СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 11018

В.М.Лебеденко

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

1977

Р5 - 11018

В.М.Лебеденко

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП

Лебеденко В.М. P5 - 11018

Элементы теории абелевых групп

Освещены некоторые методы и результаты теории абелевых групп, являющейся важной ветвью современной алгебры. Работа может быть полезной специалистам, применяющим теорию групп.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Lebedenko V.M. P5 - 11018

Elements of Theory of Abelian Groups

Some methods and results of theory of Abelian groups are presented which is an important division of modern algebra. This paper may be of use to specialists who apply theory of groups.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предварительные замечания

Абелевы группы встречаются как в самой математике, так и за ее пределами.

Теория абелевых групп является важной ветвью современной алгебры. Коммутативность - свойство, широко эксплуатируемое в этом разделе математики.

Сильно развита также теория топологических абелевых групп и их представлений. В топологии и алгебраической геометрии используется аппарат теории абелевых групп.

Хорошо известны применения теории абелевых групп в кристаллографии /кристаллографические абелевы группы/.

Использование даже таких простых, с точки зрения теории абелевых групп, объектов, как группы с конечным числом образующих, часто дает глубокие результаты.

Известны и более сложные примеры применения этой теории /в теории двойственности Понтрягина для локально компактных абелевых групп, в теории нормирований для теории полей классов, в теории чисел и алгебраической геометрии/.

В тех приложениях алгебры, где появляются группы, могут возникнуть абелевы группы. Нетривиальные конструкции из теории абелевых групп могут появиться, например, там, где имеют значение вопросы внутренней групповой структуры /связи между отдельными элементами, элементами и подгруппами, подгруппами между собой и т.д./.

При исследовании абелевых топологических групп /не обязательно векторных/ часто возникают подобные вопросы.

Не исключены возможности новых приложений теории абелевых групп.

Специалистам, сталкивающимся в своей работе с группами, полезно ознакомиться, хотя бы кратко, с этой ветвью алгебры.

Настоящая статья иллюстрирует некоторые методы и результаты теории абелевых групп. Она может быть полезной для первого знакомства с предметом /для более детального изучения мы рекомендуем работы /1,2,5,6,9//.

1.2. Немного об истории теории абелевых групп

Изучение абелевых групп началось одновременно с зарождением общей теории групп. Начало теории абелевых групп положил К.Ф.Гаусс в своих исследованиях по разложению квадратичных форм /в 1801 г./. На первой стадии ее развития рассматривались только конечные группы.

Коммутативные группы называют абелевыми в честь известного норвежского математики Н.Х.Абеля, который ввел класс разрешимых алгебраических уравнений, связанных с такими группами.

С дальнейшим развитием теории абелевых групп связаны имена таких известных математиков, как Ж.Л.Лагранж, Л.Кронекер, Г.Фробениус, Л.Штикельбергер. Бесконечные абелевы группы начал рассматривать Ф.В.Леви в начале XX века. В его работах теория абелевых групп уже приобрела вид общей теории. Фундамент современной теории заложили Г.Прюфер, Г.Ульм, Л.Циппин /до 1935 г./. Большой вклад в нее внесли Р.Бэр, А.Г.Курош, Д.Дерри /до 1937 г./.

В работах Л.Я.Куликова /до 1945 года/ получила свое развитие теория примарных абелевых групп произвольной мощности. И сейчас общая теория абелевых групп развивается как теория абелевых групп произвольной мощности. С ее современным развитием связаны имена Л.Я.Кулькова, А.Г.Куроша, А.И.Мальцева, Л.С.Понтрягина, Л.Фукса /его книга [9] по абелевым группам послужила толчком к дальнейшему развитию этой теории/, Э.Уокера, Р.Пирса, Р.Нунке, П.Хилла, А.Прохазки, Т.Шеле, А.П.Мишиной, И.Капланского, Е.С.Ляпина, М.Холла, О.Орэ, С.Кхаббаза, П.М.Кона, Р.Радо и многих других известных математиков.

