ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P5 - 11251

Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО КВАДРАТАМ РЕШЕНИЙ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

1978

P5 - 11251

Е.Х.Христов

О РАЗЛОЖЕНИЯХ ПО КВАДРАТАМ РЕШЕНИЙ РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Направлено в "Болгарский физический журнал"

Христов Е.Х. Р5 - 11251

О разложениях по квадратам решений радиального уравнения Шредингера

Получены формулы обращения для разложения по квадратам решений краевой задачи

$$y'' + (k^2 - u(x))\,y = 0, \quad 0 \le x < \infty, \quad y(0,k) = 0,$$

которые позволяют построить некоторые способы обращения в теории возмущения данных рассеяния этой задачи.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1978

Christov E.Ch. P5 - 11251

On Expansions by Squares of Solutions of Radial Schrödinger Equation

There are proved expansion theorems for squares of the solutions of the eigenvalue problem

$$y'' + (k^2 - u(x))\,y = 0, \quad 0 \le x < \infty, \quad y(0,k) = 0,$$

which leed to some inversion methods in the perturbation theory for scattering data of this problem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1978

ВВЕДЕНИЕ

В §1 настоящей работы получена формула обращения для разложений по квадратам решений краевой задачи

$$y'' + (k^2 - u(x))\,y = 0, \quad 0 \le x < \infty. \qquad /1/$$

$$y(0,k) = 0, \qquad /2/$$

где вещественная измеримая функция $u(x)$, далее называемая потенциал, удовлетворяет неравенству

$$\int_0^\infty (1+x)\,|u(x)|\,dx < \infty. \qquad /3/$$

В §§2,3 показано, что отсюда вытекают некоторые способы обращения в теории возмущения данных рассеяния задачи /1/, /2/, в частности, известные формулы Ньютона /[1] гл. 20/, Йоста и Кона[3,4]. Искомые разложения получены с помощью метода контурного интегрирования[4] в краевой задаче

$$A[Y] \equiv -Y''' + 4u(x)\,Y' + 2u'(x)\,Y = 4k^2\,Y', \quad 0 \le x < \infty,$$

$$Y(0,k) = Y'(0,k) = 0, \qquad /4/$$

решение которой $Y(x,k) = y^2(x,k)$, где $y(x,k)$ - решение задачи /1/, /2/. Рассмотрен также случай краевого условия $y'(0,k) - h\,y(0,k) = 0$.

В работе Барселона [5] сходным методом были найдены формулы разложения по произведениям решений двух задач Штурма-Лиувилля на конечном интервале. Другой подход к этой задаче, основанный на технике операторов преобразования, был предложен Левитаном [6]. Аналогичный круг вопросов для одномерной системы Дирака на всей оси $-\infty < x < \infty$ изучался Каупом [7,8].

§1. Обозначим $f(x,k)$ решение уравнения /1/, определяемое условием $\lim f(x,k)\exp(-ikx) = 1$ при $x\to\infty$, $\phi(x,k)$ -условиями $\phi(0,k)=0, \phi'(0,k)=1$ и

$$f(k)=f(0,k)=W\{f(x,k),\phi(x,k)\}\equiv f\phi'-f'\phi, (\mathrm{Im}\, k\geq 0) \qquad /1.1/$$

функцию Йоста задачи /1/, /2/. При условии /3/ спектр самосопряженного в $L^2(0,\infty)$ дифференциального оператора /1/, /2/ непрерывен при $k^2>0$ и состоит из конечного числа простых собственных чисел $\lambda_j=k_j^2$, $j=1,\dots,N$, определяемых нулями $k_j=i\kappa_j$, $\kappa_j>0$, функции $f(k)$ при $\mathrm{Im}\, k>0$. Для любой функции $h(x)\in L^2(0,\infty)$ имеет место формула разложения

$$h(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \phi(h;k)\phi(x,k)|f(k)|^{-2}k^2\,dk+\sum_{j=1}^N C_j\,\phi(h;k_j)\phi(x,k_j),$$

$$\phi(h;k)=\int_0^\infty h(x)\phi(x,k)\,dx, \qquad /1.2/$$

где нормировочные постоянные

$$C_j=\{\int_0^\infty \phi^2(x,k_j)\,dx\}^{-1}=-2k_j f'(0,k_j)\dot f_j^{-1}, (\dot f_j=\frac{df(k)}{dk}|_{k=k_j}), \qquad /1.3/$$

а интегралы в /1.2/ сходятся в метриках $L^2(0,\infty)$ и $L^2\{(0,\infty); k^2|f(k)|^{-2}dk\}$ соответственно. Доказательства этих хорошо известных предложений вместе с используемыми далее без ссылок свойствами функций $f(x,k)$, $\phi(x,k)$ и $f(k)$ содержатся, например, в [1,9]. В этом параграфе покажем, что имеет место следующая основная

