

С 344.1ш
К-906

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



27/11.78

980/2-78

P5 - 11143

Л.А.Кулюкина, Г.А.Ососков,
А.Пазман, П.Чернянский

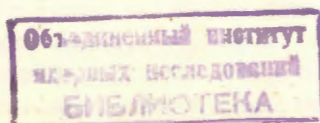
СТАТИСТИЧЕСКОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ
ИОНИЗАЦИИ СТРИМЕРНЫХ ТРЕКОВ

1977

P5 - 11143

Л.А.Кулюкина, Г.А.Ососков,
А.Пазман,* П.Чернянский*

СТАТИСТИЧЕСКОЕ
ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПАРАМЕТРОВ
ИОНИЗАЦИИ СТРИМЕРНЫХ ТРЕКОВ



*Институт измерения и измерительной техники
Словацкой академии наук (Братислава)

Кулюкина Л.А. и др.

P5 - 11143

Статистическое исследование распределений, возникающих при определении параметров ионизации стримерных треков

На основании ряда упрощающих допущений о структуре стримерных треков проведено аналитическое исследование вероятностных распределений ряда ионизационных параметров. Результаты обобщены на случай дискретизации изображения треков при их сканировании с постоянным шагом. Правомерность сделанных допущений проверена на монте-карловской модели. По результатам исследования предложены новые статистические оценки для первичной ионизации стримерных треков.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Kulyukina L.A. et al.

P5 - 11143

Statistical Research of the Probability Distribution of Streamer Track Ionisation Parameters

An analytical study is made for the probability distribution of some ionisation parameters on the base of simplifying assumptions on streamer tracks. The results are generalized on the case of the track image discretisation by scanning them with a permanent step. The validity of the assumption is confirmed by the Monte-Carlo simulations. Some statistical estimates of the streamer track primary ionisation are suggested according to the research results.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automations, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

I. Введение

Одним из актуальных вопросов обработки экспериментальной информации, получаемой при использовании стримерных камер в физике высоких энергий, является проблема определения первичной ионизации треков событий по оцифрованным данным измерений.

Имеется достаточное количество исследований по аналогичной проблеме для пузырьковых камер, в которых предлагается ряд методов, сводящихся в основном к подсчету количества отсчетов (или пропусков отсчетов) при сканировании изображения трека круглым пятном^{/1,2/}, или более сложные методы сравнительных оценок интенсивности почернения треков при сканировании щелью, ориентированной вдоль трека^{/3,4/}. Естественно поэтому стремление перенести эти методы на случай стримерных треков с учетом специфики последних: неоднородности размеров стримеров и значительной градации их по яркости.

Аналогично случаю пузырьковых треков эффект слияния отдельных стримеров в ступки, увеличивающийся с ростом плотности ионизации и среднего диаметра стримеров, приводит к тому, что при визуальном наблюдении структура изображения трека описывается как последовательность ступок и промежутков между ними. Поэтому в работах по определению ионизации стримерных треков исполь-

зовались характеристики, известные из обработки пузырьковых треков: \bar{l} - средняя длина сгустка, \bar{l}' - средняя длина промежутка между сгустками и L - суммарная длина всех просветов (лакунарность). Так, в работах^{/5,6/}, излагающих способы определения ионизации с помощью специального прибора, "просматривающего" трек поперечной щелью, полученные данные специальным образом дискретизируются для вычисления лакунарности.

Возможность определения первичной ионизации при бесфилмовом съеме данных применительно к стримерной камере РИСК^{/9/} исследовалась в^{/8/} на монтекарловской модели стримерных треков, учитывающей их вышеупомянутую специфику, а также так называемый "робин-эффект", т.е. слияние в один таких стримеров, центры которых оказываются ближе заданного порога. При обработке треков-моделей исследовалась также зависимость параметров ν , \bar{l} и L от уровня дискриминации и ширины шага сканирования.

Применение известных методов параметрической статистики (метода моментов, метода максимального правдоподобия) затруднялось из-за отсутствия более детального теоретико-вероятностного описания стримерного трека после его оцифровки.

В настоящей работе сделана попытка теоретического вывода распределений основных параметров стримерного трека с учетом влияния шага сканирования на точность определения ионизации.

При формализации задачи во многом использовалась модель, предложенная в работе^{/8/}, т.е. распределение центров первичной ионизации предполагалось пуассоновским с параметром g , а в силу достаточной удаленности треков от объективов оптической системы изображения отдельных стримеров предполагались окружностями случайного радиуса. Основным теоретическим допущением, которое существенно использовалось при выводах и доказательствах, было предположение о пренебрежимой малости вероятности такого случая, когда изображение одного стримера полностью покрывает изображение соседнего или нескольких соседних с ним. Для определения границ применимости этого допущения был использован метод Монте-Карло. Истинные распределения длин сгустков и промежутков между ними были получены на монте-карловской модели, а затем они сравнивались по критерию χ^2 с теоретическими распределениями, полученными с использованием указанного допущения при различных значениях параметра g и величинах шага дискретизации.

Сравнение показало допустимость сделанных предположений при значениях шага дискретизации, близких к величинам среднего диаметра стримера, который предполагался распределенным по усеченному нормальному закону, для любых g из интервала (2, 8), что можно считать вполне согласующимся с реальными значениями параметров имеющихся стримерных камер.

В заключение сделаны некоторые статистические выводы относительно уточненной оценки параметра g с использованием полученных распределений.

