ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P5 - 11042

С.И.Сердюкова

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ШАГА СЕТКИ

1977

P5 - 11042

С.И.Сердюкова

ПРИМЕР ИССЛЕДОВАНИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ШАГА СЕТКИ

Направлено в "Математические заметки"

Сердюкова С.И.

P5 - 11042

Пример исследования асимптотической устойчивости разностной схемы с краевыми условиями, зависящими от шага сетки

Рассматривается разностная аппроксимация третьей краевой задачи для уравнения теплопроводности. Исследуется устойчивость в равномерной метрике и в L_2 для всех вещественных значений параметров. Выделена зона асимптотической устойчивости, ограниченная ветвью гиперболы. Вне зоны устойчивости получены точные по порядку оценки скорости роста норм степеней оператора перехода от слоя к слою: $\|G^n\| \asymp \exp\{c \frac{n}{N^2}\}$. Здесь G -оператор перехода от слоя к слою, $t = n\tau$, t - время, τ - шаг по t, N - число точек по пространственному переменному. Такой рост обеспечивают точки спектра, расположенные вне единичного круга. При переходе из зоны устойчивости в зону неустойчивости единица становится трехкратной точкой спектра. Это приводит к неустойчивости вида $\|G^n\| \asymp N^2$, $n \gg N^2$. Доказательство сводится к построению асимптотик интегралов с тремя параметрами. Основные оценки получены с помощью метода перевала.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Serdjukova S.I.

P5 - 11042

An Example of Investigation of Asymptotic Stability of the Difference Scheme with Boundary Conditions Dependent on the Net Step

We investigate difference analogue of the third boundary problem for heat conduction equation. Samarsky and Gulin proved the stability in C, when $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$. In this paper we consider all real σ_1, σ_2. The domain of stability is restricted by the branch of hyperbola $1/\sigma_1 + 1/\sigma_2 + 1 = 0$, going through the origion of coordinates. When (σ_1, σ_2) belongs to the boundary of stability, $\|G^n\| \asymp N^2$, $n \gg N^2$, G is the operator of transition from one layer to another. When (σ_1, σ_2) is outside the domain of stability, $\|G^n\| \asymp \exp\{c \frac{n}{N^2}\}$.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Асимптотические методы эффективно используются при исследовании устойчивости разностных уравнений. В настоящей работе возможности асимптотических методов в исследовании краевых задач с параметрами демонстрируются на примере из книги А.А.Самарского и А.В.Гулина:/1/

$$\frac{u_\nu^{n+1} - u_\nu^n}{\tau} = \frac{u_{\nu+1}^n - 2u_\nu^n + u_{\nu-1}^n}{h^2}, \quad n \geqslant 0, \quad \nu = 1, \dots, N-1; \quad \text{(I.a)}$$

$$-\frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \sigma_1 u_0^n + \alpha_1 \frac{u_2^n - 2u_1^n + u_0^n}{h} = 0;$$

$$\text{(I.б)}$$

$$\frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} + \sigma_2 u_N^n + \alpha_2 \frac{u_N^n - 2u_{N-1}^n + u_{N-2}^n}{h} = 0;$$

$$\alpha = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}, \quad \alpha_1 \geqslant 0, \quad \alpha_2 \geqslant 0.$$

А.А.Самарским и А.В.Гулиным доказана устойчивость (I) при $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$. В предлагаемой работе получены точные по порядку оценки скорости роста норм степеней оператора перехода от слоя к слою, $\| G^n \|$ при $n \to \infty$, для всех вещественных σ_1, σ_2.

Дадим определение асимптотической устойчивости. Обозначим через $\mathcal{H}$ гильбертово пространство векторов $u = (u_0, \dots, u_N)$, удовлетворяющих (I.б). Норма в $\mathcal{H}$ дается соотношением

$$\| u \|^2 = \sum_{1}^{N-1} | u_\nu |^2 .$$

Задача (I) устойчива, если существует постоянная c, не зависящая от n, N и такая, что неравенство $\| u^n \| \leq c \, \| u^0 \|$ справедливо для всех $u^0 \subset \mathcal{H}$, $n > 0$, $N > 0$. Комплексное число z_0 назовем точкой спектра оператора G, если существует ненулевой вектор $u^0 \subset \mathcal{H}$ такой, что $G u^0 = z_0 u^0$. Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема устойчивости</u>. Гипербола $\frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2} + 1 = 0$ делит плоскость (σ_1, σ_2) на три области: G_1, G_2, G_3.