1.3. Несколько слов о самой теории

Основными объектами рассматриваемой теории являются абстрактные коммутативные группы. Она изучает /в большинстве случаев/ только свойства, формулируемые на языке групповых операций. Например, с точки зрения теории абелевых групп, аддитивная группа действительных чисел и мультипликативная группа положительных действительных чисел неотличимы друг от друга /они изоморфны/. То же самое можно сказать и о группе комплексных корней в n-й степени из единицы и группе вычетов по модулю n. При таком подходе не исключается, конечно, возможность применения полученных результатов к конкретным группам. Для этого достаточно перевести конкретную задачу на абстрактный язык /или наоборот/.

Как и в общей алгебре, в теории абелевых групп широко используется теоретико-множественный аппарат.

1.4. Конкретные примеры

*1.4.1. Некоторые примеры абелевых групп, применяемых в физике**

Пример 1. <u>Калибровочные преобразования первого рода.</u> При них /см. [4] / волновые функции всех частиц умножаются на фазовый множитель $e^{i\lambda}$:

$$\psi^{(j)}(x,t) \to e^{i\lambda}\,\psi^{(j)}(x,t).$$

---

*Всем хорошо известны группы трансляций.

Эти преобразования, очевидно, составляют абелеву группу.

Пример 2. Повороты дуальности. Это дуальные преобразования электромагнитного и нейтринного полей:

$$e^{*\alpha} f = f\cos\alpha + *f\sin\alpha,$$

$$\psi \to e^{\alpha\gamma_5}\psi,$$

где $*f$ - тензор, дуальный к тензору приведенной напряженности электромагнитного поля. Нетрудно убедиться, что

$$e^{*\alpha} e^{*\beta} = e^{*\beta} e^{*\alpha} = e^{*(\alpha+\beta)} \quad /\text{см. } /8//.$$

Поэтому все эти преобразования составляют абелеву группу.

1.4.2. Еще ряд примеров

Простейшим конкретным примером является группа Z - аддитивная группа целых чисел. Всем хорошо известно, что она абелева.

Легко установить, что Z изоморфна любой подгруппе $O(2)$, состоящей из всех поворотов вида g^k ($k=0, \pm1, \pm2, \ldots$), где g - поворот на угол $\epsilon\pi$, а ϵ - иррациональное число.

Также всем известны аддитивные группы Q и R - рациональных и действительных /соответственно/ чисел. Можно рассматривать и мультипликативные группы на этих множествах /без нуля/. Но это будут уже другие объекты, с точки зрения теории абелевых групп. Аддитивная группа C комплексных чисел /мы рассматриваем только сложение и не рассматриваем топологию/ является абелевой, причем $C \cong R \dotplus R$/ C - изоморфна прямой сумме двух экземпляров группы R /см. ниже//.

Из соотношения $R \dotplus R \cong R$ /см. ниже/ вытекает, что, с точки зрения теории абелевых /дискретных/ групп, C и R - одно и то же. Более того, всякое евклидово пространство E_n изоморфно R /и $C_n \cong R$/. Вообще, всякое гильбертово пространство H является абелевой группой, если ограничиться рассмотрением в H только одной операции сложения. При этом умножения на ненулевые числа приводят к автоморфизмам /см. п. 2.1/.

Это уже следует из определения гильбертова пространства. В конечном или счетномерном случае H изоморфно R. Поэтому дискретные групповые рассмотрения в H можно переводить в R. Интересны конечные группы Z_n - группы вычетов по модулям $n (n \geq 2)$. Например, Z_2^* состоит из двух классов: четных и нечетных чисел. Здесь четным числам отводится роль нуля. Абстрактно группу Z_2 можно задать соотношениями $Z_2 = [0, a]$, $2a = 0$ или таблицей сложения:

	0	a
0	0	a
a	a	0

Для $Z_3 = [0, b, c]$ аналогичная таблица выглядит сложнее:

	0	b	c
0	0	b	c
b	b	c	0
c	c	0	b

Это - так называемая таблица Кэли для Z_3 /1/ /здесь b - класс чисел с остатком 1, c - класс чисел с остатком 2/. Таблицы Кэли для абелевых групп всегда симметричны относительно главной диагонали.

Интересно заметить, что в каждой группе типа Z_n все элементы кратны одному, например классу чисел с остатком 1 /как для Z_2 – a, для Z_3 – b : $2a = 0$; $c = b + b$, $0 = 3b$ /. Все это означает, что названные группы - циклические /см. п. 2.1/.