Теорема 1. Пусть вещественный потенциал $u(x)$ удовлетворяет условию /3/, $f(0)\neq 0$ и по квадратам решений $\phi(x,k)$, порождающих /1.2/, построена система функций

$$\Phi(x,k)=k\phi^2(x,k), \quad \Phi_j(x)=\Phi(x,k_j),$$

$$\dot\Phi_j(x)=\partial\Phi(x,k)/\partial k|_{k=k_j}. \qquad /1.4/$$

Тогда, если

$$\Phi(h;k)=\int_0^\infty h(x)\Phi(x,k)\,dx, \quad \Phi_j(h)=\int_0^\infty h(x)\Phi_j(x)\,dx,$$

$$\dot\Phi_j(h)=\int_0^\infty h(x)\dot\Phi_j(x)\,dx \qquad /1.5/$$

коэффициенты разложения функции $h(x)$, для которой выполнено /3/ по этой системе, то при любом $x>0$ справедлива формула обращения

$$H(x)\equiv\int_x^\infty h(t)\,dt=\lim_{R\to\infty}\frac{4}{\pi}\int_0^{R}\tilde\Phi(H;k)\,\mathrm{Im}\{f^{-2}(k)F(x,k)\}dk$$

$$-\sum_{j=1}^N\{A_j[\dot{\tilde\Phi}_j(H)F_j(x)+\tilde\Phi(H)\dot F_j(x)]-B_jA_j^2\tilde\Phi_j(H)F_j(x)\}, \qquad /1.6/$$

где

$$\tilde\Phi(H,k)\overset{\mathrm{def.}}{=}\int_0^\infty H(x)\,\Phi'(x,k)\,dx=\Phi(h;k),$$

$$\tilde\Phi_j(H)=\Phi_j(h), \quad \dot{\tilde\Phi}_j(H)=\dot\Phi_j(h), \qquad /1.7/$$

$$F(x,k)=f^2(x,k), \quad F_j(x)=F(x,k_j),$$

$$\dot F_j(x)=\partial F(x,k)/\partial k|_{k=k_j}, \qquad /1.8/$$

а

$$A_j^{-1} = [\,\Phi_j\,,\dot F_j\,] \overset{\text{def.}}{=} \int \Phi_j(x)\,\dot F_j{}'(x)\,dx = -[\,\dot F_j\,,\Phi_j\,]$$

$$=[\,\dot\Phi_j\,,F_j\,] = -[\,F_j\,,\dot\Phi_j\,] = 4^{-1}\dot f_j^{\,2}\,,$$

$$B_j = [\,\dot\Phi_j\,,\dot F_j\,] = -[\,\dot F_j\,,\dot\Phi_j\,] = 4^{-1}\ddot f_j\,\dot f_j\,. \qquad /1.9/$$

Интегралы /1.5/ сходятся абсолютно, а если обозначить $H_R(x)$ правую часть равенства /1.6/ при $R<\infty$, то равномерно по $0\le x<\infty$ при $R\to\infty$

$$H_R(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2R}\{\int_0^{\infty} H(y)\sin ky\,dy\}\sin kx\,dk + O(R^{-1})\,. \qquad /1.10/$$

Доказательство. Построим функцию

$$Q(x,k) = \int_0^{\infty} h(y)\,G(x,y,k)\,dy\,, \qquad (\mathrm{Im}\,k\ge 0), \qquad /1.11/$$

где $h(x)$ удовлетворяет /3/, а

$$G(x,y,k) = \begin{cases} f^{-2}(k)[-\phi^2(x,k)\,f^2(y,k) \\ +2\phi(x,k)\,f(x,k)\,\phi(y,k)\,f(y,k), & x\le y<\infty\,, \\ f^{-2}(k)\,f^2(x,k)\,\phi^2(y,k)\,, & 0\le y\le x\,. \end{cases} \qquad /1.12/$$

Рассмотрим интеграл

$$I_{R,\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma k\,Q(x,k)\,dk\,, \qquad /1.13/$$

где контур интегрирования γ проходит вдоль действительной оси k от $-R$ до $+R$, обходя точку $k=0$ в полуплоскости $\mathrm{Im}\,k>0$ по полуокружности $\gamma_\epsilon = \epsilon\exp[\,i(\pi-\theta)\,]$, $0\le\theta\le\pi$, $\epsilon<\min|k_j|$ и замыкается полуокружностью $\gamma_R = R\exp(i\theta)$, $0\le\theta\le\pi$, $R>\max|k_j|$. Отметим, что если потенциал $u(x)$ непрерывно дифференцируем, то функция $G(x,y,k)$ определяет функцию Грина сопряженной к задаче /4/ краевой задачи $A[Y] = 4k^2Y'$, $0\le x<\infty$, $Y(0,k)=0$.