2. Модель изображения стримерного трека

Пусть изображение отдельного стримера - окружность случайного радиуса R , распределенного с плотностью вероятности $f_R(r)$, отличной от нуля, на отрезке (R_{min}, R_{max}) , причем радиусы любых двух окружностей статистически независимы.

Центры окружностей, т.е. центры первичной ионизации трека, образуют пуассоновский процесс с параметром g , называемым коэффициентом ионизации.

Как известно^{/9/}, пуассоновский процесс определяется как процесс со следующими свойствами:

1. Стационарность. Для всякого $T > 0$ и для всякого натурального числа k вероятность $P_k(T)$ того, что в промежутке $(t, t+T)$ находится точно k точек процесса, не зависит от t .

2. Отсутствие последования. Для всякого $t \in (-\infty, \infty)$, $T > 0$, k натуральное, вероятность $P_k(T)$ не зависит от положения точек процесса, которые появились ранее.

3. Ординарность. Обозначим через $P_{>1}(\Delta t)$ вероятность появления более чем одной точки за промежуток $(0, \Delta t)$. Тогда $P_{>1}(\Delta t) = o(\Delta t)$.

Из этих свойств можно получить^{/9/}, что вероятность $P_k(T)$ упомянутая в свойствах 1 и 2, равна

$$P_k(T) = e^{-gT} \frac{(gT)^k}{k!}, \quad (1)$$

расстояние l между центрами соседних окружностей имеет плотность вероятности

$$f_l(t) = g e^{-gt}, \quad (t > 0), \quad (2)$$

а распределение положения, какого-то выбранного центра на отрезке фиксированной длины h будет равномерным, т.е. имеет постоянную плотность

$$f_h(x) = \frac{1}{h} \quad (t \leq x \leq t+h). \quad (3)$$

В этих предпосылках справедливы следующие теоремы.

2.1. Вывод основных теорем

Теорема 1. Левые края окружностей образуют пуассоновский процесс с тем же параметром g .

Доказательство. Мы покажем, что левые края окружностей образуют точечный процесс со свойствами 1, 2, 3.

1. Положение левого края окружности зависит только от положения ее центра и радиуса. Радиус окружности не зависит от t , положение центра - также, так как требование 1 выполнено для центров окружностей. Поэтому вероятность того, что в $(t, t+T)$ находится k левых краев окружностей, не зависит от t .

2. Достаточно показать, что положение i -го левого края не зависит от положений предыдущих краев. Положение i -го левого края зависит от положения центра соответствующей окружности и ее радиуса. Однако ни то, ни другое не зависит от радиусов и центров остальных окружностей в силу второго свойства пуассоновского процесса образования центров.

3.

$$P \{ \text{в } (0, \Delta t) \text{ находится по крайней мере два левых края} \} =$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} P \{ \text{в } (0, \Delta t) \text{ находится точно } i \text{ левых краев} \} =$$

$$= \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} \int P \{ \text{в } (0, \Delta t) \text{ находится точно } i \text{ левых краев} \mid \text{они принадлежат окружностям с радиусами } r_1, r_2, \dots, r_i \} \varphi(r_1, r_2, \dots, r_i) dr_1 dr_2 \dots dr_i,$$

где через $\varphi(r_1, r_2, \dots, r_i)$ обозначим совместную плотность распределения вероятностей того, что у i окружностей радиусы равны r_1, r_2, \dots, r_i . Деление на $i!$ нужно, потому что в интегрирование включено $i!$ разных перестановок радиусов r_1, r_2, \dots, r_i . Далее, справедливо неравенство

$$P \{ \text{в } (0, \Delta t) \text{ находится точно } i \text{ левых краев} \mid \text{они принадлежат окружностям с радиусами } r_1, r_2, \dots, r_i \} =$$

$$= P \{ (r_1, r_1 + \Delta t) \text{ содержит один центр } \wedge (r_2, r_2 + \Delta t), \text{ содержит один центр } \wedge \dots \wedge (r_i, r_i + \Delta t), \text{ содержит один центр} \} \leq (g \Delta t)^i.$$

Значит,

$$P \{ \text{в } (0, \Delta t) \text{ по крайней мере два левых края} \} \leq \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!} (g \Delta t)^i = e^{g \Delta t} - 1 - g \Delta t = o(\Delta t).$$

Следовательно, левые края образуют точечный процесс, который обладает свойствами 1, 2, 3. Параметр g равен среднему числу центров в интервале $(0, 1)$. Так как среднее число левых краев должно быть тем же, то левые края образуют пуассоновский процесс с параметром g , что и требовалось доказать.

Следствие 1. Плотность вероятности $f_{\Delta}(t)$ расстояния Δ между левыми (правыми) краями соседних окружностей совпадает с (2).

Следствие 2. Распределение левого края любой выбранной окружности на отрезке фиксированной длины h равномерно, с плотностью (3).

Теорема 2. Длины промежутков и длины ступок являются статистически независимыми величинами.

Доказательство. Не теряя общности, можно время $t = 0$ фиксировать в левом крае ступка. Длина промежутка перед ступком зависит только от окружностей, имеющих левые края в точках слева от 0. Но длина ступка зависит только от окружностей, имеющих левые края справа от 0. Из свойства 2 пуассоновского процесса вытекает независимость длин промежутков и ступков.