Мы уже упоминали о группе вращений на плоскости $O(2)$. Она изоморфна мультипликативной группе A комплексных чисел, по модулю равных единице.

Действительно, каждое вращение R_α задается углом поворота α и

---

* Преобразования вида $e^{i\alpha} \to e^{-i\alpha}$ порождают группу, изоморфную Z_2.

$$R_\alpha R_\beta = R_{(\alpha+\beta)} \quad , \qquad /1/$$

$$e^{i\alpha} \; e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)} \; . \qquad /2/$$

Исходя из формул /1/ и /2/, легко проверить, что соответствие $\phi: R_\alpha \to e^{i\alpha}$ - изоморфизм O(2) на A . Действительно, из /1/ и /2/ следует, что ϕ - гомоморфизм O(2)на A.Его ядро /см. п. 2.1/ $\ker\phi$ состоит из элементов, переходящих в $1 \in A$, то есть $\ker\phi$ состоит из нейтрального элемента O(2). С другой стороны, легко заметить, что $O(2) \cong R/\{2\pi\}$ /здесь $\{2\pi\}$ - множество всех чисел вида $2\pi k$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ /.

Группа O(2) еще изоморфна и любой фактор-группе $R/\{a\}$, где $\{a\}$ - циклическая подгруппа R , порожденная /см. ниже/ элементом $a \in R$ /при $a \neq 0$/.

Далее мы увидим, что строение, с точки зрения абстрактной теории, группы O(2) не так уж тривиально, как это может показаться на первый взгляд.

Если M - некоторое множество, F(M) - множество всех функций на M со значениями в некоторой абелевой группе L , то при естественном определении суммы ($f+g=h$, $h(x)=f(x)+g(x)$) F(M) становится новой абелевой группой. В частности, такими являются группы комплексных и действительных функций на произвольных множествах.

Известно, что аддитивная группа действительных чисел R изоморфна R^+- мультипликативной группе положительных действительных чисел /см. [1] /. Изоморфизм легко установить с помощью логарифмов.

Обозначим через G мультипликативную группу ненулевых действительных чисел, тогда G изоморфна $Z_2 \dot{+} R$.

Дальнейшее повествование даст нам еще много примеров.

Теперь перейдем к непосредственному знакомству с теорией абелевых групп.

2. НАЧАЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ О КОММУТАТИВНЫХ ГРУППАХ

2.1. Группы, подгруппы, фактор-группы; гомоморфизмы, эндоморфизмы, изоморфизмы; порядки элементов; периодические, без кручения и смешанные группы

Приступим к изложению начальных сведений из теории абелевых групп.

Прежде всего отметим, что в основном мы будем рассматривать абстрактные группы /смысл этого понятия может быть ясен из дальнейшего изложения/. При этом, как принято в теории абелевых групп, будем применять аддитивную запись операций. Например, мультипликативной записи g^k соответствует kg' $(g \to g')$. Запись $a^k b^\ell c^q$, соответственно, переходит в $ka' + \ell b' + qc'$ $(a \to a', b \to b', c \to c')$. Такая форма записи, как мы убедимся ниже, значительно удобнее мультипликативной, ввиду специфики рассматриваемой теории.

Мы предполагаем, что читатель знаком с простейшими понятиями теории групп. Однако часть из них мы проиллюстрируем на аддитивном языке.

Группами будем /в основном/ называть в дальнейшем только абелевы группы.

Итак, абелева группа G - это множество, в котором задана бинарная операция /т.е. любым a, $b \in G$ соответствует третий элемент c, $c = a + b$ /, называемая сложением /название условно/, удовлетворяющая требованиям:

(i) ассоциативности

$(a + (b + c) = (a + b) + c)$,

(ii) коммутативности

$(a + b = b + a)$,

(iii) существования нулевого /нейтрального/ элемента - 0

$(a+0 = 0+a = a)$,

(iiii) существования для любого элемента a противоположного элемента $(-a)$

$(a+(-a)=0, \quad -(-a)=a)$.

Из указанных требований вытекает /см. /1/ / единственность нуля и противоположного элемента для любого $a \in G$.

Всякое подмножество A группы G, удовлетворяющее требованиям (iii) и (iiii) и замкнутое относительно операции, введенной в G /само- группа/, называется подгруппой G.