Проще изучить $I_{R,\epsilon}(x)$ непосредственно на основе представления /1.12/. Так как при любом $x>0$ решение $\phi(x,k)$ есть целая, четная функция от k, а решение $f(x,k)$ вместе с функцией Йоста $f(k)$ - аналитические при $\mathrm{Im}\,k>0$ непрерывные на вещественной оси функции и, в силу оценок:

$$|k^n\phi(x,k)| \le x^{n-1}\exp\{\mathrm{Im}\,kx + \int_0^x t\,|u(t)|\,dt\}, \quad n=0,1;\ \mathrm{Im}\,k\ge 0,$$

$$|f(x,k)| \le \exp\{-\mathrm{Im}\,kx + \int_x^{\infty} t\,|u(t)|\,dt\}, \quad \mathrm{Im}\,k\ge 0\,, \qquad /1.14/$$

имеем

$$|k f^2(k)\,Q(x,k)| \le \{\int_0^x t\,|h(t)|\,dt + 3x\int_x^{\infty}|h(t)|\,dt\}\exp\{2\int_0^{\infty} t\,|u(t)|\,dt\}\,,$$

то $Q(x,k)$ является аналитической по k при $\mathrm{Im}\,k>0$ и непрерывной при $\mathrm{Im}\,k=0$ функцией, имеющей N двукратных полюсов k_j. Отсюда, с учетом равенств

$$\phi(x,k) = [\,f'(0,k_j)\,]^{-1} f(x,k_j)\,, \quad j=1,\dots,N. \qquad /1.15/$$

находим по теореме о вычетах, что

$$I_{R,\epsilon}(x) = \sum_{j=1}^{N}\{\,\dot f_j^{-2}\,\Phi_j(h)\,\dot F_j(x) + [\,\dot f_j^{-2}\,\dot\Phi_j(h) - \ddot f_j\,\dot f_j^{-3}\,\Phi_j(h)\,]\,F_j(x)\,\}. \qquad /1.16/$$

Заметив, что при вещественных $k\ne 0$

$$\phi(x,k) = (2ik)^{-1}[\,f(x,k)\,f(-k) - f(x,-k)\,f(k)\,]\,,\quad f(x,-k) = \overline{f(x,k)}\,,$$

получаем

$$\frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{-R}^{-\epsilon}+\int_{\epsilon}^{R}\right\} k\,Q(x,k)\,dk=\frac{1}{\pi}\int_{\epsilon}^{R}\Phi\ (h;k)\ \mathrm{Im}\,\{f^{-2}(k)\,F(x,k)\}\,dk\,. \qquad /1.17/$$

При $f(0)\neq 0$ очевидно, $\lim I_{\gamma\epsilon}(x)=0$ при $\epsilon\to 0$. Далее, так как при $|k|\to\infty$, $(\mathrm{Im}\,k\geq 0)$ равномерно по $x\in[0,\infty)$

$$\phi(x,k)=\frac{\sin kx}{k}+0\left(\frac{e^{\mathrm{Im}\,kx}}{|k|^2}\right),\quad f(x,k)=e^{ikx}\left[1+0\left(\frac{1}{|k|}\right)\right],$$

то, выделяя в асимптотике функции $Q(x,k)$ слагаемое, не зависящее от u, и интегрируя в нем по частям, находим

$$Q(x,k)=\frac{1}{k}\int_0^\infty H(y)\,\Gamma(x,y,k)\,dy+0\left(\frac{1}{|k|^3}\right),$$

где $\Gamma(x,y,k)=\exp(2ikx)\sin 2ky$, $0\leq y\leq x$,

$$\Gamma(x,y,k)=\Gamma(y,x,k),\qquad x<y<\infty.$$

Следовательно, при любом $x>0$ имеем

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R} k\,Q(x,k)\,dk=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_R}\left\{\int_0^\infty H(y)\Gamma(x,y,k)\,dy\right\}dk$$

$$=\lim -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2R}\left\{\int_0^\infty H(y)\sin ky\,dy\right\}\sin kx\,dk=-\frac{1}{4}H(x)\,. \qquad /1.18/$$

Сравнивая /1.16/ с /1.17/ и /1.18/, получаем, ввиду равенств /1.9/, формулу разложения /1:6/, при этом выполняется и /1.10/.

Сами равенства /1.9/ легко вытекают из /1.1/ и тождества

$$W\{y_1 z_1, y_2 z_2\}=(k_1^2-k_2^2)^{-1}\,d\,W\{y_1, y_2\}W\{z_1, z_2\}/dx\,, \qquad /1.19/$$

где $y_m=y(x,k_m)$, $z_m=z(x,k_m)$, $m=1,2$ - произвольные пары решений уравнения /1/ при $k=k_1$ и k_2 соответственно. Абсолютная сходимость первых двух интегралов в /1.5/ следует из оценок /1.14/ и равенств /1.15/, а последнего - из /1.15/ и асимптотики

$$\dot\phi(x,k_j)=-(2ik_j)^{-1}\dot f_j\ \exp(-ik_j x)[1+0(x^{-1})],\ x\to\infty\,.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы 1 вытекает сразу, что если $f(0)\neq 0$, то система функции /1.4/ является полной в множестве функций, удовлетворяющих неравенству /3/. В случае $f(0)=0$, как было показано в [9], при $k\to 0$ $(\mathrm{Im}\,k\geq 0)$ существует $\lim k\,f^{-1}(k)=\dot f^{-1}(0)\neq 0$ и решение $\phi(x,0)$ ограничено при $x\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma\epsilon} k\,Q(x,k)\,dk=-\dot f^{-2}(0)\ f^2(x,0)\int_0^\infty h(y)\phi^2(y,0)\,dy\,,$$

