) \qquad (t=x-x_{\ell}).$$

Наличие /и даже исчезновение/ производных у $f''_{\kappa}(s,t)$ при $t=0$ обеспечено исчезновением $f^{i\prime}_{\ell 0}(s,t)$ в этой точке. Остается доказать мажорирование. Имеем

$$|f''_{\sim\kappa}(s,t)| = |f_{\ell m}(s,ts^{-m})|.|f'_{\sim\ell 0}(s,t)| \leqq$$

$$\leqq \hat{o}_{\ell m}(s)\hat{f}_{\ell m}(ts^{-m})\hat{o}'_{\ell 0}(s)\hat{f}'^{0}_{\sim\ell 0}(t)\hat{f}'^{1}_{\sim\ell 0}(t). \qquad /39/$$

Здесь функция $f'_{\sim\ell 0}(t)$, задающая мажорирование $f'_{\sim\ell 0}(s,t)$, быстро исчезает при $t\to 0$. Она представима в виде $\hat{f}'^{0}_{\ell 0}(t)\hat{f}'^{1}_{\ell 0}(t)$, причем обе эти функции ограничены в любом конечном интервале и быстро исчезают при $t\to 0$, а $\hat{f}'^{0}_{\sim\ell 0}(t)$ быстро исчезает еще при $t\to\pm\infty$. Выберем число $c>0$ и разграничим три случая: I/ $t>c$, II/$t<-c$ и III/ $-c<t<c$.

В случае I мы выбираем $\hat{f}_{\ell m}(t')(t'=ts^{-m})$ монотонно убывающей при $t'>0$, что всегда возможно. Заменяем аргумент t на c, чем неравенство усилится, и находим

$$|f^{*\prime\prime}_{\sim\kappa}(s,t)| < \hat{o}''_{\sim\kappa}(s)\hat{f}''_{\sim\kappa}(t).$$

Здесь

$$\hat{f}''_{\sim\kappa}(t) = \hat{f}'^{1}_{\sim\ell 0}(t),$$

$$\hat{o}''_{\sim\kappa}(s) = \hat{o}_{\ell m}(s)\hat{o}'_{\sim\ell 0}(s)\hat{f}_{\ell m}(c.s^{-m})\hat{f}'^{0}_{\ell 0}. \qquad /40/$$

причем $\hat{f}'^{0}_{\ell 0}$ - супремум $\hat{f}'^{0}_{\ell 0}(t)$. Ввиду наличия множителя $\hat{f}_{\ell 0}(c.s^{-m})$ в /40/, очевидно, $\nu''_{\sim\kappa}=\infty$. С учетом /18/ мажорирование производных идет тем же самым образом.

Аналогично доказывается мажорирование в случае II.

Остается случай III/ $-c \leq t \leq c$. Ввиду /39/, можем писать

$$\hat{\underset{\sim}{o}}''_{\kappa}(s) = \sup_{-c \leq t \leq c} \hat{o}_{\ell m}(s)\, \hat{o}'_{\ell 0}\, \hat{f}_{\ell m}(ts^{-m})\, \hat{\underset{\sim}{f}}{}'^{0}_{\ell 0}(t),$$

$$\hat{\underset{\sim}{f}}{}''_{\kappa}(t) = \hat{\underset{\sim}{f}}{}'^{1}_{\ell 0}(t). \qquad /41/$$

Докажем, что при $s \to 0$ $\hat{o}''_{\kappa}(s)$ быстро исчезает. Для этой цели достаточно показать, что произведение $\hat{o}''_{\kappa}(s)\, s^{-nm}$ ограничено при любом $n = 1,2,3,\ldots$ Имеем

$$\hat{o}''(s)s^{-nm} \leq \hat{o}_{\ell m}(s)\, \hat{o}'_{\ell 0}(s) \sup_{-c \leq t \leq c} [(ts^{-m})^{n} \hat{f}_{\ell m}(ts^{-m})] \times$$

$$\times \sup_{-c \leq t \leq c} [t^{-n}\, \hat{\underset{\sim}{f}}{}'^{o}_{\ell_0}(t)].$$

Оба супремума ограничены, ввиду быстрого стремления $\hat{f}_{\ell m}(t')$ и $f'^{0}_{\ell 0}(t)$ к нулю при $t \to \pm\infty$ /В этом доказательстве опять использована идея И.Т.Тодорова, о которой упомянуто в /3/ при доказательстве теоремы 7/. Мажорирование производных устанавливается, как всегда, при помощи теоремы 2 в /3/ и формулы Лейбница /18/.

Перейдем к случаю γ: $\ell' \neq \ell$. Разграничим четыре подслучая: γ^{I}) $m, m' > 0$; γ^{II}) $m, m' = 0$; γ^{III}) $m > 0$, $m' = 0$; γ^{IV}) $m = 0$, $m' > 0$.

В случае γ' примем без ограничения общности $x_{\ell} < x_{\ell'}$. Обозначим $x_0 = \frac{1}{2}(x_{\ell} + x_{\ell'})$, $d = \frac{1}{4}(x_{\ell'} - x_{\ell})$. Вводим функции $\theta_{+}(t)$ и $\theta_{-}(t)$, повсюду бесконечно дифференцируемые, причем

$$\theta_{+}(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t \leq -d, \\ 1, & \text{при } t > d, \end{cases}$$

а в интервале $(-d, +d)$ возрастает, и

$$\theta_{-}(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } t \leq -d, \\ 0, & \text{при } t > d, \end{cases}$$

а в интервале $(-d, +d)$ убывает. При этом $\theta_{-} + \theta_{+} = 1$. Например,

$$\theta_{+}(d,t) = \frac{1}{Id} \int_{-\infty}^{t} \phi(d,\tau)d\tau, \qquad /42/$$

$$\theta_{-}(d,t) = \frac{1}{Id} \int_{t}^{\infty} \phi(d,\tau)d\tau, \qquad /43/$$

$$I = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-\tau^2}} d\tau, \quad \phi(d,\tau) = \begin{cases} e^{-\frac{d^2}{d^2-\tau^2}} & \text{при } |\tau| \leq d, \\ 0, & \text{при } |\tau| > d. \end{cases} \qquad /44/$$