Как и в случае некоммутативных групп, не всякое подмножество G - ее подгруппа. Зато каждая подгруппа группы G - ее нормальный делитель /неабелевы группы с этим свойством называются гамильтоновыми; по строению они близки к абелевым /1/.

Следовательно, для любой подгруппы $A \subseteq G$ имеет смысл рассматривать фактор-группу G/A. Простейшими примерами подгрупп являются нулевая (0) подгруппа и сама группа G. Остальные подгруппы /если они есть/ называются собственными. Группы без собственных подгрупп называются простыми /например, Z_p, где p - простое число/.

В теории абелевых групп широко используются теоретико-числовые соображения, поскольку коэффициенты выражений $\Sigma k_i a_i$ - целые числа. Например, часто используется утверждение: если a и b - взаимно простые числа ($(a,b)=1$), то существуют такие целые числа U и V, что

$$Ua + Vb = 1.$$

Если A - подгруппа группы G, то фактор-группа G/A состоит из классов $g+A$ с операцией:

$$(g_1+A)+(g_2+A)=(g_1+g_2)+A.$$

Гомоморфизмы для абелевых групп имеют тот же смысл, что и для общего случая /в теории групп принято писать не $\phi(x)$, а $x\phi$ /.

Если даны две группы G_1 и G_2, то гомоморфизмом G_1 в G_2 называется такое отображение $\phi : G_1 \to G_2$, при котором для любых $x, y \in G_1$

$$(x+y)\phi = x\phi + y\phi .$$

Если образ G_1, $\mathrm{Im}\phi = G_1\phi$, совпадает с G_2, то говорят, что ϕ-гомоморфизм G_1 на G_2.

Если ядро ϕ, $\ker\phi = \{x; x \in G_1, x\phi = 0\}$, совпадает с нулем G_1, то говорят, что ϕ-изоморфизм G_1 в G_2 /иными словами, G_1 изоморфно вкладывается в G_2/.

В частности, при совмещении обоих условий мы имеем изоморфизм G_1 и G_2, т.е.

$$G_1 \cong G_2 .$$

Встречаются гомоморфизмы групп в себя - эндоморфизмы, изоморфизмы на себя - автоморфизмы /например, для группы R, $\eta : x \to x\eta = kx, k \neq 0$, автоморфизм, а для группы Z_4 отображение ξ, $m\xi = 2m$, задает эндоморфизм/.

Займемся теперь степенями элементов. Если есть такое k, что $ka = 0$ $(a \in G)$, k-натуральное число $(k \neq 0)$, то говорят, что a- элемент конечного порядка. В противном случае, естественно, говорят о бесконечном порядке. В первом случае пишут: $o(a) < \infty$ / $o(a)$ - порядок a /, во втором: $o(a) = \infty$. При $o(a) < \infty$ считают, что

$$o(a) = \min_{ka=0} \{ |k| \}.$$

Группы, все элементы которых имеют конечные порядки, называют периодическими (torsion groups). Такими группами являются, например, все Z_n, которых мы раньше касались.

Наоборот, группы, все элементы которых имеют бесконечный порядок, называют группами без кручения (torsion free groups).

В группе $O(2)$ есть элементы как конечного порядка, так и бесконечного. То же наблюдается и в мультипликативной группе ненулевых действительных чисел. Группы с такими свойствами называются смешанными (mixed groups).

Если $G \supset A$, $G/A \cong B$, то считают, что G является расширением A с помощью B. Например, Z_4 - расширение A с помощью B, где $A \cong B \cong Z_2$.

Если группа G конечна, то порядком $|G|$ /или $O(G)$, или $\mathrm{card}\, G$ / называется количество ее элементов. Это понятие переносится и на бесконечный случай, но там необходимо понятие мощности множества /т.е. порядок группы - ее мощность, см. п. 2.2/.

Группы Z_n характеризуются тем, что все их элементы выражаются через один элемент - через классы чисел с остатком 1. Это так называемые циклические группы. Элемент a циклической группы G, через который выражаются /т.е. кратны a / остальные, называется образующим элементом G . При этом пишут так: $G = \{a\}$ /($|G| = o(a)$ при $o(a) < \infty$ /. Например, $Z_n = \{\hat{a}_1\}$, $a_1 = 1 (\mathrm{mod}\, n)$, $a_1 \in \hat{a}_1$, $o(\hat{a}_1) = n$.