т.е. в этом случае формула разложения /1.6/ остается справедливой при дополнительном предположении $\int_0^\infty h(y)\,\phi^2(y,0)\,dy=0$, а система /1.4/ становится полной, если добавить функцию $\phi^2(x,0)$.

Метод доказательства теоремы 1 непосредственно обобщается на случай разложения по произведениям $\Psi_{12}(x,k)=\psi_1(x,k)\,\psi_2(x,k)$ решений $\psi_m(x,k)$, $m=1,2$ уравнения /1/, определяемых начальными условиями $\psi_m(0,k)=1$, $\psi'_m(0,k)=h_m$, где h_1, h_2 - вещественные числа. Для этого достаточно подсчитать указанным выше способом интеграл типа /1.13/ с

$$G_{12}(x,y,k)=\begin{cases}F_{12}^{-1}(k)\,[\psi_1(x,k)\,f(x,k)\,\psi_2(y,k)\,f(y,k)\\ \quad+\psi_2(x,k)\,f(x,k)\,\psi_1(y,k)\,f(y,k)-\psi_1(x,k)\,\psi_2(x,k)\,f^2(y,k)], & x\leq y<\infty\,,\\ F_{12}^{-1}(k)\,f^2(x,k)\,\psi_1(y,k)\,\psi_2(y,k)\,, & 0\leq y\leq x\,,\end{cases} \qquad /1.20/$$

где $F_{12}(k) = F_1(k)F_2(k)$, $F_m(k) = f'(0,k) - h_m f(k)$. Справедлива

Теорема 2. Пусть вещественный потенциал $u(x)$ и функция $h(x)$ удовлетворяют неравенству /3/, а $k_j^{(m)}$, $j=1,\dots,N_m$ - нули функции $F_m(k)$ при $\operatorname{Im} k > 0$, $h_1 \neq h_2$. Тогда для любой функции $H(x) = \int_x^\infty h(t)\,dt$, $H(0) = 0$ справедлива формула разложения*

$$H(x) = \lim_{R\to\infty} \frac{4}{\pi}\int_0^R \tilde\Psi_{12}(H,k)\, k\, \operatorname{Im}\{F_{12}^{-1}(k)\, f^2(x,k)\}\,dk$$

$$- \sum_{k_j^{(m)}} 2A_j^{(m)} f^2(x,k_j^{(m)})\,\tilde\Psi_{12}(H,k_j^{(m)}), \qquad /1.21/$$

где

$$\tilde\Psi(H,k) = \int_0^\infty H(x)\,\Psi'_{12}(x,k)\,dx = \int_0^\infty h(x)\,\Psi_{12}(x,k)\,dx,$$

$$(A_j^{(m)})^{-1} = \int_0^\infty W\{\Psi_{12}(x,k_j^{(m)}),\, f^2(x,k_j^{(m)})\}\,dx = (2k_j^{(m)})^{-1}\dot F_{12}(k_j^{(m)}).$$

Правая часть равенства /1.21/ при $R\to\infty$ сходится вместе с формулой обращения для синус-преобразования Фурье от $H(x)$ /см. /1.10//. При $h_1 = h_2$ и $F(0) \neq 0$ разложение /1.21/ сводится к форме /1.6/ с $\Phi(x,k) = k\,\psi^2(x,k)$, $\dot f_j = \dot F(k_j)$ и т.д. Случаю $h_1 = h_2 = \infty$ отвечает теорема 1. Если одно из чисел $h_m = \infty$, то в /1.20/ нужно положить $\psi_m(x,k) = \phi(x,k)$, $F_m(k) = f(k)$. Соответствующая формула разложения сходится вместе с функцией $\frac{2}{\pi}\int_0^{2R}\{\int_0^\infty H(y)\cos ky\,dy\}\cos kx\,dk$, причем справедлива и при $H(0) \neq 0$.

*Из теоремы Штурма следует, что если $h_1 \neq h_2$, то нули функции $F_1(k)$ и $F_2(k)$ перемежаются и, следовательно, все полюса функции $G_{12}(x,y,k)$ простые.