Обозначим

$$f''_{\kappa-}(s,x) = \theta_{-}(d, x-x_0) f''_{\kappa}(s,x),$$

$$f''_{\kappa+}(s,x) = \theta_{+}(d, x-x_0) f''_{\kappa}(s,x),$$

$$f''_{\kappa}(s,x) = f''_{\kappa-}(s,x) + f''_{\kappa+}(s,x), \quad (\kappa = (\ell, m, \ell', m')).$$

Покажем, что при любых $\nu_{\ell m}$ и $\nu'_{\ell' m'}$ функции $f''_{\kappa-}(s,x)$ и $f''_{\kappa+}(s,x)$ являются локализованными функциями классов $F_{\ell 0}(s,t)$ и $F_{\ell' 0}(s,t)$, причем $\nu''_{\kappa-} = \nu''_{\kappa+} = \infty$ /По теор. 1 и 8 в /3/ мы можем отнести их к любым классам $F_{\ell m_0}$ и $F_{\ell' m_1}$, произвольно выбранными m_0 и m_1/. То, что $f''_{\kappa-}$ и $f''_{\kappa+}$ дифференцируемы за исключением точки x_{ℓ}, соответствующей $x_{\ell'}$, очевидно. Остается доказать мажорирование при $s < s''_0 = \min(s_0, s'_0)$.

Начнем с мажорирования $f''_{\kappa-}$. Ввиду /17/ и /42/,

$$|f''_{\kappa-}(s,x)| = \theta_-(d, x-x_\ell)|f_{\ell m}(s,x)||f'_{\ell' m'}(s,x)| \leqq$$

$$< \theta_-(d,x-x_0)\hat{o}_{\ell m}(s)\hat{f}_{\ell m}((x-x_\ell)s^{-m})\hat{o}'_{\ell' m'}(s)\hat{f}'_{\ell' m'}((x-x_{\ell'})s^{-m'}).$$

При этом примем, что $\hat{f}_{\ell m}(t)$ и $\hat{f}_{\ell' m'}(t)$ возрастают при $t<0$ и убывают при $t>0$. Тогда, ввиду того, что $\theta_-(d,x-x_0)=0$ при $x-x_0>d$, а при $x<x_0+d$ аргумент функции $\hat{f}'_{\ell' m'}$ отрицателен, мы можем заменить его наибольшим значением $x-x_0=d$, при котором функция $f''_{\kappa-}(s,x)$ не ноль - этим неравенство усилится. Заменим также убывающую при $t\to\pm\infty$ функцию $\hat{f}_{\ell m}((x-x_\ell)s^{-m})$ на $\hat{f}_{\ell m}((x-x\ )s_1^{-m})$. Получаем

$$|f''_{\kappa-}(s,x)| \leqq \theta_-(d,x-x_0)\hat{o}_{\ell m}(s)\hat{f}_{\ell m}((x-x_\ell)s_1^{-m}) \times$$

$$\times \hat{o}'_{\ell' m'}(s)\hat{f}'_{\ell' m'}(-d.s^{-m'}) = \hat{o}''_{\kappa-}(s).\hat{f}''_{\kappa-}(x),$$

$$\hat{o}''_{\kappa-}(s) = \hat{o}_{\ell m}(s)\,\hat{o}'_{\ell' m'}(s)\hat{f}'_{\ell' m'}(-d.s^{-m'}),$$

$$\hat{f}''_{\kappa-}(x) = \hat{f}_{\ell m}((x-x_\ell)s_1^{-m}). \qquad /45/$$

Функция $\hat{o}''_{\kappa-}(s)$, ввиду последнего множителя в /45/, стремится быстро к нулю. Это значит, что $\nu''_{\kappa-} = \infty$. Множитель $\hat{f}''_{\kappa-}(x)$ при $x\to\pm\infty$ также быстро стремится к нулю, ввиду того, что $\hat{f}_{\ell m}(t)$ обладает этим свойством, а оно не нарушается линейным преобразованием аргумента. Мажорирование производных осуществляется, если дифференцировать по Лейбницу /18/ трехкратное произведение, которое получим из /42/ и /17/. Тогда задача сводится к мажорации конечного числа членов подобной структуры. Этим показано, что

$f''_{\kappa-}$ принадлежит классу $F^*_{\ell_0}(x)$ с $\nu_{\ell_0}=\infty$. Аналогично доказывается, что /43/ принадлежит классу $F^*_{\ell' 0}(x)$ с $\nu''_{\ell' 0}=\infty$. Итак, по /44/ в случае γ^{I} произведение $f''_{\kappa}(s,x)$ сводится к сумме двух членов - типа $F_{\ell_0}(x)$ и $F_{\ell' 0}(x)$ с $\nu''_{\ell_0} = \nu''_{\ell' 0} = \infty$. .

Случай γ^{II} рассматривается аналогично. Произведение $f''_{\kappa}(s,x) = f_{\ell_0}(s,x-x_\ell)f_{\ell' 0}(s,x-x_{\ell'})$ тем же самым образом разлагается на $f''_{\kappa-}(s,x)$ и $f''_{\kappa+}(s,x)$. Эти функции регулярны и принадлежат классам $F_{\ell_0}(s,x)$, соответствующим $F_{\ell' 0}(s,x)$, однако их степени и точности, в общем, конечны:

$$\nu''_{\kappa-} = \nu''_{\kappa+} = \nu_{\ell 0} + \nu_{\ell' 0},$$

$$\nu^{*''}_{\kappa-} = \nu^{*''}_{\kappa+} = \min(\nu_{\ell 0} + \nu^{*'}_{\ell' 0}, \nu^*_{\ell 0} + \nu'_{\ell' 0}).$$

Сами компоненты находятся по правилу Коши.