Часто встречается обобщение этого случая/ когда некоторое множество S порождает группу /подгруппу/. То есть каждый элемент g группы $G \supseteq S$ представим /не обязательно однозначно/ в виде конечной линейной комбинации типа /с целыми коэффициентами/

$$\sum_{i=1}^{n} k_i s_i \quad (k_i = k_i(g), \quad n = n(g)), \quad s_i \in S .$$

Такой ситуации соответствует запись

$G = \{S\}$.

Если взять в группе G некоторое подмножество M и рассмотреть все подгруппы G , которые содержат M , то их пересечение - подгруппа, равная $\{M\}$.

2.2. Мощности и порядки

Вкратце остановимся на понятии мощности/подробно это теоретико-множественное понятие изложено в работе /10/. Если два множества можно взаимно однозначно отобразить друг на друга, то говорят, что они равномощны /имеют одну мощность/, или эквивалентны. Далее появляются абстрактные кардинальные числа - мощности, характеризующие классы эквивалентных множеств.

В конечном случае мощность совпадает с количеством элементов множеств. Мощность множества G обозначается через $|G|$ /или card (G) /. Мощность всякого множества, эквивалентного множеству всех натуральных чисел, называется счетной, а само множество - счетным. Соответствующее кардинальное число обозначается через $\aleph_0$.

Если некоторое множество эквивалентно множеству действительных чисел, то считают, что его мощность - континуум. Соответствующее число обозначают через $\aleph (\aleph = 2^{\aleph_0})$. Мощность множества всех действительных функций на R обозначается через F или $2^{\aleph}$.

Над мощностями производятся различные арифметические операции. Они носят своеобразную окраску:

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0\ ,\quad \aleph_0\aleph_0=\aleph_0\ ,\quad \aleph+\aleph=\aleph\ ,$$
$$\aleph\aleph=\aleph\ \ldots$$

В теории множеств рассматривают и упорядоченные множества, которые широко используются в теории групп.

В смысле упорядоченности два множества считаются эквивалентными, если и их можно взаимно однозначно отобразить друг на друга с сохранением порядка. Тут появляются, как и в случае мщностей, порядковые /ординальные/ числа. В теории множеств считается, что каждое множество можно вполне упорядочить. Множество называется вполне упорядоченным, если каждое его непустое подмножество имеет минимальный элемент, например множество натуральных чисел в его естественном порядке /соответствующее ординальное число обозначается через ω_0 /.

Ординальные числа, соответствующие вполне упорядоченным множествам, называются трансфинитными. Для них есть аналог обычной индукции - трансфинитная индукция. Порядковые числа часто используются в качестве индексов.

2.3. Теоремы о гомоморфизмах и изоморфизмах

Если подгруппа $A \subseteq G$, то естественным гомоморфизмом G на G/A называется гомоморфизм η: $g\eta = g + A (= \bar{g})$. Имеет место теорема.

Теорема 1. Если группа G гомоморфно отображается с помощью ϕ на группу B, то есть такая группа $A \subseteq G$, что $B \cong G/A$. Кроме того, есть такой изоморфизм Ψ, что $\eta\Psi$ - естественный гомоморфизм G на G/A.

Таким образом, гомоморфные образы G с точностью до изоморфизмов исчерпываются ее фактор-группами.

Очень полезны при исследовании абелевых групп следующие две теоремы:

Теорема 2. Если группы A, B, G связаны соотношениями $A \subseteq B \subseteq G$, то

$$(G/A)/(B/A) \cong G/B.$$

Теорема 3. Если $G = \{B \cup A\}$, где B и A - подгруппы G, то $G/A \cong B/(B \cap A)$.

Доказательства указанных в этом пункте теорем содержатся в книге А.Г.Куроша /1/.