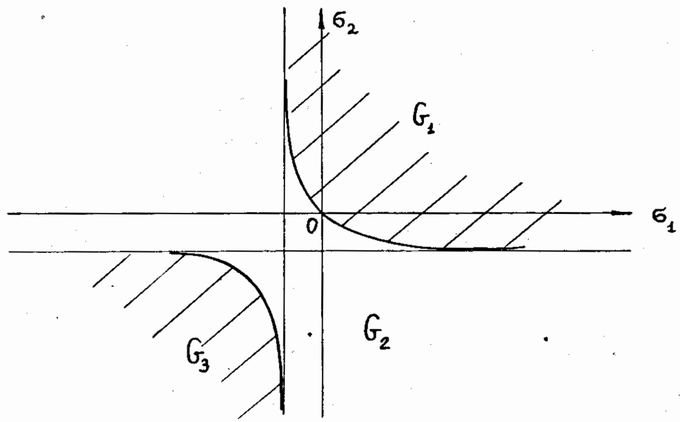

Рис.I

Если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_1$, то (I) асимптотически устойчива в L_2: $\| G^n \| \leq c$, $n \geq 0$. Если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_2 \cup G_3$, то (I) асимптотически неустойчива: $\| G^n \| \asymp e^{c \frac{n}{N^2}}$. При этом, если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_2$, то G имеет одну точку спектра вне единичного круга. Если же $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_3$, то G имеет две точки спектра, бо́льшие по модулю единицы. Если (σ_1, σ_2) принадлежит ветви гиперболы, разделяющей G_1 и G_2, то при $n \gg N^2$ $\| G^n \| \asymp N^2$.

<u>Доказательство</u>. Для устойчивости (I) необходимо, чтобы была устойчива соответствующая задача Коши ($\alpha = \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$) и чтобы спектр G лежал в единичном круге. Ограничимся рассмотрением $\alpha < \frac{1}{2}$. При $\alpha = \frac{1}{2}$ появляется дополнительная определяющая точка. Это не вносит принципиальных трудностей, но приводит к более громоздким выкладкам. Исследуем спектр G. Общее решение

$$(G - zI) u = 0, \quad u \subset \mathcal{H},$$

имеет вид

$$u_\nu = c_1 \varkappa_1^\nu + c_2 \varkappa_2^\nu, \quad \nu = 1, 2, \dots, N-1. \qquad (2)$$

Здесь $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ – собственные значения резольвентной матрицы

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1 - 2\alpha - z}{\alpha} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

При $|z| \geq 1$, $z \neq 1$, $|\varkappa_1| \leq 1$, $|\varkappa_2| \geq 1$; $\varkappa_1(1) = \varkappa_2(1) = 1$.

В окрестности $z = 1$ справедливо разложение

$$x_{1,2}(\varphi) = \exp\left\{\mp e^{i\frac{\pi}{4}}\cdot\sqrt{\varphi} + O(\varphi)\right\}, \tag{4}$$

$$x_2 = x_1^{-1}, \quad z = e^{i\varphi}, \quad \varphi = \rho\cdot e^{i\omega}, \; -\frac{3\pi}{2} \le \omega \le \frac{\pi}{2} .$$

$z=1$ является точкой ветвления. Функции $x_1(\varphi)$, $x_2(\varphi)$ определены на плоскости с разрезом:

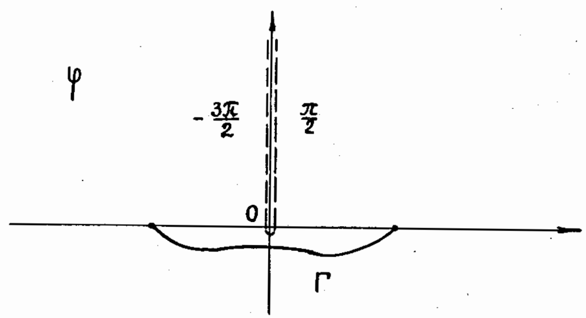

Рис.2

Постоянные c_1, c_2 в (2) определяются из краевых условий (I.B):

$$c_1(\sigma_1 h + (1-x) + \alpha_1(1-x)^2) + c_2(\sigma_1 h + (1-x^{-1}) + \alpha_1(1-x^{-1})^2) = 0,$$

$$c_2 x^N(\sigma_2 h + (1-x^{-1}) + \alpha_2(1-x^{-1})^2) + C_2 x^{-N}(\sigma_2 h + (1-x) + \alpha_2(1-x)^2) = 0,$$