Теорема 3. Плотность вероятности длины m промежутка между двумя сгустками равна $f_m(t) = q e^{-qt}$; $t \geq 0$.

Доказательство. Если время t измерять от конца предыдущего сгустка, то из свойств распределения Пуассона (I) вытекает, что расстояние левого края окружности, следующей за этим сгустком, от его конца будет меньше, чем t с вероятностью

$$P \{ \text{расстояние} < t \} = 1 - e^{-qt}; \quad t \geq 0$$

и

$$f'_m(t) = \frac{dP \{ \text{расстояние} < t \}}{dt} = q e^{-qt}; \quad t \geq 0.$$

Рассмотрение реальных структур цепочек стримеров, образующих сгустки, подкажывает нам следующую важную гипотезу.

Гипотеза S. Вероятность события, когда одна окружность целиком поглощает соседнюю (или несколько соседних), пренебрежимо мала.

Теоретическая проверка гипотезы S, т.е. аналитическое вычисление вероятности указанного события, оказалась затруднительной, поэтому, как будет изложено ниже, это было сделано методом Монте-Карло.

Теорема 4. В предположении справедливости гипотезы S вероятность $P(n)$ того, что произвольный сгусток состоит ровно из n перекрывающихся окружностей, равна

$$P(n) = I (I - 1)^{n-1}, \quad (3')$$

где

$$I = \int_{R_{min}}^{R_{max}} e^{-2qt} f_R(t) dt. \quad (4)$$

Доказательство. i -я и $(i+1)$ -я окружности входят в один и тот же сгусток, если $l_{i+1} - l_i < r_i$ (см. рис. I).

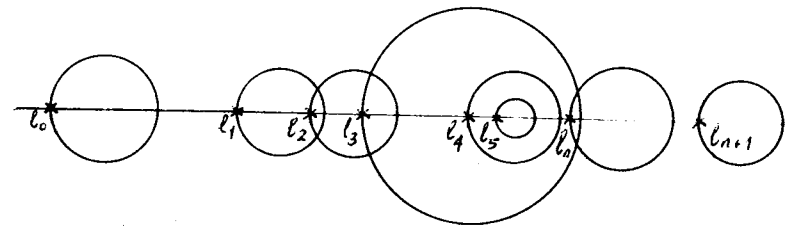


Рис. I

Поэтому, обозначая через E оператор усреднения, получаем с учетом гипотезы S

$$P(n) = C E \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} P(l_{i+1} - l_i < 2r_i | r_i) \right\} = C \prod_{i=1}^{n-1} \int_{R_{min}}^{R_{max}} (1 - e^{-2qr_i}) f_R(r_i) dr_i = C (I - 1)^{n-1},$$

где C - нормирующая константа. Из условия $\sum_{n=1}^{\infty} P(n) = 1$ получаем, что $C = I$.

2.2. Интегральное уравнение для плотности распределения длин сгустков

Нахождение распределения длин сгустков путем прямого вычисления вероятности превышения заданной длины сгустком из n окружностей оказалось слишком громоздким делом. Поэтому нами был использован подход, основанный на свойстве устойчивости пуассоновского процесса, который позволяет получить интегральное уравнение для искомой плотности вероятности длины сгустка.

Суть этого подхода состоит в следующем: если к сгустку случайной длины случайным образом присоединить еще одну окружность случайного радиуса, то после нормировки процесс должен, с вероятностной точки зрения, остаться тем же, т.е. распределение длин сгустков должно сохраниться.

Обозначим через $f_y(t)$ первоначальную плотность вероятности длины сгустка, через $\hat{f}_y(t)$ - плотность вероятности длины сгустка после случайного присоединения к нему еще одной окружности. Тогда согласно вышесказанному

$$f_y(t) = \alpha [\hat{f}_y(t) + P(1) f_D(t)], \quad (5)$$

где α - нормировочная константа, а $f_D(t) \cdot P(1)$ - вклад новых сгустков, состоящих только из одной окружности, появляющейся там, где раньше не было сгустка. Через $f_D(t)$ обозначена плотность вероятности распределения диаметра окружности. Нетрудно подсчитать, что

$$f_D(t) = \frac{1}{2} f_R\left(\frac{t}{2}\right). \quad (6)$$

Интегрируя (5), получим

$$\alpha = \frac{1}{1 + P(1)},$$

что с учетом (3) дает для $f_y(t)$

$$f_y(t) = \frac{1}{1+I} [\hat{f}_y(t) + I f_D(t)]. \quad (7)$$

Еще одно уравнение можно получить, анализируя процесс присоединения окружностей по-другому.

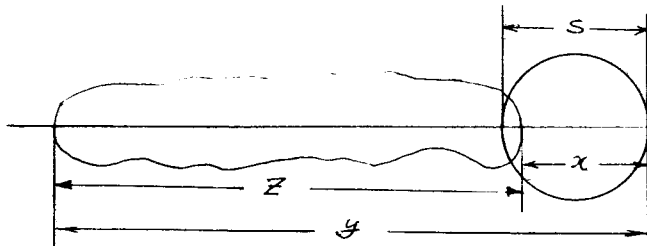


Рис. 2

К исходному сгустку длины z присоединим одну окружность диаметра s . Получим новый сгусток длины y .

$$y = \begin{cases} z & , x > s \\ z + x & , x \leq s, \end{cases} \quad (8)$$

где x - расстояние правого края окружности от правого края сгустка (см. рис. 2). Условная плотность величины y при заданных z и x равна

$$\hat{f}_y(t|z, x) = P\{x > s | x\} \delta(t-z) + P\{x \leq s | x\} \delta(t-z-x) \quad (9)$$

(здесь $\delta(x)$ - известная δ - функция Дирака).