§2. Из теории возмущения известно, что если

$$\eta(u;k) = \arg f(k),\ (0 \le k < \infty);\ \ \lambda_j(u) = k_j^2,\ \ C_j(u),\ (j=1,\dots,N), \qquad /2.1/$$

соответственно фаза рассеяния, собственные числа и нормировочные постоянные /1.3/ краевой задачи /1/, /2/, то выражения

$$\eta'_u(h;k) = \int_0^\infty h(x)\frac{\delta\eta}{\delta u}(x,k)\,dx, \qquad 0 \le k < \infty \qquad /2.2/$$

$$\lambda'_{j,u}(h) = \int_0^\infty h(x)\frac{\delta\lambda_j}{\delta u}(x)\,dx, \quad C'_{j,u}(h) = \int_0^\infty h(x)\frac{\lambda C_j}{\delta u}(x)\,dx,$$

где

$$[\delta\eta/\delta u](x,k) = |f(k)|^{-2}\Phi(x,k), \quad [\delta\lambda_j/\delta u](x) = C_j\,\phi^2(x,k_j), \qquad /2.3/$$

$$[\delta C_j/\delta u](x) = 2k_j\,\dot f_j^{-2}\,\dot F_j(x) + 2(\dot f_j^{-2} - k_j\,\ddot f_j\,\dot f_j^{-3})F_j(x), \qquad /2.4/$$

определяют линейную по h часть приращения данных рассеяния /2.1/ при замене потенциала u на $u+h$, т.е. $\eta'_u(h;k) = d\eta(u+th;k)/dt\,|_{t=0}$ и т.д.*

Теорема 1 позволяет легко найти $h(x)$ по заданным величинам /2.2/. Точнее, справедлива

Теорема 3. Если функции $u(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют условиям теоремы 1, то для $C'_{j,u}(h)$ /2.2/ справедливо представление

$$-C_j^{-1}C'_{j,u}(h) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty \eta'_u(h;k)\,k\,(k^2-\lambda_j)^{-1}\,dk$$

$$+(2\lambda_j)^{-1}C_j\,\Phi_j(h) - (2\lambda_j)^{-1}\lambda'_{j,u}(h) + \sum_{m\neq j} 2\lambda'_{m,u}(h)(\lambda_m-\lambda_j)^{-1} \qquad /2.5/$$

*Доказательство формул /2.3/ имеется, например, в гл. 4, а формулу /2.4/ можно получить аналогичной /7/ выкладкой.

и имеет место следующая формула обращения:

$$H(x) = P\int_0^\infty \eta'_u(h;k)\frac{\delta u}{\delta\eta}(x,k)\,dk$$

$$+\sum_{j=1}^{N}\{C'_{j,u}(h)\frac{\partial u}{\partial C_j}(x)+\lambda'_{j,u}(h)\frac{\partial u}{\partial\lambda_j}(x)\}, \qquad /2.6/$$

где

$$\frac{\delta u}{\delta\eta}(x,k) = \frac{4}{\pi}\{\operatorname{Im}\{e^{-2i\eta(k)}f^2(x,k)\}+\sum_{j=1}^{N}\frac{2kC_j\phi^2(x,k)}{k^2-\lambda_j}\}, \qquad /2.7/$$

$$[\partial u/\partial C_j](x) = 2\phi^2(x,k_j) \qquad /2.8/$$

$$[\partial u/\partial\lambda_j](x) = 4\dot f_j^{-1}\dot f(x,k_j)\phi(x,k_j)$$

$$-C_j\lambda_j^{-1}(1-k_j\ddot f_j\dot f_j^{-1})\phi^2(x,k_j)-\sum_{m\neq j}3C_m\phi^2(x,k_m)(\lambda_m-\lambda_j)^{-1}, \qquad /2.9/$$

а символ P означает, что интеграл понимается в смысле главного значения.

Если кроме перечисленных выше условий функции $u(x)$ и $h(x)$ таковы, что $H(0)=0$, $u(x)\in C_0^{(1)}$, $h(x)\in C_0^{(2)}$ и $A[H(x)]\in L(0,\infty)$, то равенство /2.6/ можно дифференцировать по x и интеграл в правой стороне /2.6/ вместе с интегралом

$$\int_0^\infty \eta'_u(h;k)\frac{d}{dx}\left[\frac{\delta u}{\delta\eta}(x,k)\right]dk$$

сходятся абсолютно.

Доказательство. Подсчитав указанным в доказательстве теоремы 1 методом интеграл

$$(2\pi i)^{-1}\int f^{-1}(k)(k^2-k_j^2)^{-1}k\phi(x,k)f(x,k)dk$$

по контуру γ интеграла /1.13/ с последующим предельным переходом $R\to\infty$, $\epsilon\to 0$, находим, что

$$\dot f_j^{-1}\phi(x,k_j)\dot f(x,k_j) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty|f(k)|^{-2}(k^2-k_j^2)^{-1}k^2\phi^2(x,k)\,dk$$

$$-\dot f_j^{-1}\dot\phi(x,k_j)f(x,k_j)-(1-k_j\ddot f_j\dot f_j^{-1})(2k_j\dot f_j)^{-1}\phi(x,k_j)f(x,k_j)$$

$$-\sum_{m\neq j}2k_m\dot f_m^{-1}(k_m^2-k_j^2)^{-1}\phi(x,k_m)f(x,k_m). \qquad /2.10/$$