здесь $x = x_1(z)$. Таким образом, $z = z_0$ является точкой спектра тогда и только тогда, когда

$$Det(z_0) = (x^{-N}\cdot(\sigma_1 h + (1-x) + \alpha_1(1-x)^2)(\sigma_2 h + (1-x) + \alpha_2(1-x)^2) - x^N(\sigma_1 h + (1-x^{-1}) + \alpha_1(1-x^{-1})^2)(\sigma_2 h + (1-x^{-1}) + \alpha_2(1-x^{-1})^2)\Big|_{z=z_0} = 0. \tag{5}$$

Элементарное исследование графиков функций

$$y = x^{2N}, \quad y = \frac{\sigma_1 h + (1-x) + \alpha_1(1-x)^2}{\sigma_1 h + (1-x^{-1}) + \alpha_1(1-x^{-1})^2}\cdot\frac{\sigma_2 h + (1-x) + \alpha_2(1-x)^2}{\sigma_2 h + (1-x^{-1}) + \alpha_2(1-x^{-1})^2}$$

показывает, что при $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_1$ нет точек пересечения. Если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_2$, то графики пересекаются в двух точках $x \sim 1 - ch$ и $x \sim 1 + ch$. Если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_3$, то графики пересекаются в четырех точках: $x \sim 1 - c_1 h$, $x \sim 1 + c_1 h$, $x \sim 1 - c_2 h$ и $x \sim 1 + c_2 h$. Учитывая асимптотику x в окрестности $\varphi = 0$ (4), находим, что, если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_2 \cup G_3$, то G имеет точки спектра вне единичного круга $z_0 \sim 1 + ch^2$. При этом $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_2$ отвечает одна вещественная точка спектра, бóльшая по модулю единицы; $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_3$ отвечает пара таких точек. Остальные решения уравнения (5) расположены на единичной окружности $|x| = 1$. Убедиться в этом можно следующим образом. Заметим, что речь идет о корнях многочлена степени $2N$, так что всего должно быть $2N$ корней. Положим $x = e^{i\omega}$, тогда ω должно быть вещественным решением уравнения

$$N\omega = -\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\omega\,(1 + 4\alpha_1\sin^2\frac{\omega}{2})}{\sigma_1 h + 2\sin^2\frac{\omega}{2}(1 - 2\alpha_1\cos\omega)} - \tag{6}$$

$$-\mathrm{arctg}\,\frac{\sin\omega\,(1 + 4\alpha_2\sin^2\frac{\omega}{2})}{\sigma_2 h + 2\sin^2\frac{\omega}{2}(1 - 2\alpha_2\cos\omega)} + k\pi, \quad k = 0, 1, \dots, 2N-1.$$

Рассмотрим прямоугольник с основанием $[0, 2\pi]$ высоты $2\pi N$. Элементарный анализ показывает, что функция в правой части уравнения (6) состоит, как минимум, из ($2N-4$) однозначных непрерывных непересекающихся ветвей с концами на боковых стенках рассматриваемого прямоугольника. Каждая из этих ветвей пересекается с диагональю прямоугольника. Отсюда в общем случае получаем, как минимум, ($2N-4$) решения (5), равных по модулю единице. Как было установлено выше, если (σ_1, σ_2) $\subset G_2$, то (5) имеет два вещественных корня, не равных по модулю единице. Недостающие два корня расположены на единичной окружности и получаются дополнительным пересечением диагонали ветвями правой части, проходящими через точки $(0, 0)$ и $(2\pi, 2\pi N)$. Дополнительное пересечение имеет место, если график правой части достаточно круто выходит из начала координат. Это условие эквивалентно условию $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_2$. Если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_3$, то ветви правой части, проходящие через $(0, 0)$ и $(2\pi, 2\pi N)$, не имеют дополнительных точек пересечения с диагональю. Но выше было установлено, что в этом случае уравнение (5) имеет четыре вещественных корня, не равных по модулю единице. Если $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_1$, то правая часть (6) состоит из $2N$ ветвей, каждая из которых пересекается с диагональю, так что все решения (5) расположены на единичной окружности. В момент прохождения ветвей гиперболы комплексно-сопряжённые пары корней покидают единичную окружность. При этом $\varkappa=1$ становится корнем кратности 3. Для остальных (σ_1, σ_2) $\varkappa=1$ является простым корнем. Напомним, что функции $\varkappa_1(\varphi)$, $\varkappa_2(\varphi)$ определены на плоскости с разрезом по положительной части мнимой оси. Заметим, что все точки спектра оператора G расположены на мнимой оси. Точнее, действительным решениям (5), ме́ньшим по модулю единицы, отвечают точки спектра,