Усредняя (9) по z и x , получим с учетом следствия I теоремы I

$$\begin{aligned} \hat{f}_y(t) &= \int_{D_{\min}}^{\infty} \int_0^{\infty} \hat{f}_y(t|z, x) f_y(z) f_{\Delta}(x) dz dx = \\ &= f_y(t) \int_0^{\infty} P\{x > s | x\} f_{\Delta}(x) dx + \int_0^{\infty} P\{x \leq s | x\} f_{\Delta}(x) f_y(t-x) dx = \\ &= A f_y(t) + \int_0^{\infty} F_D(x) f_{\Delta}(x) f_y(t-x) dx, \end{aligned}$$

где обозначено

$$A = \int_0^{\infty} [1 - F_D(x)] f_{\Delta}(x) dx,$$

а $F_D(x)$ - функция распределения диаметров окружностей, которую можно получить, интегрируя (6).

Подставляя полученное выражение для $\hat{f}_y(t)$ в (7), получаем интегральное уравнение для $f_y(t)$

$$f_y(t) = \frac{A}{1+I} f_y(t) + \frac{1}{1+I} \int_0^{\infty} F_D(x) f_{\Delta}(x) f_y(t-x) dx + \frac{I}{1+I} f_D(t),$$

которое после приведения подобных и введения обозначения

$$B = (1 + I - A)^{-1}$$

принимает вид

$$f_y(t) = B \left[\int_0^{\infty} F_D(x) f_{\Delta}(x) f_y(t-x) dx + I f_D(t) \right]. \quad (10)$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 5. Плотность вероятности для сгустков $f_y(t)$ подчиняется интегральному уравнению (10) при условии

$$f_y(t) = 0 \quad \text{для} \quad t \leq D_{\min} = 2 R_{\min}.$$

Замечание. Плотность вероятности, получаемая путем решения уравнения (10), является нормированной. В самом деле, если обозначить

$$K = \int_0^{\infty} f_y(t) dt,$$

то интегрируя (10), получим линейное уравнение для K

$$K = B [K(1-A) + I],$$

решая которое и подставляя значение B , находим

$$K = \frac{IB}{1+AB-B} = \frac{I}{B^{-1}+A-1} = \frac{I}{1+I-A-1+A} = 1.$$

3. Дискретизация изображения

Процесс сканирования и оцифровки, т.е. дискретизации изображения трека, может быть представлен как наложение на изображение решетки с шагом h . При этом если какая-то ячейка решетки оказывается заполненной одной или несколькими окружностями, изображающими стримеры, или частью такой окружности, то производится отсчет.

Отсчет не производится, если ячейка оказывается пустой или заполняется пренебрежимо малой частью какой-то окружности, что можно определить, задавая малой сагитту $s \leq h$ (где $s \ll 1$) сегмента окружности, попадающего в эту ячейку (см. рис. 3).

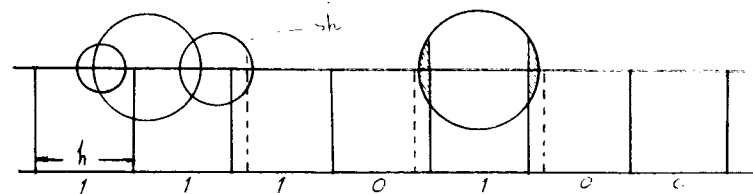


Рис. 3

Если отвлечься от проблем обнаружения и прослеживания треков после дискретизации, то, представляя последовательность отсчетов и пропусков отсчетов как последовательность единиц и нулей, мы получаем, что сгустки и промежутки являются сериями единиц и нулей и длины их должны быть кратны величине h шага дискретизации. Так, на рис. 3 мы имеем после дискретизации два сгустка длины $3h$ и h соответственно и два промежутка с длинами h и $2h$.

3.1. Основные распределения для дискретизированного изображения

3.1.1. Распределение расстояния между левыми краями соседних стримеров

Обозначим через d расстояние между левыми краями окружностей после дискретизации и займемся выводом формулы для распределения этой случайной величины, т.е. вероятности

$$P_d(k) = P\{d = kh\}.$$

Согласно следствию 2 теоремы I положение левого края l_1 окружности распределено равномерно в интервале дискретизации, поэтому случайное расстояние x от l_1 до ближайшего к ней узла решетки (см. рис. 4) также распределено равномерно с плотностью $f_x(t)$ в интервале $(-sh; (1-s)h)$.