2.4. Прямые и полные прямые суммы /расщепления/

Если группа $G = \{A, B\}$ и пересечение подгрупп $A \cap B = 0$, то говорят, что G - прямая сумма A и B. В этом случае для любого элемента $g \in G$ справедлива однозначная запись $g = a + b$, $a \in A$, $b \in B$. Пусть $G = \{\bigcup_{0 \leq \alpha < \gamma} A_\alpha\}$, причем подгруппы A_β и $\{\bigcup_{\substack{0 \leq \alpha < \gamma \\ \alpha \neq \beta}} A_\alpha\}$ имеют нулевое пересечение. Тогда говорят, что G - прямая сумма подгрупп A_α. В первом случае пишут $G = A \dot{+} B (A+B)$, во втором - $G = \dot{\sum}_{0 \leq \alpha < \gamma} A_\alpha \; (\sum_{0 \leq \alpha < \gamma} A_\alpha)$.

Иногда указывают просто множество индексов:

$$\dot{\sum}_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda, \quad \dot{\sum}_{0 \leq i \leq n} A_i = \sum_{i=1}^{n} A_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} A_i \quad (\gamma = \omega_0).$$

При разложении на многие слагаемые также справедливы однозначные записи типа

$$g = \sum_{0 \le \alpha < \gamma} a_\alpha = \sum_{i=1}^{n(g)} a_{\alpha_i}$$

/в каждом таком разложении фигурирует только конечное множество ненулевых элементов/.

Если известно некоторое разложение группы в прямую сумму, то ее изучение в какой-то степени сводится к изучению прямых слагаемых.

Существует несколько абстрактных способов построения из заданных групп новой группы. Пусть заданы группы A_α, $0 \le \alpha < \gamma$. Рассмотрим множество всех векторов, содержащих только конечное число ненулевых компонент из A_α:

$$(a_0, \dots, a_\alpha, \dots).$$

Легко заметить, что относительно операции покомпонентного сложения оно является группой. Эта группа равна $\dot{\sum\limits_{0 \le \alpha < \gamma}} A'_\alpha$, где $A_\alpha \cong A'_\alpha$, состоящей из векторов, у которых только на месте с номером α может стоять не ноль. Нулем здесь является вектор, все компоненты которого - нули. Построенная таким образом группа тоже называется прямой суммой A_α.

Различные разложения в прямую сумму называются расщеплениями групп, а сами эти группы - расщепляемыми. Но бывают и нерасщепляемые группы, например Z_2, Z_3, Q.

Близким к упомянутым является понятие полной прямой суммы заданных групп. Пусть нам даны группы $A_\lambda (\lambda \in \Lambda)$. Рассмотрим множество G, состоящее из всевозможных векторов $(\dots, a_\lambda, \dots)$, у которых на месте λ стоит элемент из A_λ. Очевидно, что G-группа относительно покомпонентного сложения /с нулем $(0, \dots, 0 \dots)$/.

Это - полная прямая сумма групп $A_\lambda - \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} {}^{*} A_\lambda$.

2.5. Свободные группы и определяющие соотношения

Свободной /свободной абелевой группой/ называется прямая сумма бесконечных циклических групп. Количество, или мощность, циклических слагаемых в этом разложении называется рангом свободной группы. Эти группы имеют важное значение в общей теории абелевых групп. Пусть группа $G = \{A\}$, $A = [a_\alpha]_{0 \le \alpha < \gamma}$ - ее система образующих. Естественно, что элементы A могут быть связаны некоторыми соотношениями /вроде $2a_1 = a_2$, и т.д./. Пусть $\sum\limits_{0 \le \alpha < \gamma} n_{\mu\alpha} a_\alpha = 0$ $(\mu \in M)$ - все такие соотношения /в суммах фигурируют конечные множества ненулевых слагаемых/. Рассмотрим свободную группу $F = \sum\limits_{0 \le \alpha < \gamma} \{x_\alpha\}$ и элементы $y_\mu = \sum\limits_{0 \le \alpha < \gamma} n_{\mu\alpha} x_\alpha$, $\mu \in M$. Пусть $Y = \{[y_\mu]_{\mu \in M}\} \subseteq F$. Тогда, как легко показать:

$$G \cong F/Y.$$

Таким образом, каждую группу можно задать некоторыми уравнениями. Вместе с системой A и нашим изоморфизмом это дает образующие и определяющие соотношения. При этом на самом деле не обязательно указывать все соотношения. Достаточно выбрать некоторые, но такие, что все остальные являются их следствиями. На языке свободной группы это значит, что соответствующие элементы из Y порождают Y.