расположенные на отрицательной части мнимой оси. Решениям (5), равным по модулю единице, отвечают точки спектра, расположенные на левом и правом берегах разреза положительной части мнимой оси. При построении асимптотик делается замена переменных:

$$\varkappa(\varphi) = exp\left\{-e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot t\right\}.$$

На t-плоскости точки спектра оператора G располагаются на биссектрисах квадрантов. При этом действительным решениям (5), ме́ньшим по модулю единицы, отвечают точки спектра, расположенные на биссектрисе четвертого квадранта. Действительным решениям (5), бо́льшим по модулю единицы, отвечают точки спектра, расположенные на биссектрисе второго квадранта. Решениям (5), равным по модулю единице, отвечают точки спектра, расположенные на биссектрисах первого и третьего квадрантов. Спектр G исследован. В частности, из полученных результатов следует, что для асимптотической устойчивости (I) необходимо, чтобы $(\sigma_1, \sigma_2) \subset G_1$. Чтобы получить необходимые и достаточные условия устойчивости, оценим $\|G^n\|$. Для этого представим G^n в виде контурного интеграла от резольвенты:

$$G^n = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} (G - zI)^{-1} \cdot z^n \, dz .$$

Γ – произвольный замкнутый контур, охватывающий все точки спектра G. Для всех (σ_1, σ_2) в качестве исходного контура можно взять окружность $|z| = 1+\rho$, $\rho > 0$, ρ не зависит от h. В процессе доказательства Γ деформируется, и нам потребуется явный вид резольвенты в окрестности единичной окружности $|z|=1$. В окрестности $z=1$ резольвентная матрица (3) приводится к треугольному виду:

$$TMT^{-1} = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 1 \\ 0 & \varkappa_2 \end{pmatrix} \quad , \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} \varkappa_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Рассуждая так же, как в /2/, и учитывая структуру T^{-1}, получаем

$$w_\nu^{I} = -\sum_{j=1}^{\nu-1} \varkappa^{\nu+j} \frac{\varkappa^{-2}-\varkappa^{-2-2j}}{1-\varkappa^{-2}} \frac{g_j}{\alpha} - \sum_{j=\nu}^{N-1} \varkappa^{\nu+j} \frac{\varkappa^{-2}-\varkappa^{-2\nu}}{1-\varkappa^{-2}} \frac{g_j}{\alpha} +$$

$$+ \frac{\varkappa^{N}}{\varkappa^{2N} - \frac{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \frac{\sigma_2 h+(1-\varkappa)+\alpha_2(1-\varkappa)^2}{\sigma_2 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_2(1-\varkappa^{-1})^2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{1+\alpha_1(2-\varkappa-\varkappa^{-1})}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \left(\varkappa^{N-\nu+1} - \varkappa^{-N+\nu-1} \frac{\sigma_2 h+(1-\varkappa)+\alpha_2(1-\varkappa)^2}{\sigma_2 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_2(1-\varkappa^{-1})^2}\right) \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \frac{g_j}{\alpha} \varkappa^{j} \right.$$

$$\left. + \left(\varkappa^{\nu-1} - \varkappa^{-\nu+1} \frac{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2}\right) \cdot \sum_{j=1}^{N-1} \frac{\varkappa^{N+j}-\varkappa^{N-j}}{\varkappa-\varkappa^{-1}} \frac{g_j}{\alpha} \right\} , \qquad (7)$$

$$w_\nu^{II} = -\sum_{j=\nu}^{N-1} \varkappa^{j-\nu+1} \frac{g_j}{\alpha} + \frac{\varkappa^{2N-\nu+1}}{\varkappa^{2N} - \frac{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \frac{\sigma_2 h+(1-\varkappa)+\alpha_2(1-\varkappa)^2}{\sigma_2 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_2(1-\varkappa^{-1})^2}} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{(\varkappa-\varkappa^{-1})(1+\alpha_1(2-\varkappa-\varkappa^{-1}))}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \sum_{j=1}^{N-1} \varkappa^{j} \frac{g_j}{\alpha} + \frac{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{j=1}^{N-1} (\varkappa^{j}-\varkappa^{-j}) \frac{g_j}{\alpha} \right\} .$$

Далее $\|G^n\|$ оценивается по-разному для $n<cN^2$ и $n\geqslant cN^2$. Предварительно делаем замену переменных $\varkappa(\varphi) = exp(-e^{i\frac{\pi}{4}}t)$.