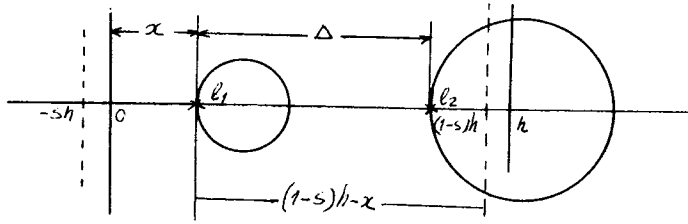


Рис. 4

Вероятность $P_d(0)$ того, что левые края двух соседних окружностей окажутся после дискретизации в одной ячейке решетки, будет равна

$$P_d(0) = \int_{-\infty}^{\infty} P\{\Delta \leq (1-s)h - x | x\} f_x(x) dx.$$

В соответствии со следствием I теоремы I имеем

$$P\{\Delta \leq (1-s)h - x | x\} = 1 - e^{-g[h(1-s) - x]},$$

поэтому

$$P_d(0) = \int_{-sh}^{(1-s)h} \{1 - e^{-g[h(1-s) - x]}\} \frac{1}{h} dx = 1 - \frac{1 - e^{-gh}}{gh}.$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} P\{d = kh\} &= P\{\Delta \in (kh - sh - x; kh + (1-s)h - x)\} = \\ &= \frac{1}{h} \int_{-sh}^{(1-s)h} [P\{\Delta \leq (k+1-s)h - x | x\} - P\{\Delta \leq (k-s)h - x | x\}] dx = \\ &= \frac{1}{h} [e^{-gk} - e^{-g(k+1-s)}] \int_{-sh}^{(1-s)h} e^{gx} dx = \frac{e^{-gh}}{gh} (e^{gh} - 1)(1 - e^{-gh}). \end{aligned}$$

Объединяя случаи $k=0$ и $k \geq 1$, получаем искомую формулу

$$P_d(k) = \begin{cases} \frac{1}{gh} (gh + e^{-gh}), & k=0, \\ \frac{1}{gh} (e^{gh} + e^{-gh}) e^{-kgh}, & k \geq 1. \end{cases} \quad (II)$$

Нетрудно проверить, что $\sum_{k=0}^{\infty} P_d(k) = 1$.

3.1.2. Распределение диаметров изображений стримеров после дискретизации

Очевидно, что функция распределения диаметров окружностей $F_D(t)$ тоже должна измениться после дискретизации за счет возможных случайных сдвигов как левого, так и правого краев окружности.

Рассмотрим сначала поведение левого края окружности. Первоначальное значение диаметра окружности сократится при сдвиге левого края вправо из-за попадания случайной величины x (рис. 4) в интервал $(-sh, 0)$. Однако основной вклад дадут случаи удлинения диаметра при сдвиге левого края влево, когда x попадает в интервал $(0, (1-s)h)$.

Таким образом, измененный диаметр получается как сумма двух независимых случайных величин $D+x$, а его функция распределения будет сверткой функций распределений этих случайных величин

$$F_{D+x}(t) = \int F_D(t-u) f_x(u) du.$$

Учитывая опять следствие 2 теоремы I и то, что $F_D(t) = F_R(\frac{t}{2})$, получаем

$$F_{D+x}(t) = \frac{1}{h} \int_{-sh}^{(1-s)h} F_R\left(\frac{t-u}{2}\right) du. \quad (I2)$$

Аналогично учитывается случайный сдвиг правого края диаметра окружности. При этом нужно иметь в виду, что после дискретизации величина диаметра примет значение $Z = kh$, если диаметр, измененный уже за счет сдвига левого края, окажется в интервале

$(kh - (1-s)h; kh + sh)$, т.е.

$$P\{Z = kh\} = \int_{(k-1-s)h}^{(k+s)h} dF_{D+x}(t) = F_{D+x}((k+s)h) - F_{D+x}((k-1+s)h).$$

Если обозначить теперь через DD целочисленную случайную величину - длину серии единиц, порожденную окружностью при дискретизации, и воспользоваться (I2), то

$$P_{DD}(k) = P\{DD=k\} = \frac{1}{h} \int_{-h}^{(1-s)h} [F_R\left(\frac{h(k+s)-t}{2}\right) - F_R\left(\frac{h(k-1+s)-t}{2}\right)] dt, \quad (I3)$$

$k = 1, 2, \dots, k_{max},$

где k_{max} - определяется из неравенства

$$h(k_{max} - 1 + s) \leq 2R_{max} < h(k_{max} + s).$$

При практических приложениях этой формулы следует иметь в виду, что диаметры окружностей ограничены сверху величиной

$2R_{max} \geq 1$, поэтому $P_{DD}(k)$ принимает ненулевые значения только при нескольких k , а при $k > k_{max}$ $P_{DD}(k) = 0$.

3.1.3. Распределение числа стримеров в сгустке

Если ввести обозначение

$$J = \frac{1 - e^{-gh}}{gh} \sum_{k=D_{min}}^{D_{max}} e^{-kgh} P_{DD}(k), \quad (I4)$$

то подобно тому, как это делалось при выводе теоремы 4 в предположении справедливости гипотезы S , получаем, что после дискретизации сгусток будет состоять из n окружностей с вероятностью

$$P(n) = J(1-J)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \dots. \quad (I5)$$

Среднее значение и дисперсия числа n будут равны соответственно

$$\bar{n} = J^{-1}, \quad D_n = (1-J)J^{-2}.$$

3.1.4. Распределение промежутков между сгустками после дискретизации

Так же, как и при выводе теоремы 3, получаем, что вероятность $P_m(k)$ того, что промежуток m между двумя сгустками будет состоять из k нулей, должна быть пропорциональна e^{-kgh} ($k \geq 1$).