Чтобы найти результат умножения в случае γ^{III}, воспользуемся разложением /37/ функции $f'_{\ell' 0}(s,x-x_{\ell'})$ около точки $t=x-x_\ell$. Значит, $\tilde{f}'_{\ell' 0}(s,t)$ локализована, а $\hat{\tilde{f}}''_{0}(x-x_{\ell'})$ исчезают при $x=x_\ell$. В соответствии с этим, как в случае β при $m'=0$, разлагаем $f''_{\kappa}(s,x)$ на $\tilde{f}''_{\kappa}(s,x-x_\ell)$ и $\tilde{f}''_{\kappa}(s,x)$ /38/. Обе эти функции исследуются как в случае β при $m'=0$. Первая из них является функцией типа $F_{\ell m}(s,t)$ /при $\nu''_{\ell m} = \nu_{\ell m} + \nu'_{\ell' 0}$ /. Покажем, что $\tilde{f}''_{\kappa}(s,x)$ принадлежит классу $F_{\ell' 0}(s,x)$ и при $\nu''_{\ell' 0}=\infty$. Прежде всего ясно, что у $\tilde{f}''_{\kappa}(s,x)$ и у ее производных не могут быть разрывы при $x=x_\ell$ - разрывы множителя $f_{\ell m}(s,(x-x_\ell)s^{-m})$ при $x=x_\ell$ сглажены функцией $\tilde{f}'_{\ell' 0}(s,x-x_{\ell'})$, которая вместе со своими производными исчезает при $x=x_\ell$. Но у $\tilde{f}_{\kappa}(s,x)$ и у ее производных могут быть разрывы при $x=x_{\ell'}$. Поэтому ее можно отнести только к некоторой из компонент, соответствующих особой точке $x=x_{\ell'}$. Мажорирование $f''_{\kappa}(s,x)$ доказывается, как в случае β, при $m'=0$, причем и здесь находим $\nu''_{\kappa}=\infty$. Тем самым видно, что она может быть отнесена к $F_{\ell' m}(s,x)$ при любом m, проще всего - к $F_{\ell' 0}(s,x)$ при $\nu_{\ell' 0}=\infty$. Случай γ^{IV}, конечно, рассматривается аналогично.

Мы указали, как найти индексы и коэффициенты разрывов в случае α, но мы не занимались этим вопросом в случаях β и γ - вопрос решается аналогично, тем более после того, как компоненты, т.е. их индексы и коэффициентные функции, найдены.

Теорема 12. Представители произведения определены однозначно и результат точен. Перфектность может нарушиться /когда ведущие коэффициентные функции равны нулю при некоторых t /.

Теорема 13. Умножение асимптотических функций коммутативно и ассоциативно. Дистрибутивность, как и при умножении чисел или чисел на функции, хотя и в порядке исключения, может нарушиться. Поэтому, а еще и потому, что само пространство асимптотических функций не линейно, а полулинейно, произведение двух асимптотических функций не билинейно , а следует назвать его полубилинейным.

Справедливость этих утверждений можно проверить по ходу изложенных выше построений.

Этим доказательство замкнутости множеств $F(x)$ по умножению закончено. В то же время дан способ получения параметров, индексов и коэффициентных функций результата. Но этот способ не очень удобен: множители $f(x)$ и $f'(x)$ имеют много компонент и поэтому число членов типа /17/, которые мы должны рассмотреть, очень велико. Дадим второй, более прямой способ получения результата. В дефиниционном равенстве

$$f''_0(s,x) + \sum_{\ell}\sum_{m} f''_{\ell m}(s,t_{\ell m}) =$$

$$=(f_0(s,x) + \sum_{\ell}\sum_{m} f_{\ell m}(s,t_{\ell m}))(f'_0(s,x)+\sum_{\ell}\sum_{m} f'_{\ell m}(s,t_{\ell m})) \qquad /46/$$

дадим переменной x некоторое фиксированное значение, отличное от x_ℓ. Каждая компонента превратится в последовательность типа /1/ в $^{/1/}$, причем все сингулярные компоненты будут быстро исчезать /при выбранном x /:

$$f''_0(s,x) + o^{\infty\prime\prime}(s,x) = (f_0(s,x) + o^{\infty}(s,x))(f'_0(s,x) + o^{\infty\prime}(s,x)).$$

Мы можем и не писать добавки типа $o^{\infty}(s,x)$, включая их в остаточные члены f_0 , f'_0 и f''_0, что всегда возможно. Получим

$$f''_0(s,x) = f_0(s,x) f'_0(s,x), \qquad /47/$$

т.е. сразу определяем регулярную компоненту результата. Видно, что она зависит только от регулярных компонент множителей. Очевидно, $\nu''_0 = \nu_0 + \nu'_0$, $\nu^{*\prime\prime}_0 = \min(\nu_0+\nu^{*\prime}_0, \nu^*_0+\nu'_0)$, а коэффициентные функции находятся по правилу Коши. Перепишем /46/ в виде

$$\sum_{\ell,m}^{LM''} f_{\ell m}(s,t_{\ell m}) = (\sum_{\ell,m}^{LM} f_{\ell m}(s,t_{\ell m}))(\sum_{\ell,m}^{LM'} f_{\ell m}(s,t_{\ell m})). \qquad /48/$$

При этом можем считать $LM'' = LM \cup LM'$, а $f_{\ell 0}(s,x-x_\ell)$ такие, что $f^{i}_{\ell 0}(x_{\ell'}-x_\ell) = 0$ при $\ell \neq \ell'$. Теперь сделаем в /48/ подстановку $x = x_\ell + st$, где x_ℓ - некоторая из особых точек, а t имеет фиксированное, отличное от нуля значение. С точностью до несущественных быстро исчезающих членов находим

$$f''_{\ell 0}(s,ts) + f''_{\ell 1}(s,t) =$$

$$= (f_{\ell 0}(s,ts) + f_{\ell 1}(s,t))(f'_{\ell 0}(s,ts) + f'_{\ell 1}(s,t)). \qquad /49/$$

С другой стороны, из /47/ с точностью до быстро исчезающих членов находим

$$f''_{\ell 0}(s,ts) = f_{\ell 0}(s,ts) f'_{\ell 0}(s,ts). \qquad /50/$$

Вычитаем /50/ из /49/ и находим

$$f''_{\ell 1}(s,t) = f_{\ell 1}(s,t)\cdot f'_{\ell 1}(s,t) + f_{\ell 1}(s,t)\cdot f'_{\ell 0}(s,ts) +$$

$$+ f_{\ell 0}(s,ts) f'_{\ell 1}(s,t). \qquad /51/$$

Степень и точность $f''_{\ell_1}(s,t)$ задаются через

$$\nu''_{\ell_1} = \min(\nu_{\ell_1} + \nu'_{\ell_1}, \nu_{\ell_1} + \nu'_{\ell_0}, \nu_{\ell_0} + \nu'_{\ell_1}),$$

$$\nu^{*\prime\prime}_{\ell_1} = \min(\nu_{\ell_1} + \nu^{*\prime}_{\ell_1}, \nu^{*}_{\ell_1} + \nu'_{\ell_1}, \nu_{\ell_0} + \nu^{*\prime}_{\ell_1}, \nu^{*}_{\ell_1} + \nu'_{\ell_0}).$$