Примеры:

1. Циклическая группа A порядка n задается соотношениями $A = \{a\}$, $na = 0$ / A обозначается через $C(n)$//.

2. Аддитивная группа рациональных чисел Q задается образующими и определяющими соотношениями

$$Q = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\},$$

$$a_1 = 2a_2, \quad a_2 = 3a_3, \quad a_3 = 4a_4, \ldots, a_n = (n+1)a_{n+1}, \ldots,$$

поскольку в ней есть подгруппы

$$\{1\} \subset \{\tfrac{1}{2}\} \subset \{\tfrac{1}{3!}\} \subset \ldots \subset \{\tfrac{1}{n!}\} \subset \ldots \quad \text{и} \quad Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\tfrac{1}{n!}\}.$$

3. Группа с определяющими соотношениями

$pa_1 = 0,\ \ a_1 = pa_2, \ldots, a_n = pa_{n+1}$

называется группой типа $C(p^\infty)$.* Из дальнейшего будет видна важность таких групп.

2.6. *Линейная зависимость и ранг; типы элементов*

n элементов ($n \geq 1$) группы G $a_1, \ldots, a_n$ называются <u>линейно независимыми</u>, если из всякого соотношения $\sum_{i=1}^{n} k_i a_i = 0$ следует, что $k_i / 0(a_i)$** при $0(a_i) < \infty$ или $k_i = 0$ при $o(a_i) = \infty$. В противном случае система $a_1, \ldots, a_n$ называется линейно зависимой.

Один ненулевой элемент группы всегда составляет непустую линейно независимую систему.

Любую линейно независимую подсистему группы можно расширить до некоторой максимальной в силу леммы Цорна /см. /2,10/ /.

Аналогично определяется свободная зависимость и независимость. Здесь из $\Sigma k_i a_i = 0$ всегда следует, что все $k_i = 0$.

Аналогично определяется максимальная, в свободном смысле, система. Мощность такой системы является инвариантом группы и называется <u>свободным рангом</u> группы; обозначается $r_0(G)$. Если в группе нет элементов бесконечного порядка, то считают, что $r_0(G) = 0$.

Если в группе G есть элементы простого порядка p, то тем же образом можно определить ранг $r_p(G)$ /в комбинациях $\Sigma k_i a_i$, $o(a_i) = p^{n_i}$, k_i / p^{n_i} /. Если в группе нет элементов порядка p, то считаем, что $r_p(G) = 0$.

---

* p - простое число.

** k_i - делятся на $o(a_i)$.

Далее определим еще один инвариант - общий ранг $r(G)$:

$$r(G) = r_0(G) + \sum_{p=2,3,5,\ldots} r_p(G) \qquad /\text{см.}^{/9/}\ /.$$

Коснемся важного понятия типа элемента в группе без кручения. Рассмотрим для некоторого ненулевого элемента a группы G уравнения $nx = a$. Часть из них может иметь решения, а часть не может. Пусть p_1, ..., p_n, ... - все простые числа в естественном порядке. Для каждого p_i будем исследовать разрешимость уравнений типа

$$p_i^k x = a, \quad k \geq 1 .$$

Если хотя бы одно такое уравнение с ненулевым показателем разрешимо и среди таких показателей есть максимальный,то это число назовем p_i-высотой a – $h_{p_i}(a)$. Если ни одно уравнение не разрешимо, то положим $h_{p_i}(a) = 0$. Напротив, если все такие уравнения разрешимы, то положим $h_{p_i}(a) = \infty$.

Теперь введем вектор

$$(h_{p_1}(a),\ h_{p_2}(a), \ldots, h_{p_n}(a), \ldots).$$

Он называется характеристикой элемента a – $H(a)$.Две характеристики считаются эквивалентными, если бесконечности у них находятся /если они есть/ на одинаковых местах, а отличие может быть только на конечном числе мест.

Классы эквивалентных характеристик называются типами элементов - $T(a) \ni H(a)$.

Два ярких примера типов: нулевой $0 \to (0,\ldots,0,\ldots)$ и $\infty \to (\infty,\infty,\ldots,\infty,\ldots)$. Нулевой тип имеют элементы свободной группы, а тип ∞ - все элементы аддитивной группы рациональных чисел Q .