<u>$n < cN^2$</u>.

Начнем с построения асимптотик интегралов:

$$I_\nu^n = \int_\Gamma \frac{t z^n \varkappa^N}{\varkappa^{2N} - \frac{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \frac{\sigma_2 h+(1-\varkappa)+\alpha_2(1-\varkappa)^2}{\sigma_2 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_2(1-\varkappa^{-1})^2}} \cdot \qquad (8)$$

$$\cdot \left\{ \frac{1+\alpha_1(2-\varkappa-\varkappa^{-1})}{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2} \left(\varkappa^{N-\nu+1} - \varkappa^{-N+\nu-1} \frac{\sigma_2 h+(1-\varkappa)+\alpha_2(1-\varkappa)^2}{\sigma_2 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_2(1-\varkappa^{-1})^2}\right) \sum_{j=1}^{N-1} \varkappa^{j} \frac{g_j}{\alpha} \right\} dt .$$

Второе слагаемое под знаком интеграла перепишем в виде

$$\varkappa^{\nu-1} \cdot z^n \frac{1+\alpha_1(2-\varkappa-\varkappa^{-1})}{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2} \sum_{j=1}^{N-1} \varkappa^{j} \frac{g_j}{\alpha} + \varkappa^{2N+\nu-1} \cdot z^n \frac{1+\alpha_1(2-\varkappa-\varkappa^{-1})}{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sigma_1 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_1(1-\varkappa^{-1})^2}{\sigma_1 h+(1-\varkappa)+\alpha_1(1-\varkappa)^2} \cdot \frac{\sigma_2 h+(1-\varkappa^{-1})+\alpha_2(1-\varkappa^{-1})^2}{\sigma_2 h+(1-\varkappa)+\alpha_2(1-\varkappa)^2} \sum_{j=1}^{N-1} \varkappa^{j} \frac{g_j}{\alpha} .$$

Соответственно далее оцениваем три интеграла: I_1, I_2, I_3. Первый и третий интегралы содержат степени $\varkappa$ выше N. Второй интеграл оценивается по-разному для $\nu+j<cn$ и $\nu+j\geqslant cn$. При $\nu+j\geqslant cn$ справедлива тривиальная оценка:

$$|I^n_{\nu 2}| \leq a \sum_j |g_j| \cdot e^{-b(\nu+j)} , \quad \sum_\nu |I^n_{\nu 2}|^2 \leq c_1 .$$

При $\nu+j<cn$ исходный контур интегрирования перетягиваем в контур, который отмечен на рис.3 пунктиром:

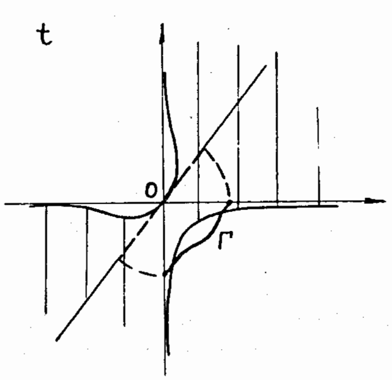

Рис.3

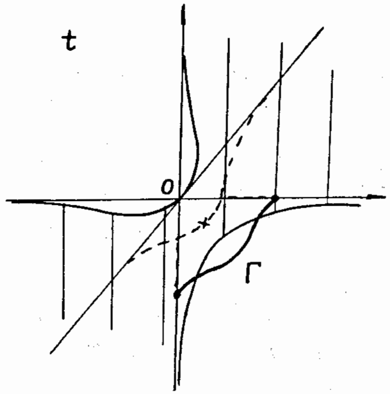

Рис.4

Интегралы по соединяющим дугам допускают тривиальную оценку:

$$|\breve{I}^n_\nu| \le a\sum_j |g_j|\cdot\left(e^{-b(\nu+j)}+e^{-bn}\right),\quad \sum_\nu |\breve{I}^n_\nu|^2\le c_2 .$$