Нормирующий множитель находим из условия $\sum_{k=1}^{\infty} P_m(k) = 1$ и получаем

$$P_m(k) = (e^{gh} - 1) e^{-kgh}. \quad (I6)$$

Обозначая $p = 1 - e^{-gh}$, мы можем записать (I6) в виде, аналогичном (I5) $P_m(k) = p(1-p)^{k-1}$,

так что для среднего значения и дисперсии промежутка получаются формулы

$$\bar{m} = \frac{1}{p} = \frac{1}{1 - e^{-gh}}; \quad D_m = \frac{1-p}{p^2} = \frac{e^{-gh}}{(1 - e^{-gh})^2}. \quad (I7)$$

3.2. Линейные уравнения для распределения длин сгустков после дискретизации

Обозначим через $P_y(k)$ вероятность того, что длина сгустка y будет равна kh , и воспользуемся тем же подходом, который был применен при выводе интегрального уравнения (I0). Присоединяя случайным образом еще одну окружность к сгустку, получим другое значение $\hat{P}_y(k)$ той же вероятности для события $y = kh$. Связь между этими вероятностями может быть найдена перенормировкой процесса, как и при выводе зависимости (7):

$$P_y(k) = \frac{1}{J+1} \hat{P}_y(k) + \frac{1}{J+1} P_{DD}(k), \quad (k \geq D_{min}). \quad (I8)$$

Одновременно с этим, тем же путем, как и при выводе (9), получим из формулы (8) (см. рис. 2)

$$\hat{P}_y(k|z, x) = P\{x > s | x\} \delta_k^z + P\{x \leq s | x\} \delta_k^{z+x},$$

где δ_k^i - символ Кронекера.

Усреднением по z и x получим

$$\begin{aligned} \hat{P}_y(x) &= \sum_{z=0}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} P_y(k|z, x) P_y(z) P_d(x) = \\ &= P_y(k) \sum_{x=0}^{\infty} P\{x > s | x\} P_d(x) + \sum_{x=0}^{\infty} P\{x \leq s | x\} P_d(x) P_y(k-x). \end{aligned}$$

Подставляя это в (18) и обозначая

$$\beta = [1 - P\{0 \leq s\} P_d(0)]^{-1}, \quad (19)$$

приходим к рекуррентным соотношениям

$$P_y(k) = \begin{cases} \beta \left[\sum_{x=0}^{\infty} P\{x \leq s | x\} P_d(x) P_y(k-x) + J P_{DD}(k) \right], & kh \geq D_{min}, \\ 0, & kh < D_{min}, \end{cases}$$

где $P\{x \leq s | x\} = \sum_{i=x}^{\infty} P_{DD}(i)$.

Таким образом, нами доказана следующая

Теорема 6. Распределение вероятностей длин сгустков после дискретизации является решением рекуррентных уравнений

$$P_y(k) = \beta \left[\sum_{x=0}^{\infty} \sum_{s=x}^{\infty} P_{DD}(s) P_d(x) P_y(k-x) + J P_{DD}(k) \right], \quad kh \geq D_{min} \quad (20)$$

при условии $P_y(k) = 0, \quad kh < D_{min}$.

Значение β определено в (19), $P_d(x)$ - в (11) и $P_{DD}(k)$ - в (13).

Как уже отмечалось в конце п. 3.1.2, при значениях шага дискретизации, близких к среднему диаметру изображения стримера, получается, что $P_{DD}(k)$ принимает всего два или три ненулевых значения, что значительно упрощает решение уравнений (20). Так, например, при $k_{max} = 2$ вероятность $P_y(k)$ определяется всего по двум предыдущим значениям

$$P_y(k) = \beta [P_d(1) P_y(k-1) + P_{DD}(2) P_d(2) P_y(k-2)],$$

начиная с

$$P_y(1) = \beta J P_{DD}(1),$$

$$P_y(2) = \beta [P_d(1) P_y(1) + J P_{DD}(2)].$$

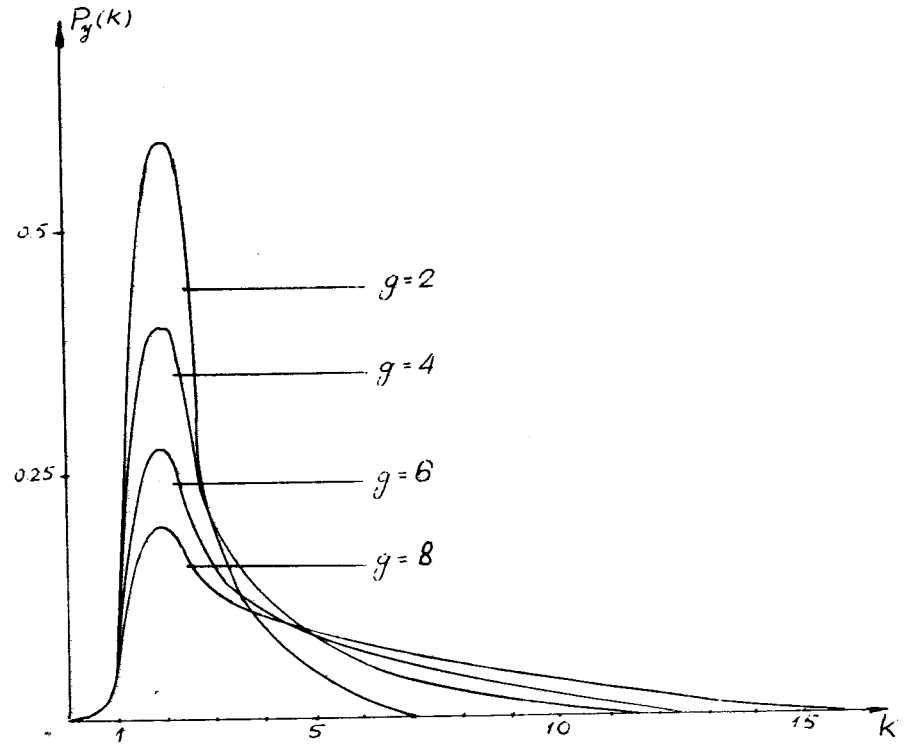


Рис. 5.