Подставляя /2.10/ в /2.4/, получаем в силу /2.2/ представление /2.5/, которое приводит к записи /2.6/ для формулы обращения /1.6/. Последнее утверждение теоремы является прямым следствием приведенных в §1 оценок и асимптотик для $\phi(x,k)$ и $f(x,k)$/и аналогичных для $\phi'(x,k)$ и $f'(x,k)$ /, так как при указанных ограничениях на $u(x)$ и $h(x)$ из /4/ следует, что при $k\to\infty$

$$\int_0^\infty H(x)\Phi'(x,k)\,dx = -(4k^2)^{-1}\int_0^\infty A[H(x)]\Phi(x,k)\,dx = 0(k^{-3}).$$

Теорема доказана.

Обозначения /2.7/-/2.9/ обусловлены тем, что производные по x от функции /2.7/-/2.9/ определяют "частные производные" потенциала u по данным рассеяния /2.1/. Они были получены в /1,3/ на основе уравнения Гельфанда-Левитана в обратной задаче Штурма-Лиувилля.

Полагая в /2.6/ $C'_{j,u}(h)=\lambda'_{j,u}(h)=0$, $j=1,\dots,N$, получим найденную Ньютоном /1/ формулу обращения; при $\eta'_u(h;k)=0$, $0<k<\infty$, $C'_{j,u}(h)=0$, $j=1,\dots,N$ - формулу обращения из /3/, а при $\eta'_u(h;k)=0$, $\lambda'_{j,u}(h)=0$ - уравнение для физически эквивалентных потенциалов /2/.

Следуя [11] из тождества /1.19/ нетрудно получить следующие соотношения биортогональности между системами функции /2.3/-/2.4/ и /2.7/-/2.9/:

$$\left[\frac{\delta u}{\delta \eta},\frac{\delta C_j}{\delta u}\right]=\left[\frac{\delta u}{\delta \eta},\frac{\delta \lambda_j}{\delta u}\right]=\left[\frac{\delta u}{\partial C_j},\frac{\delta \eta}{\delta u}\right]$$

$$=\left[\frac{\partial u}{\partial C_j},\frac{\delta \lambda_m}{\delta u}\right]=\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda_j},\frac{\delta \eta}{\delta u}\right]=\left[\frac{\partial u}{\partial C_j},\frac{\delta \lambda_m}{\delta u}\right]=0,$$

$$0\le k<\infty,$$

$$j,m=1,\dots,N,$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R\frac{\delta u}{\delta \eta}(x,k)\,\frac{d}{dx}\,\frac{\delta \eta}{\delta u}(x,\ell)\,dx=\lim_{R\to\infty}\frac{\sin 2R(k-\ell)}{\pi(k-\ell)}=\delta(k-\ell),$$

$$0<k,\ \ell<\infty,$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial C_j},\frac{\delta C_m}{\delta u}\right]=\left[\frac{\partial u}{\partial \lambda_j},\frac{\delta \lambda_m}{\delta u}\right]=\delta_{j,m},\quad j,m=1,\dots,N,$$

где "скалярное произведение" $[f,g]$ определяется /1.9/. Эти равенства вместе с формулой обращения /2.6/ применялись в [12] для восстановления потенциала $u(x)$ по данным рассеяния /2.1/ с помощью некоторых эволюционных уравнений, имеющих первые интегралы, аналогичные известным для уравнения Кортевега де Фриза [11].

§3. Перепишем теперь формулу /1.6/ в виде

$$-\frac{1}{2}H(x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S'_u(h;k)\,F(x,k)\,dk$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{M'_{j,u}(h)\,F_j(x)+i\kappa'_{j,u}(h)\,\dot F_j(x)\},\qquad /3.1/$$

где обозначим

$$S'_u(h;k)=-2if^{-2}(k)\,\Phi(h;k),\qquad -\infty<k<\infty,\qquad /3.2/$$

$$M'_{j,u}(h)=2\dot f_j^{-2}\dot\Phi_j(h)-2\ddot f_j\,\dot f_j^{-3}\Phi_j(h),\qquad /3.3/$$

$$\kappa'_{j,u}(h)=-(2\kappa_j)^{-1}M_j\int_0^{\infty}h(x)\,F_j(x)\,dx,\quad (k_j=i\kappa_j),\qquad /3.4/$$

$$M_j=\{\int_0^{\infty}f(x,k_j)\,dx\}^{-1}=-2k_j\,[\dot f_j\,f'(0,k_j)]^{-1}.\qquad /3.5/$$

Выражения /3.2/-/3.4/ определяют линейную по h часть приращения данных рассеяния

$$S(k)=\exp(-2i\eta(k)),\ (-\infty<k<\infty);\ \kappa_j,\ M_j,\ (j=1,\dots,N)\qquad /3.6/$$

задачи /1/, /2/ при замене u на $u+h$. Величины /3.6/ играют основную роль в подходе Марченко [9] к решению обратной задачи рассеяния, где строится функция

$$F(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1-S(k)\,e^{2ikx}\,dk+\sum_{j=1}^{N}M\,e^{-2\kappa_j x},\quad 0<x<\infty,\qquad /3.7/$$

по которой потенциал $u(x)$ находится однозначно из известного уравнения Марченко.