Интегралы по отрезкам биссектрисы первого и третьего квадрантов могут быть интерпретированы как коэффициенты Фурье функции из L_2, отсюда следует ограниченность нормы последовательности этих интегралов в ℓ_2. Заметим, что при $\sigma_1<0$ контур интегрирования протаскивается через полюс $x_0=1+\sigma_1 h+O(h^2)$. При этом вычет допускает такую оценку:

$$|Res^n_\nu|<\frac{a}{N}\sum_j|g_j| ,\quad \sum_\nu |Res^n_\nu|^2<c_3 .$$

Оценки I_2 получены. Первый и третий интегралы оцениваются с помощью метода перевала. При этом исходный контур интегирования деформируется в контур, проходящий через точки перевала функций

$x^{2N-\nu+j}\cdot x^n$ и $x^{2N+\nu+j}\cdot x^n$ соответственно. Этот контур дан на рис.4 пунктиром, звездочкой отмечена точка перевала. Заметим, что в этом случае контур не протаскивается через полюс, так что поправка на вычет не нужна. С помощью метода перевала получаем такие оценки:

$$|I^n_{\nu 1,3}|<\frac{a}{\sqrt{n}}\,\frac{e^{-b\frac{N^2}{n}}}{1-e^{-b\frac{N^2}{n}}}\sum_j|g_j| ,\quad \sum_\nu |I^n_{\nu 1,3}|^2<c_4\frac{N^2}{n}e^{-\frac{bN^2}{n}} .$$

Интегралы, отвечающие остальным слагаемым w^I_ν, w^{II}_ν, оцениваются аналогично.

$\underline{n\ge cN^2}$.

В этом случае применима техника оценок, изложенная в предшествующей работе автора /2/. При этом исходный контур интегрирования деформируется в контур, который дан на рис.5 пунктиром.

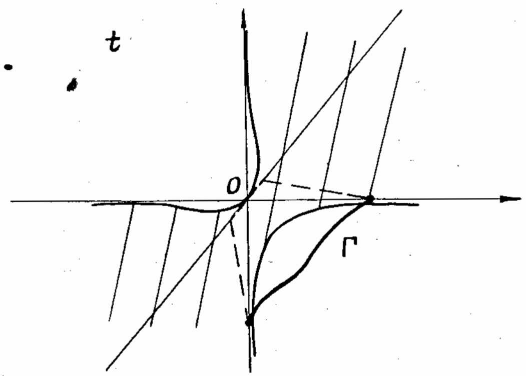

Рис.5

Оценка $\|G^n\|\asymp N^2$ для (σ_1 , σ_2), принадлежащих ветви гиперболы, разделяющей G_1 и G_2, получается следующим образом. Для рассматриваемых (σ_1 , σ_2) подынтегральная функция в (8) имеет в начале координат полюс второго порядка по t. Рост порядка N^2 обеспечивает полувычет, на который делается поправка при деформации контура. При (σ_1, σ_2) $\subset G_2 \cup G_3$ подынтегральная функция не имеет особенностей в начале координат. При прохождении второй ветви гиперболы снова появляется полюс второго порядка при $t=0$, но он не влияет на порядок неустойчивости экспоненциального типа $\|G^n\| \asymp e^{c\frac{n}{N^2}}$, $n \gg N^2$. Отличие от работы /2/ состоит в том, что при (σ_1, σ_2) $\subset$ ($G_2 \cup G_3$) контур интегрирования протаскивается через один полюс для (σ_1, σ_2) $\subset G_3$ и два полюса для (σ_1, σ_2) $\subset G_3$. Интегральные вычеты обеспечивают оценку $\|G^n\| \asymp e^{c\frac{n}{N^2}}$. Сделаем некоторые замечания относительно оценки интегрального вычета. Из структуры резольвенты (7) следует, что определяющим при оценке интегрального вычета является слагаемое, выделенное в (8). Если $x_0 = 1 - ch + o(h)$ является решением (5), то c удовлетворяет уравнению

$$e^{-2c} = \frac{\sigma_1 + c}{\sigma_1 - c} \cdot \frac{\sigma_2 + c}{\sigma_2 - c} .$$