Мы можем разложить все функции в правой части /51/ по s до степени, обеспечивающей указанную точность результата $\nu^{*\prime\prime}_{\ell_1}$. Коэффициентные функции разложений $f_{\ell_0}(s,ts)$ и $f'_{\ell_0}(s,ts)$ будут полиномы по t /в общем, различные при $t>0$ и $t<0$ /. Они помножены на быстро исчезающие при $t\to\pm\infty$ функции $f_{\ell_1}(s,t)$ и $f'_{\ell_1}(s,t)$, так что свойство быстрого исчезновения $f''_{\ell_1}(s,t)$ при $t\to\pm\infty$ не нарушается. Обобщая /47/, /49/ и /51/, при любом $m\in M_\ell$, получаем

$$\sum_{m'=0}^{m'} f''_{\ell m'}(s,ts^{m-m'}) =$$

$$= \left(\sum_{m'=0}^{m} f_{\ell m'}(s,ts^{m-m'})\right)\left(\sum_{m'=0}^{m} f'_{\ell m'}(s,ts^{m-m'})\right) \qquad /52/$$

и

$$f_{\ell m}(s,t) = f_{\ell m}(s,t)f'_{\ell m}(s,t) + f_{\ell m}(s,t)\sum_{m'=0}^{m-1} f'_{\ell m'}(s,ts^{m-m'}) +$$

$$+ f'_{\ell m}(s,t)\sum_{m'=0}^{m-1} f_{\ell m'}(s,ts^{m-m'}). \qquad /53/$$

Мы опять можем разложить $f_{\ell m'}$ и $f'_{\ell m'}$ $(m'\leq m)$ по степеням s и получим в явном виде коэффициентные функции $f''_{\ell mn}(t)$ компоненты $f''_{\ell m}$. Здесь мы подразумевали, что элементы множеств M_ℓ идут подряд: 1,2,3,.. m. Нетрудно обобщить результат на случай, когда M_{ℓ_0} имеют пробелы. Следует отметить, что все эти результаты имеют место при всех $\ell = 1,2,\ldots,L$, причем $f_{\ell''m''}$ зависит от $f_{\ell m}$ и $f'_{\ell' m'}$ только при $\ell=\ell'=\ell''$ и $m,m'\leq m''$.

5. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ НАД АСИМПТОТИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

Пусть $\tilde{\underline{F}}(s,x)$ - множество функционных последовательностей $\tilde{f}(s,x)$ типа $f(s,x)$, у которых все компоненты $\tilde{f}_{\ell m}(s,t)$ финитны: $\tilde{f}_{\ell m}(s,t)=0$, если $s>0, <s_0$ и $|t|>t_0$, причем s_0 и t_0 могут быть различны для различных функций $\tilde{f}(x)$ и для различных их представителей $\tilde{f}(s,x)$. /Они могут быть различны и для различных компонент $f_{\ell m}(s,t)$ $(m\in M_{\ell_0})$, но это несущественно, так как индексы ℓ и m пробегают конечные множества значений/. Эти условия затрагивают не только компоненты, но и остаточные члены, так что $\tilde{f}(x)$ являются не конкретизацией или разновидностью асимптотических функций $f(x)$, а скорее их аналогом или вариантом /хотя и не очень отличающимся от введенного/.

Функции $\tilde{f}(x)$ назовем пробными. Тогда мы можем сформулировать

Теорему 14. При любом выборе $f(x)\in\underline{F}(x)$ и $\tilde{f}(x)\in\tilde{\underline{F}}(x)$ интеграл

$$I = \int f(x)\tilde{f}(x)dx \qquad /54/$$

определен как асимптотическое число. Интегрирование по x подразумевается всегда от $-\infty$ до $+\infty$. Его представители

$$I(s) = \int f(s,x)\tilde{f}(s,x)dx \qquad /55/$$

получим, когда $f(s,x)$ и $\tilde{f}(s,x)$ пробегают классы представителей $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$.

В самом деле, из раздела 4 мы знаем, что произведение двух асимптотических функций дает опять асимптотическую функцию. А так как $\tilde{f}(s,x)$ финитны, то ясно, что функция

$$f'(x) = f(x)\tilde{f}(x)$$

с представителями

$$f'(s,x) = f(s,x)\tilde{f}(s,x)$$

будет также финитной. Остается показать, что интеграл финитных функций $f'(x)$ - асимптотическое число. Очевидно,

$$I(s) = \sum_{\ell,m}^{LM} I_{\ell m}(s), \qquad /56/$$

$$I_{\ell m}(s) = \int f'_{\ell m}(s, t_{\ell m})dx. \qquad /57/$$

Для остаточных сумм интегралов $I_{\ell m}(s)$ находим

$$I^*_{\ell mn}(s) = \int f^{*\prime}_{\ell mn}(s, t_{\ell m})dx. \qquad /58/$$

При $s \geqq s'_0 = \min(s_0, \tilde{s}_0)$ этот интеграл может не существовать. Тогда мы определяем его произвольно. При $s < s'_0$ он обязательно существует. В самом деле, если $s < s'_0$, то

$$|I^*_{\ell mn}(s)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} |f^{*\prime}_{\ell mn}(s, t_{\ell m})| dx \leqq$$

$$\leqq \hat{o}'_{\ell mn}(s) s^m \int_{-t_0}^{t_0} \hat{f}_{\ell mn}(t)dt.$$

И так как функции $\hat{f}_{\ell mn}(t)$ ограничены, ясно, что интеграл $I^*_{\ell mn}(s)$ существует и задает асимптотическое число степени $n+m$ и точности $\nu^{*\prime}_{\ell m} + m$. Именно чтобы обеспечить существование интегралов /58/, было введено условие мажорирования для представителей асимптотических функций. /Для остальных действий и в особенности для умножения достаточно было бы быстрого исчезновения $f_{\ell m}(s,t)$ при $t \to \pm\infty$ $(m \in M_\ell)$ /. Видно, что $I_{\ell m}(s)$ /57/ и $I(s)$ /56/ существуют и задают асимптотические числа степени $\bar{\nu}_{\ell m} = \nu'_{\ell m} + m$, соответствующие $\bar{\nu} = \min_{\ell,m}(\bar{\nu}_{\ell m})$ и точности $\bar{\nu}^*_{\ell m} = \nu^{*\prime}_{\ell m} + m$, соответственно $\nu^* = \min_{\ell,m}(\bar{\nu}^*_{\ell m})$.