Введем функцию

$$F'_u(h;x)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}S'_u(h;k)\,e^{2ikx}\,dk$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\{M'_{j,u}(h)e^{-2\kappa_j x}-2xM_j\,\kappa'_{j,u}(h)e^{-2\kappa_j x}\},\quad 0<x<\infty.\qquad /3.8/$$

Из /3.2/-/3.4/ вытекает, что функцию $F'_u(h;x)$ можно рассматривать как полученную из $F(u;x)$ /3.7/ дифференцированием по u. Необходимые для наших построений свойства функции $F'_u(h;x)$ дает следующая

Лемма 1. При условиях теоремы 1 функция $F'_u(h;x)\in L(0,\infty)$, абсолютно непрерывна при $x>0$, $(1+x)\,dF'_u(h;x)/dx\in L(0,\infty)$ причем

$$F_u'(h;x) = H(h;x) + \int_x^\infty \Gamma(y-x)H(h;y)\,dy\,,$$

$$H(h;x) = -\frac{1}{2}\int_x^\infty M(y,x)\,h(y)\,dy\,, \qquad /3.9/$$

где функции $M(x,y)$ и $\Gamma(y)$ определяются из представления

$$k\phi^2(x,k) = \int_0^x M(x,y)\sin 2ky\,dy\,, \qquad /3.10/$$

$$f^{-2}(k) = \sum_{j=1}^{N}\left[(k-k_j)^{-2}\dot f_j^{-2} - (k-k_j)^{-1}\dot f_j^{-3}\ddot f_j\right]$$

$$+\ 1 + \int_0^\infty \Gamma(y)e^{2iky}\,dy\,, \quad \int_0^\infty |\Gamma(y)|\,dy < \infty\,. \qquad /3.11/$$

Доказательство. Из известного представления /см., например, /9/ /

$$k\phi(x,k) = \sin kx + \int_0^x K(x,y)\sin ky\,dy\,, \qquad /3.12/$$

где

$$|K(x,y)| \le \frac{1}{2}\int_{(x-y)/2}^{x} |u(t)|\,dt\,\exp\left\{\int_0^{(x+y)/2} t|u(t)|\,dt\right\}, \qquad /3.13/$$

вытекает /3.10/, где

$$M(x,y) = 1 + 2\int_{|x-2y|}^{x} K(x,t)\,dt$$

$$+\ 8\int_0^{\min(y,\,x-y)} d\alpha \int_{\alpha+y}^{x} K(x,\beta)K(x,\beta-2\alpha)\,d\beta\,, \quad 0 \le y \le x\,, \qquad /3.14/$$

$$M_x'(y,x) = \operatorname{sign}(y-2x)\,K(y/2,\,|y-2x|/2)$$

$$+ \int_x^y K(y/2,\,\alpha/2)K(y/2,\,|\alpha-2x|/2)\operatorname{sign}(\alpha-2x)\,d\alpha\,, \quad x \le y < \infty\,. \qquad /3.15/$$

Оценивая ядра /3.14/ и /3.15/ с помощью /3.13/, получаем, после некоторой выкладки /13, 14/, что функции

$$H(h;x)\,, \quad (1+x)\,dH(h;x)/dx \in L(0,\infty)\,. \qquad /3.16/$$

Формула /3.11/ является следствием теоремы Винера-Леви /см. Крейн /15/, лемма 1.3/, ввиду того, что функция Йоста $f(k) = 1 + \int_0^\infty L(y)\exp(iky)\,dy$, $\int_0^\infty |L(y)|\,dy < \infty$ и $f(k) \neq 0$ при $-\infty < k < \infty$. Из $\Gamma(y) \in L(0,\infty)$ и /3.16/ вытекает, что функция $F_u'(h;x)$ /3.9/ удовлетворяет условиям леммы. Из /3.10/ находим

$$\Phi_j(x) = \int_0^x M(x,y)\sin 2k_j y\,dy\,, \quad \dot\Phi_j(x) = 2\int_0^x M(x,y)\,y\cos 2k_j y\,dy\,,$$

что вместе с известными равенствами

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2ky}{(k-k_j)^2}\, e^{2ikx}\,dk = 4e^{-2\kappa_j x}(ix\sin 2k_j y + y\cos 2k_j y)\,,$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{sih}\, 2ky}{k-k_j}\, e^{2ikx}\,dk = 2e^{-2\kappa_j x}\sin 2k_j y\,, \quad k_j = i\kappa_j\,,$$

приводит, в силу /3.5/, к следующей записи для функции /3.8/:

$$\frac{2}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\left[1 + \int_0^\infty \Gamma(y)e^{2iky}\,dy\right]\left[\int_0^\infty \sin 2ky\, H(h;y)\,dy\right]e^{2ikx}\,dk\,.$$

Отсюда /3.9/ получается с помощью классической формулы обращения для интегралов Фурье. Лемма доказана.