Отсюда, в частности, следует, что $\sigma_1^2 \neq c^2$, $\sigma_2^2 \neq c^2$; выкладка показывает, что

$$\frac{d}{dt}\left(x^{2N} - \frac{\sigma_1 h + (1-x) + \alpha_1 (1-x)^2}{\sigma_1 h + (1-x^{-1}) + \alpha_1 (1-x^{-1})^2} \; \frac{\sigma_2 h + (1-x) + \alpha_2 (1-x)^2}{\sigma_2 h + (1-x^{-1}) + \alpha_2 (1-x^{-1})^2}\right)\Bigg|_{t=t_0} =$$

$$= 2N \cdot \left(-e^{i\frac{\pi}{4}}\right) \cdot \frac{\sigma_1 + c}{\sigma_1 - c} \cdot \frac{\sigma_2 + c}{\sigma_2 - c} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_1^2 - c^2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_2^2 - c^2}\right)(1 + O(h)).$$

Здесь $x_0 = x(t_0)$. Справедлива оценка:

$$\left| x_0^{2N-\nu+1} - x_0^{\nu-1} \frac{\sigma_2 h + (1-x_0) + \alpha_2 (1-x_0)^2}{\sigma_2 h + (1-x_0^{-1}) + \alpha_2 (1-x_0^{-1})^2} \right| = \left| \frac{(\sigma_2 + c)}{(\sigma_2 - c)(\sigma_1 - c)} (\sigma_1 (x_0^{-\nu+1} - x_0^{\nu-1}) + \right.$$

$$\left. + c\left(x_0^{-\nu+1} - x_0^{\nu-1}\right)\right)(1 + O(h)) \Bigg| > \frac{1}{2} \left| \frac{(\sigma_2 + c)}{(\sigma_2 - c)(\sigma_1 - c)} \right| \cdot \begin{cases} c, & \sigma_1 > 0, \\ |\sigma_1 + c|, & \sigma_1 < 0. \end{cases}$$

Отсюда и из предыдущей оценки получаем:

$$|Res(t_0)| > a \cdot e^{c\nu h} \cdot \left| \sum_{j=1}^{N} g_j e^{-cjh} \right| \cdot h \cdot e^{c\frac{n}{N^2}}, \quad \|G^n\| > b_1 e^{c\frac{n}{N^2}} .$$

Чтобы доказать аналогичную оценку сверху, напомним, что корни

$$\mathcal{P}(x) = x^{2N}(\sigma_1 h + (1-x^{-1}) + \alpha_1 (1-x^{-1})^2)(\sigma_2 h + (1-x^{-1}) + \alpha_2 (1-x^{-1})^2) -$$

$$- (\sigma_1 h + (1-x) + \alpha_1 (1-x)^2)(\sigma_2 h + (1-x) + \alpha_2 (1-x)^2)$$

устроены следующим образом. При (σ_1 , σ_2) $\subset G_2$ есть один вещественный корень $x_0 = \exp\{-ch(1+o(1))\}$, $c > 0$. При (σ_1 , σ_2) $\subset G_3$ есть два таких корня. Остальные корни лежат на единичной окружности. Отсюда следует, что $|\mathcal{P}'_x(x_0)| > |\mathcal{P}'_x(1)|$. Далее простая выкладка показывает

$$\frac{d}{dx}\left(x^{2N} - \frac{\sigma_1 h + (1-x) + \alpha_1 (1-x)^2}{\sigma_1 h + (1-x^{-1}) + \alpha_1 (1-x^{-1})^2} \; \frac{\sigma_2 h + (1-x) + \alpha_2 (1-x)^2}{\sigma_2 h + (1-x^{-1}) + \alpha_2 (1-x^{-1})^2}\right)\Bigg|_{x=1} =$$

$$= 2N \cdot \left(1 + \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_2}\right)(1 + O(h)) .$$

Отсюда без труда получаем искомую оценку сверху. Теорема устойчивости доказана. Из построенных в процессе доказательства оценок интегралов легко получить критерий устойчивости в C . В данном случае оценки $\|G^n\|$ в L_2 и в C одни и те же.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Самарский, А.В.Гулин. Устойчивость разностных схем , Москва, изд-во "Наука", 349-350, 1973.
2. С.И.Сердюкова. Об асимптотической устойчивости одной разностной краевой задачи , Препринт ОИЯИ, Р5-10292, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1977 года.