Определение 6. Интегралы /54/ задают функционалы в пространстве финитных асимптотических функций $\tilde{f}(x)$, каждый из которых характеризуется асимптотической функцией $\tilde{f}(x)$. Мы назовем их асимптотическими, потому что I /54/ - асимптотические числа. Мы назвали их линейными, хотя иногда, в очень специальных случаях, аналогичных случаям, при умножении асимптотических чисел и асимптотических функций, дистрибутивность как по $\tilde{f}(x)$, так и по $f(x)$, может нарушиться.

Не будем показывать в явном виде, как индексы и коэффициенты результата /54/ выражаются через параметры, индексы и коэффициентные функции аргументов $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$: в принципе ответ ясен ввиду формул для интегрирования /56/ и /57/ и для умножения асимптотических функций /разд. 4/. Дадим только перечень типов членов, которые могут получиться.

Случай α /разд. 4/ ведет к членам типа

$$I_\lambda(s) = \int f_{\ell mn}(t_{\ell m}) s^n \tilde{f}_{\ell m \tilde{n}}(t_{\ell m}) s^{\tilde{n}} dx =$$

$$= s^{m+n+\tilde{n}} \int f_{\ell mn}(t) \tilde{f}_{\ell m \tilde{n}}(t)dt \quad (\lambda = (\ell, m, n, \tilde{n})). \qquad /59/$$

Следовательно, в этом случае коэффициенты I_λ будут регулярными функционалами - интегралами произведений коэффициентных функций из $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ с одинаковыми значениями ℓ и m.

Случай β /разд. 4/ ведет к членам типа

$$I_\lambda(s) = \int f_{\ell mn}(t \quad) s^n \tilde{f}_{\ell \tilde{m} \tilde{n}}(t_{\ell \tilde{m}}) s^{\tilde{n}} dx \quad (\lambda = (\ell, m, n, \tilde{m}, \tilde{n})).$$

Если введем моменты

$$M^i_{\ell mn} = \int t^i f_{\ell mn}(t)dt,$$

$$M^{i+}_{\ell mn} = \int_0^\infty t^i f_{\ell mn}(t)dt, \qquad /60/$$

$$M^{i-}_{\ell mn} = \int_{-\infty}^0 t^i f_{\ell mn}(t)dt,$$

и если $f^{i\mp}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}$ - деленные на $i!$ левые и правые производные функции $\widetilde{f}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}(t)$ при $t\to 0$, то при $m>\widetilde{m}$ получаем

$$I_\lambda(s) = s^{m+n+\widetilde{n}} \int f_{\ell mn}(t)\widetilde{f}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}(ts^{m-\widetilde{m}})dt =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} s^{m+n+\widetilde{n}+(m-\widetilde{m})i} \left(\widetilde{f}^{\,i+}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}} M^{i+}_{\ell mn} + \widetilde{f}^{\,i-}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}} M^{i-}_{\ell mn}\right). \quad /61/$$

Эта формула - асимптотическая: сходимость не предполагается /тем не менее, сумма определена по /5/ в /1/ /. Формула справедлива с точностью до членов, которые быстро исчезают при $s\to 0$ и не имеют значения, так как относятся к остаточному члену $I_\lambda(s)$. Собственно, если хотя бы одна из точностей $\nu^*_{\ell m}$ или $\widetilde{\nu}^*_{\ell m}$ конечна, то ряд обрывается до $\nu^* = \min(\nu_{\ell m} + \widetilde{\nu}^*_{\ell m}, \nu^*_{\ell m} + \widetilde{\nu}_{\ell m})$, так что вопрос о сходимости и не возникнет. Если производная $\widetilde{f}^{(i)}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}(t)$ непрерывна при $t=0$, то вместо выражения в скобках в /61/ мы можем писать просто $\widetilde{f}^{\,i}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}} M^{i}_{\ell mn}$.

Аналогично рассматривается случай $\widetilde{m}>m$. Вместо /61/ получим

$$I_\lambda(s) = \sum_i s^{m+n+\widetilde{n}+(\widetilde{m}-m)i} \left(f^{i+}_{\ell mn}\widetilde{M}^{i+}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}} + f^{i-}_{\ell mn}\widetilde{M}^{i-}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}\right). \quad /62/$$

Если $f^{i}_{\ell mn}$ непрерывна, то вместо выражения в скобках будем иметь просто $f^{i}_{\ell mn}\widetilde{M}^{i}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}$. Видим, что в случае β при $m>\widetilde{m}$ коэффициенты $\widetilde{I}_\lambda$ являются суммами произведений значений производных $f^{(i)}_{\ell mn}(t)$ при $t\to\pm 0$ на левые и правые моменты $M^{i\pm}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}$ коэффициентных функций $f_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}(t)$, причем порядок момента всегда совпадает с порядком производной, на которую он умножен. При $\widetilde{m}>m$ появляются производные от $f_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}(t)$, умноженные на моменты от $\widetilde{f}_{\ell\widetilde{m}\widetilde{n}}(t)$.