Теорема 4. При условиях теоремы 1 формула обращения /1.6/ эквивалентна равенствам:

$$h(x) = 2\frac{d}{dx}F_u'(h;x) + 2\frac{d}{dx}\int_x^\infty N(x,y)F_u'(h;y)\,dy \qquad /3.17/$$

$$= 2\frac{d}{dx}F_u'(h;x) + 2\int_x^\infty\left\{N(x,x) - \int_x^y N_x'(x,t)\,dt\right\}\frac{d}{dy}F_u'(h;y)\,dy\,,$$

где функция $F'_u(h;x)$ определяется /3.8/, а

$$N(x,y) = 4L(x,2y-x) + 2\int_x^{2y-x} L(x,t)\,L(x,2y-t)\,dt, \qquad /3.18/$$

где $L(x,y)$ - ядро оператора преобразования

$$f(x,k) = e^{ikx} + \int_x^\infty L(x,y)\,e^{iky}\,dy. \qquad /3.19/$$

Доказательство. Из введенного Левиным[16] представления /3.19/, для ядра которого справедлива оценка[9]

$$|L(x,y)| < \int_{(x+y)/2}^\infty |u(t)|\,dt\,\exp\left\{\int_x^\infty t\,|u(t)|\,dt\right\}, \qquad /3.20/$$

следует, что

$$F(x,k) = e^{2ikx} + \int_x^\infty N(x,y)\,e^{2iky}\,dy \qquad /3.21/$$

и

$$F_j(x) = e^{-2\kappa_j x} + \int_x^\infty N(x,y)\,e^{-2\kappa_j y}\,dy, \qquad /3.22/$$

$$\dot F_j(x) = 2ix\,e^{-2\kappa_j x} + 2i\int_x^\infty N(x,y)\,y\,e^{-2\kappa_j y}\,dy. \qquad /3.23/$$

Подставляя /3.21/-/3.23/ в /3.1/, получаем /3.17/. Доказательство заканчиваем с помощью леммы 1, заметив, что из оценки /3.20/ и аналогичных ей для $L'_x(x,y)$, $L'_y(x,y)$ следует, что если абсолютно непрерывная функция $f(x)$ удовлетворяет условиям /3.16/, то и функция $\int_x^\infty N(x,y)\,f(y)\,dy$ удовлетворяет этим условиям. /Подробности соответствующих оценок приведены в /13,14/ /. Теорема доказана.

В заключение отметим, что теорема 4 удобна при построении итерационных методов решения обратной задачи рассеяния, а также позволяет показать, что формула /1.6/ остается справедливой для любой функции $h(x)$, удовлетворяющей условию $\int_0^\infty x\,|h(x)|\,dx < \infty$ в предположении, что вещественный потенциал $u(x)$ удовлетворяет этому условию и $f(0) \neq 0$. Эти предложения для случая $f(k) \neq 0$ при $\operatorname{Im} k \geq 0$ были доказаны в /13,14/. Общий случай рассматривается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. "Мир", М., 1969.*
2. *Jost R., Kohn W. Phys.Rev., 1952, 88, p.382.*
3. *Jost R., Kohn W. Kgl. Danske Videnskab Selskab. Mat.Phys. Medd., 1953, 27, no.9.*
4. *Титчмарш Э.Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. I. ИЛ, М., 1960.*
5. *Barcilon V. J.Math.Phys.,1974, 15, 4, p.429.*
6. *Левитан Б.М. ДАН СССР, 1952, 83, 3, с.349.*
7. *Kaup D.J. SIAM J.Appl.Math., 1976, 31, 1, p.121.*
8. *Kaup D.J. J.Math. Anal. and Appl., 1976, 54, 3, p.849.*
9. *Марченко В.А. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. "Наукова думка", Киев, 1972.*
10. *Базь А.И., Зельдович Я.Б., Переломов А.М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. "Наука", М., 1971.*
11. *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д. Функциональный анализ и его приложения, 1971, 5, вып. 4, с.18.*
12. *Жидков Е.П., Христов Е.Х. "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики", вып. 2, ЦИФИ-ОИЯИ, 1977, с.21.*
13. *Жидков Е.П., Малышев Р.В., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-9063, Дубна, 1975.*
14. *Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Христов Е.Х. ОИЯИ, Р5-9980, Дубна, 1976.*
15. *Крейн М.Г. УМН, 1956, 13, №5, с.3.*
16. *Левин Б.Я. ДАН СССР, 1956, 106, с.187.*

Рукопись поступила в издательский отдел 13 января 1978 года.