На рис. 5 приведены графики конкретных расчетов распределения $P_y(k)$ при значениях первичной плотности ионизации $g = 2; 4; 6$ и 8 стримеров/см и значениях шага сканирования $h = 2^{-9} \cdot 100$ см.

В качестве закона распределения случайных диаметров изображений стримеров при расчете был выбран усеченный нормальный закон

$$F_D(x) = \begin{cases} 0, & x \leq D_{min} \\ \frac{N}{\sigma_D \sqrt{2\pi}} \int_{D_{min}}^x e^{-\frac{(t-c)^2}{2\sigma_D^2}} dt, & D_{min} < x \leq D_{max} \\ 1, & x > D_{max} \end{cases} \quad (21)$$

(N - нормирующая константа),
 при значениях $C = 1,2$; $D_{min} = 0,9$; $D_{max} = 1,4$; $\bar{\sigma}_D = 0,3$
 (размеры даны в миллиметрах). Константа S , характеризующая
 точность процесса дискретизации, была взята равной $0,1$.

Такой, возможно, упрощенный выбор вида $F_D(x)$ обусловлен отсутствием в настоящее время реальных экспериментальных данных о распределении размеров одиночных стримеров при измерении их на каком-либо устройстве, однако он может служить определенным приближением, например, в условиях динамического изменения уровня дискриминации^{16/} или при ограниченном диапазоне изменения яркости стримеров. Существенно, что любая коррекция может быть легко внесена, так как выводы всех предыдущих формул и теорем были сделаны для $F_D(x)$ произвольного вида.

4. Описание монте-карловской модели стримерного трека

Цифровая модель стримерного трека была построена в соответствии со схемой п. 2. В начале по формулам

$$l_k = \frac{1}{g} \sum_{i=1}^k (-\ln x_i) \quad k=1, 2, \dots, n$$

(x_i - текущее случайное число, равномерно распределенное в интервале от 0 до 1) были вычислены координаты n центров окружностей, и с помощью подпрограммы, реализующей распределение (21), получен набор их радиусов R_k ($l_1 = R_1$). Число n выбиралось так, чтобы создать модель трека метровой длины, т.е. чтобы удовлетворить неравенству

$$l_{n-1} + R_{n-1} \leq 1000 < l_n + R_n$$

(измерения всех величин велись в миллиметрах).

Далее в соответствии с п. 3 осуществлялась дискретизация полученной непрерывной модели и массив ИТ заполнялся единицами и нулями, имитирующими отсчеты и их пропуски. Ниже в обозначении $k(x) = \text{int}(x/n + 0,5)$ для ближайшего к x целого, кратного h , даны формулы для вычисления начал и концов сгустков после дискретизации

$$B_i = \begin{cases} k(b_i) & \text{при } h k(b_i) - b_i > sh, \\ k(b_i) + 1 & \text{при } h k(b_i) - b_i \leq sh, \end{cases}$$

$$F_i = \begin{cases} k(f_i) & \text{при } h k(f_i) - f_i \leq sh, \\ k(f_i) + 1 & \text{при } h k(f_i) - f_i > sh, \end{cases}$$

где b_i и f_i - обозначения начал и концов сгустков до дискретизации.

При этом в случаях, когда оказывалось, что $F_i = B_{i+1}$ (предыдущий сгусток сливался со следующим), в массивы начал и концов сгустков вносилась соответствующая коррекция и число сгустков убавлялось на единицу.

Дискретизированные данные также обрабатывались для получения гистограмм длин сгустков и пропусков, а также оценки средних значений этих величин. Необходимая точность оценок и гистограмм достигалась повторением процесса получения и обработки метрового трека.

5. Обсуждение результатов и статистические выводы

Сравнение распределений $P_y(k)$, полученных путем моделирования безо всяких допущений, с результатами вычислений по рекуррентным соотношениям (20), полученным с помощью гипотезы \mathcal{S} , было проведено по критерию χ^2 . Для оценки влияния шага дискретизации все вычисления проводились дважды для $h_1 = 1000 \cdot 2^{-9}$ мм и $h_2 = 1000 \cdot 2^{-10}$ мм.

Результаты полученных вычислений χ^2 приведены в таблице I. Превышение 1%-ного критического уровня для распределения χ^2 с 31 степенью свободы, равного 52,2, наблюдалось только для h_1 при $g = 0,2$. Таким образом, практическую применимость теорем 4, 5 и 6 можно считать в большой степени обоснованной.

Таблица 1

$h \backslash \gamma$	0,2	0,4	0,6	0,8
1,93	72,55	40,19	20,19	17,24
0,97	25,58	14,65	8,31	11,46

С точки зрения применения результатов теории для конструирования оценок коэффициента ионизации γ , наиболее простой является зависимость от γ закона распределения (16) длин дискретизированных промежутков.

Пусть по данным сканирования метрового трека мы получаем n длин промежутков m_1, m_2, \dots, m_n .