В случае γ, если m или $\widetilde{m}\neq 0$, результат задается быстро исчезающей последовательностью $I_\lambda(s)$ (λ =

$= (\ell; m, n, \widetilde{\ell}, \widetilde{m}, \widetilde{n})$). Если $m=\widetilde{m}=0$, то, несмотря на значения ℓ и $\widetilde{\ell}$, результат подсчитывается как в случае α /при $m=\widetilde{m}=0$ /. При этом в качестве интеграционной переменной берем x /которая появится через $t_{\ell 0} = x - x_\ell$ и $t_{\widetilde{\ell}0} = x - x_{\widetilde{\ell}}$ /. В этом случае более удобно не расчленять $f_0(s,x)$ и $\widetilde{f}_0(s,x)$ на $\sum_\ell f_{\ell 0}(s, x-x_\ell)$, а соответственно, и на $\sum_{\widetilde{\ell}} \widetilde{f}_{\widetilde{\ell}0}(s, x-x_{\widetilde{\ell}})$. Тогда вместо $L.\widetilde{L}$ членов $\int f_{\ell 0}(s,t_{\ell 0})\widetilde{f}_{\widetilde{\ell}0}(s,t_{\widetilde{\ell}0})dx$ будет только один $\int f_0(s,x)\widetilde{f}_0(s,x)dx$. Следовательно, в случае γ I_λ сказывается на I только при $m=\widetilde{m}=0$. Тогда результат имеет вид, как в случае α /при $m=\widetilde{m}=0$ /.

Видим, что выражения типа /54/, где $f(x)$ любая, а $\widetilde{f}(x)$ - финитная асимптотические функции, имеют смысл - они задают асимптотические числа. Подобное свойство имеют обобщенные функции Соболева - Шварца /2/. Выражения типа

$$c = \int \phi(x)u(x)dx \quad /63/$$

тоже имеют смысл, причем здесь $\phi(x)$ - обобщенная функция, $u(x)$ - обычная финитная функция, а c - обычное число. Поэтому /54/ и /63/ могут служить как бы мостом для сравнения асимптотических функций с обобщенными, а следовательно, и с обычными, которые /по крайней мере - интегрируемые/ содержатся среди обобщенных функций. Такой же вопрос можно ставить и для чисел, и там ответ задается условием изоморфного отображения. Обычные числа a имеют два асимптотических аналога - с представителями

$$a(s) = a + a^*(s)$$

при $\nu^* = 0$ и $\nu^* = \infty$. Легко проверить, что оба эти множества замкнуты по всем алгебраическим действиям. /Мы могли бы взять и любое конечное $\nu^*>0$, но тогда будет одно нарушение замкнутости: умножение ноль 0^{ν^*} на ноль 0^{ν^*} дает не тот же самый ноль, а ноль более высокой точности $0^{2\nu^*}$ /. Условие изоморфизма менее удобно для сравнения асимптотических функций с обобщенными, потому что соответствие далеко не взаимно однозначно, а круги допустимых действий для обоих типов функций слишком различны. Мы предпочтем сравнивать их на базе /54/ и /63/.

Определение 7. Будем говорить, что класс $F_0(x)$ асимптотических функций $f(x)$ - асимптотический аналог некоторого класса $\Phi_0(x)$ обычных функций $\phi(x)$ /рассматриваемых как обобщенные/, если, выбирая в качестве $\tilde{f}(x)$ любую финитную функцию среди $F_0(x)$ /этот класс обозначим через $\tilde{F}_0(x)$ /, /54/ дает обычное число, точнее - один из двух асимптотических аналогов этих чисел. При этом потребуем, чтобы самая простая функция $f(x) = a$ /обычная константа/ с представителями $f(s, x) = a + f^*(s, x)$ при $\nu^* = 0$ или $\nu^* = \infty$ находилась среди $F_0(x)$.

Теорема 15. Все бесконечно дифференцируемые обычные функции $f(x)$ и только они имеют асимптотические аналоги с представителями

$$f(s, x) = f_{00}(x) + f_0^*(s, x) \qquad \text{при} \quad f_{00}(x) = f(x), \quad \text{т.е.}$$

$$f(x,x) = f(x) + f_0^*(s,x), \qquad \text{при} \quad \nu_0^* = 0 \quad \text{или} \quad \nu_0^* = \infty.$$

Если бы мы не ставили требование, чтобы константа входила в $F_0(x)$, обычные функции имели бы и другие аналоги с представителями

$$f(s, x) = s^{-m/2} f_{\ell m}((x - x\ )s^{-m})$$

при любом x_ℓ и любом четном m. В расширенном множестве асимптотических функций /определение 13 в /1/ / требование четности m выпадает - аналогия имела бы место при любом дробном m.

Определение 8. Будем говорить, что асимптотическая функция $f(x)$ является аналогом обобщенной функции $\phi(x)$, если бы при выборе $\tilde{f}(x)$ из $\tilde{F}_0(x)$ как аналоге $u(x)$, значение функционала /54/ представляло собой обычное асимптотическое число I - аналог значения интеграла /63/ /при указанном $u(x)$ /. Точность контрольной функции $\tilde{f}(x)$, а также и точность самого функционала I могут быть 0 или ∞,, и, в соответствии с этим,

получим три типа асимптотических аналогов обобщенных функций: $\nu_{\ell m}^* = -m, \tilde{\nu}^* = 0$; $\nu_{\ell m}^* = \infty, \tilde{\nu}^* = 0$; $\nu_{\ell m}^* = \infty, \tilde{\nu}^* = \infty$. Комбинация $\nu_{\ell m}^* = -m$, $\tilde{\nu}^* = \infty$ невозможна. /Через "-" обозначаем индексы функционала I /.

Ясно, что при таком выборе $\tilde{f}(x)$ случай $\tilde{m} > m$, а следовательно, и результаты типа /63/ невозможны, и /54/ всегда будет задавать асимптотическое число, коэффициенты которого будут линейными комбинациями из регулярных функционалов над $\tilde{f}(x)$ типа /59/ при $m = 0$ и из значений функции $\tilde{f}(x)$ и ее производных при $x = x_\ell$: $\tilde{f}^{\,i}(x_\ell)$. Отсюда видно, что: а/ кроме обычных бесконечно дифференцируемых функций только функции Дирака и их производные могут иметь асимптотические аналоги; б/ необходимым условием для того, чтобы функция $f(x)$ являлась асимптотическим аналогом некоторой обобщенной функции в варианте $\nu_{\ell m}^* = \infty$, $\tilde{\nu}^* = \infty$ - это, чтобы точности всех ее компонент были бесконечны: $\nu_0^* = \nu_{\ell m}^* = \infty$. В вариантах с $\nu^* = 0$ можем ограничиться точностями ν_0^* и $\nu_{\ell m}^*$, которые ведут к $\tilde{\nu}^* = 0$. Нет необходимости рассматривать функции с более высокими точностями, так как их представители будут подмножествами представителей этих функций.

Найдем все асимптотические функции, которые могут представлять асимптотические аналоги некоторых обобщенных функций в варианте $\nu_{\ell m}^* = \infty$, $\tilde{\nu}^* = 0$. Этот вариант - технически самый простой, но и самый благоприятный, так как множества представителей асимптотических аналогов будут самыми обширными. Это видно из общих соображений - что если в данной задаче требования /выбор $\tilde{f}(s, x)$ / самые ограниченные, а множество допустимых результатов $(I(s))$ - самое широкое, то множество решений будет самое богатое. Из /55/ при

$$\tilde{f}(s, x) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}^*(s, x), \qquad \tilde{\nu}^* = \infty$$

/ $\tilde{f}(x)$ - финитная/ находим

$$I(s) = \int f(s, x)\, \tilde{f}(x)\, dx. \qquad /65/$$

Нет необходимости включать остаточный член $f_0^*(s, x)$, так как он затрагивает только остаточный член $I^*(s)$ и при этом вызываемое им изменение быстро исчезает, так что оно несущественно. Каждой компоненте $f(s, x)$ соответствует один член в $I(s)$:

$$I(s) = I_0(s) + \Sigma I_{\ell m}(s)\,, \qquad /65/$$

$$I_0(s) = \int f_0(s, x)\tilde{f}(x)dx\,, \qquad /66/$$

$$I_{\ell m}(s) = \int f_{\ell m}(s,x)\tilde{f}(x)dx\,. \qquad /67/$$

Сначала поищем асимптотические аналоги обобщенных функций в рамках одной отдельной компоненты $f_0(s,x)$ или $f_{\ell m}(s, i_{\ell m})$.

Подставляя /14/ [1] в /66/, находим

$$I_0(s) = \sum_{n=\nu_0}^{\nu_0^*} I_{0n}\, s^n + I_0^*(s)\,,$$

$$I_{0n} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{0n}(x) f(x)dx\,.$$

Видим, что коэффициенты асимптотического числа I_0 являются линейными функционалами над $\tilde{f}(x)$, представимыми в виде интегралов, ядрами которых служат коэффициентные функции регулярной части функции $f(x)$.

Теорема 16. Чтобы последовательность $I_0(s)$ задавала асимптотические аналоги обычного числа точности $\nu^* = 0$, необходимо и достаточно иметь $\nu_0 = \nu_0^* = 0$, т.е.

$$f(s,x) = f_{00}(x) + f_0^*(s,x) \qquad (\nu_0^* = 0)\,.$$

Тогда

$$I_0(s) = \int f_{00}(x)\tilde{f}(x)dx + I_0^*(s) \qquad (\nu^* = 0)\,.$$

Справедливость этого утверждения вытекает из вышеприведенного функционала $I(s)$ в общем случае.

Подставляем также /13/ [1] в /67/ и получаем

$$I_{\ell m}(s) = \sum_{\bar{n}=\bar{\nu}_{\ell m}}^{\bar{\nu}^*_{\ell m}} I_{\ell m\bar{n}}\, s^{\bar{n}} + I^*_{\ell m}(s)\,,$$

$$\bar{\nu}_{\ell m} = \nu_{\ell m} + m\,, \quad \bar{\nu}^*_{\ell m} = \nu^*_{\ell m} + m\,, \qquad /68/$$

$$I_{\ell m\bar{n}} = \sum_{i=0}^{\bar{i}_{\bar{n}}} M^{i}_{\ell, m, \bar{n}-m(i+1)} \tilde{f}^{i}(x_\ell)\Big(\bar{i}_{\bar{n}} = \Big[\frac{\bar{n} - \tilde{\nu}_{\ell m}}{m}\Big]\Big)\,. \qquad /69/$$

Видим, что коэффициенты асимптотического числа $I_{\ell m}$ являются линейными комбинациями значений функции $\tilde{f}(x)$ и ее /деленных на $i!$ / производных $\tilde{f}^{i}(x)$ при $x = x_\ell$ до порядка $i_{\bar{\nu}^*_{\ell m}}$. Коэффициентами этой комбинации служат моменты $M^{i}_{\ell m\bar{n}-m(i+1)}$. /Левых и правых моментов $M^{i\pm}_{\ell mn}$ не возникает, так как функция $\breve{f}(s, x)$ - однокомпонентна и поэтому не может иметь разрывов/.

Теорема 17. Чтобы последовательности $I_{\ell m}(s)$ задавали асимптотический аналог обычного числа точности $\bar{\nu}^* = 0$, необходимо и достаточно: 1/ при некотором $i \geq 0$ иметь $\nu^*_{\ell m} + m(i+1) = 0$; 2/ при этом i иметь $\nu_{\ell m} + m(i+1) \leq 0$; 3/ иметь $M^{j}_{\ell mn} = 0$, если $n = n + m(j+1) < 0$. Тогда

$$I_{\ell m}(s) = \sum_{j=0}^{i} M^{j}_{\ell m, -m(j+1)} \tilde{f}^{j}(x_\ell) + I^*_{\ell m}(s)\,, (\bar{\nu}^*_{\ell m} = 0)\,,$$

т.е. $I_{\ell m}(s)$ является асимптотическим аналогом линейной комбинации значений функции $f(x)$ и ее /деленных на $i!$ / производных $\tilde{f}^{i}(x)$ при $x = x_\ell$.

Отметим, что условие 2 следует из условия 1, за исключением случая $\nu_{\ell m} = \nu^*_{\ell m} + \epsilon$, т.е. когда $f_{\ell m}(s,x)$ - асимптотический ноль. Это значит, что условие 2 исключает случай, когда $f_{\ell m}(s, t_{\ell m})$ представляет асимптотический ноль.