Единственный максимум функции правдоподобия

$$L = \ln \prod_{i=1}^n P_m(m_i) = n \ln(e^{gh} - 1) - gh \sum_{i=1}^n m_i$$

будет достигаться в точке

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{h} \ln \frac{\bar{m}}{\bar{m} - 1}, \quad (22)$$

где $\bar{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n m_i$ - среднее арифметическое наблюдаемых длин промежутков.

Среднеквадратичное значение этой оценки максимального правдоподобия приблизительно равно

$$\sigma_{\hat{\gamma}} \approx \frac{\sigma_{\bar{m}}}{h \bar{m} (\bar{m} - 1)}, \quad (23)$$

где в соответствии с (17)

$$\sigma_{\bar{m}} = n^{-1/2} (e^{gh/2} - e^{-gh/2})^{-1}.$$

Значения \bar{m} , $\sigma_{\bar{m}}$, $\sigma_{\hat{\gamma}}$ и относительной ошибки $\sigma_{\hat{\gamma}} / \hat{\gamma}$, вычисленные для $h = h_1$, можно получить из таблицы 2. Однако пользоваться результатами этой таблицы для определения n , при котором можно достичь, например, 5%-й относительной ошибки, следует с большой осторожностью, так как оценка (23) является оценкой снизу.

Таблица 2

γ	\bar{m}	$\sqrt{n} \sigma_{\bar{m}}$	$\sqrt{n} \sigma_{\hat{\gamma}}$	$\sqrt{n} \sigma_{\hat{\gamma}} / \hat{\gamma}$
0,2	3,125	2,57	0,104	0,52
0,4	1,85	1,25	0,214	0,54
0,6	1,45	0,81	0,336	0,56
0,8	1,27	0,59	0,465	0,58

Для увеличения точности оценки (22) можно воспользоваться независимостью длин промежутков и сгустков, следующей из теоремы 2, и получить еще одну независимую от (22) оценку γ , пользуясь теоремой 6. К сожалению, $P_{\gamma}(k)$ не зависит явно от γ , и это не дает возможности использовать метод максимального правдоподобия.

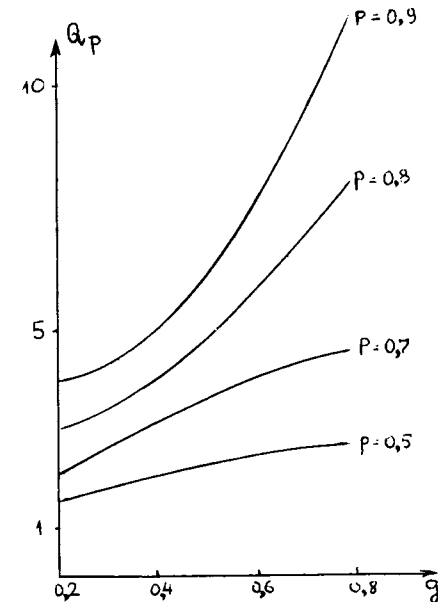


Рис. 6.

Как следует из рис. 6, среди различных квантилей Q_p распределения $P_g(k)$ наиболее оптимальным с точки зрения зависимости от g является $Q_{80\%}$. Дальнейшее увеличение вероятности $q = 1-p$ превышения квантиля опасно, так как таких событий будет слишком мало в выборке и нельзя будет воспользоваться асимптотической близостью эмпирического квантиля Q_p к теоретическому при росте n .

Если воспользоваться асимптотической оценкой дисперсии выборочного квантиля вида (см. /10/)

$$\sigma_a = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{P_g(Q) \sqrt{n}},$$

то для относительной ошибки такой квантильной оценки \hat{g}_a получаем всего 15-20%. Тем не менее ее можно использовать для уточнения \hat{g} путем известной операции взвешивания. Уточненная оценка

$$\hat{g} = \left(\frac{\hat{g}_g}{\sigma_g^2} + \frac{\hat{g}_a}{\sigma_a^2} \right) \left(\frac{1}{\sigma_g^2} + \frac{1}{\sigma_a^2} \right)^{-1}$$

будет иметь среднеквадратичную ошибку

$$\sigma_{\hat{g}} = \frac{\sigma_g \cdot \sigma_a}{\sqrt{\sigma_g^2 + \sigma_a^2}},$$

меньшую, чем ошибка σ_g .

Л и т е р а т у р а

1. R.L.Gluckstern. Nucl. Instr. Meth. 45, p. 166, 1966.
2. P.Duinker, E.Quercigh, CERN-DD/DH/70/25.
3. J.S.Danburg, G.R.Lynch, Alvarez programming group Note N P-160, 1967.
4. Ц.И.Иоселдани, Г.А.Ососков. Сообщение ОИЯИ, IO-8144, Дубна 1974.

5. С.-P.Glasneck, G.Peter, PHE 74-10, Berlin, 1975.
6. К.Гласнек, Г.М.Кадыков. Сообщения ОИЯИ, IO-IO929, Дубна 1977.
7. G.Bohm et al. Preprint ANL-8055, 1972.
8. Г.М.Кадыков и др. Препринт ОИЯИ, ДIO-70IO, Дубна, 1973.
9. А.Я.Хинчин. Работы по математической теории массового обслуживания. Физматгиз. М., 1963.
10. И.В.Дунин-Барковский и Н.В.Смирнов. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). Гостехиздат, М., 1955.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 декабря 1977 года.