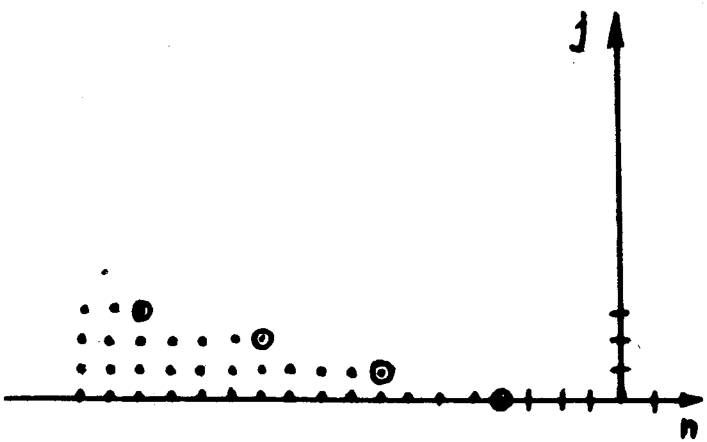

Рис. 3

Отсюда ясно, что если мы потребуем, чтобы при некотором $k \geq 0$, $\leq i$ имели $M^i_{\ell,m,-m(k+1)} = 1$, а все остальные $M^j_{\ell m,-m(k+1)} = 0$, то компонента $f_{\ell m}(s,t_{\ell m})$ уже будет представлять асимптотический аналог k-той производной функции Дирака $\delta(x-x_\ell)$.

На *рис. 3* в плоскости n,j точками представлены моменты $M^j_{\ell mn}$, которые необходимо аннулировать, а кружками - те, которые остаются и дают коэффициенты перед деленными на j! производными $\tilde{f}^{\,j}(x_\ell)$. В данном случае: $m=4$, $j=3$, $\nu_{\ell m}=-18$.

Видим, что функция Дирака $\delta(x-x_\ell)$ и каждая ее производная $\delta^{(k)}(x-x_\ell)$ даже в рамках одной сингулярной компоненты имеет много асимптотических аналогов. Каждый из них задается своими индексами $i \geq k$ и $\nu_{\ell m} \leq -m(i+1)$ /кроме ℓ и m /. Этим исчерпываются все асимптотические аналоги обобщенных функций, задаваемые однокомпонентными представителями. Чтобы получить самый общий случай, достаточно сообразить, что коэффициенты перед отрицательными степенями s в $I(s)$ /64/ всегда являются линейными комбинациями $\tilde{f}^{\,i}(x_\ell)$, но в общем случае перед ними будут стоять уже не отдельные моменты $M^i_{\ell mn}$, а некоторые их суммы, члены которых соответствуют различным значениям m. Именно эти суммы уже должны быть нулем.

Теорема 18. Самые общие условия, при которых асимптотическая функция может быть аналогом некоторой линейной комбинации функций Дирака $\delta(x-x_\ell)$ и их производных $\delta^k(x-x_\ell)$, следующие:

1/ хотя бы при одном $\ell = 1,2,\dots,L$ подмножество значений m из M_ℓ, при которых $\nu_{\ell m} \leq \nu^*_{\ell m}, -m$, непустое. Обозначим через $\bar{L}$ и $\bar{M}_\ell$ эти множества значений ℓ и m;

2/ при всех $\ell \in \bar{L}$ и $m \in \bar{M}_\ell$ имеем $\nu^*_{\ell m} + m = 0$;

3/ при всех $\ell \in \bar{L}$, $\bar{n} < 0$ и $i > 0$ имеем $\sum_m M^i_{\ell m\bar{n}-m(i+1)} = 0$.

При этом суммирование ограничивается по значениям $m \in M_\ell$, для которых $\nu_\ell \leq \bar{n} - m(i+1)$.

Тогда соответствующая асимптотическая функция имеет вид

$$f(s,x) = \sum_{\ell}^{\bar{L}} \sum_{m}^{\bar{M}_\ell} \left(\sum_{n=\nu_{\ell m}}^{\nu^*_{\ell m}} f_{\ell mn}(t)s^n + f^*_{\ell m}(s,t)\right) \quad (\nu^*_{\ell m} = -m),$$

причем индексы $\nu_{\ell m}$ и $\nu^*_{\ell m}$ и моменты коэффициентных функций $f_{\ell mn}(t)$ удовлетворяют условиям 1-3, а функционал /67/ задается через

$$I_{\ell m}(s) = \sum_{\ell}^{\bar{L}} \sum_i \sum_m M^i_{\ell,m,-m(i+1)} \tilde{f}^i(x_\ell) + o^\circ(s),$$

где суммирование по m производится по всем значениям m, для которых $\nu_{\ell m} \leq -m(i+1)$. Индексу i достаточно дать только значения, при которых не все $M^i_{\ell,m,-m(i+1)} = 0$, например, такие, при которых хотя бы при одном m имеем $\nu_{\ell m} \leq -m(i+1)$.

В результате некоторых действий /сложения, дифференцирования/ асимптотические аналоги δ-функции и ее производных переходят в функции того же типа, но в других случаях /интегрирования, умножения/ получаются опять асимптотические функции, но они могут не быть аналогами комбинаций из δ-функций и их производных. Видно также, что каждой δ-функции и каждой ее производной соответствует огромное множество аналогичных им асимптотических функций. Все они ведут к одним и тем же значениям функционала /63/. Некоторые действия /сложение, дифференцирование, интегрирование/ ведут к результатам, которые сохраняют это свойство, но другие /умножение/ - нет.

К вопросу сопоставления асимптотических функций с обобщенными мы можем подойти, не только сравнивая соответствующие функционалы над обычными контрольными функциями, а с более общей точки зрения, сравнивая классы последовательностей, которыми представлены каждая асимптотическая и каждая обобщенная функция. К этому вопросу мы вернемся в следующей работе. Там будут даны еще некоторые действия, которые можно произвести над асимптотическими функциями, а также сравнения их с другими известными обобщениями понятия функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. ОИЯИ, Р5-11102, Дубна, 1977.*
2. *Schwartz L. Theorie des Distributions, Paris, vol. 1, 1950; vol. 2, 1951.*
3. *Христов Хр.Я., Дамянов Б.П. ОИЯИ, Р5-11103, Дубна, 1977.*
4. *Христов Хр.Я., Тодоров Т.Д. Serdica, Bulgaricae Mathematicae publicationes, vol. 2, 1976, 87-102.*

Рукопись поступила в издательский отдел
1 февраля 1978 года.