3. ОСНОВНЫЕ КЛАССЫ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП И ВИДЫ ПОДГРУПП

3.1. Как мы уже отмечали, существует разделение групп на периодические, без кручения и смешанные. Если группа G - смешанная, то, как легко убедиться, множество всех элементов из G, имеющих конечный порядок, образует подгруппу G, которая называется периодической частью G и обозначается через $t(G)$. Заметим, что множество всех элементов G, имеющих бесконечный порядок, подгруппу не образует.

Интересно следующее свойство $t(G)$: если $nx \in t(G)$ $(n \neq 0)$, то $x \in t(G)$. Обобщением этой ситуации является понятие сервантности. Подгруппа A из G считается <u>сервантной</u> в G, если из разрешимости в G всякого уравнения вида

$$nx = a, \quad a \in G$$

следует его разрешимость в A /теперь мы можем сказать, что $t(G)$ сервантны в G/.

Близко к нашим рассмотрениям понятие полноты. Группа называется полной, если в ней разрешимо всякое уравнение вида

$$nx = a.$$

Характерными примерами полных групп являются группы Q и R. Среди примарных групп полными являются, например, группы типа $C(p^{\infty})$ /с определяющими соотношениями $pa_1 = 0$, $a_1 - pa_2 = 0$, ..., $a_n - pa_{n+1} = 0$/. Теперь легко убедиться в том, что если полная группа A - подгруппа G, то A сервантна в G.

Группы, у которых нет ни одной ненулевой полной подгруппы, называются редуцированными. Пример: $C(3)\times(z_3)$.

3.2. Группы, разложимые в прямые суммы циклических подгрупп, называют еще прямыми суммами циклических групп. Для всякой такой группы множество циклических образующих, участвующих в прямом разложении, называется <u>базисом.</u> Такие группы обладают разными базисами. Базис - это максимальная линейно независимая система. Прямые суммы циклических групп могут быть периодическими, примарными /см. п. 4.3/, без кручения и смешанными:

$$(C(2)+C(3), \quad C(p)+C(p), \qquad C(\infty)+C(\infty)+C(\infty),$$

где $C(\infty)$- бесконечная циклическая группа, $C(2)+C(\infty)$).

Все прямые суммы циклических групп редуцированы потому, что они не содержат полных подгрупп /в них уравнения $nx=a$ разрешимы не для всех n при любых a /.

Некоторые группы не обладают базисом, например Q. Если $x, y \in Q$, то существуют такие n и m, что $nx = my$. Поэтому, если допустить существование базиса у Q, то он должен состоять из одного элемента. Другими словами, получаем, что Q - циклическая группа. Это приводит нас к противоречию.

3.3. Одним из видов сервантных подгрупп являются прямые слагаемые. Если $G=A+B$ и $nx=a\in A$,то $x=a'+b$, $a'\in A$, $b\in B$ и $nb=0$, $na'=a$.

3.4. Существуют и другие виды подгрупп, например характеристические и вполне характеристические. Подгруппа A группы G называется характеристической подгруппой G , если она при любых автоморфизмах G переходит в себя.

Аналогично приходим к понятию вполне характеристической подгруппы, если заменить "автоморфизм" на "эндоморфизм".

4. НЕКОТОРЫЕ КЛАССИЧЕСКИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

4.1. Разложение циклической группы в прямую сумму

Если $G=\{a\} \cong C(n)$ и $n=p_1^{k_1}\dots p_s^{k_s}$ - каноническое разложение n на простые множители, то $G=\{a_1\}\dot{+}\dots\dot{+}\{a_s\}$, где $\{a_i\}\cong C(p_i^{k_i})$, $i=1,\dots,s$. Это - разложение G на неразложимые слагаемые. Вид разложения однозначно определяется указанным разложением n /см. /1/ /.

Приведем конкретный пример. Пусть $G=\{a\}$, $o(a)=6$. Тогда

$$G=\{\{2a\},\{3a\}\}:\ 3\cdot 3a-4\cdot 2a=a\ .$$

Далее $\{2a\}\cap\{3a\}=0$, так как $\{2a\}\cong C(3)$, $\{3a\}\cong C(2)$. Поэтому $G=\{2a\}+\{3a\}\cong C(3)\dot{+}C(2)$.

Заметим, что при $o(a)=n$, $(m,n)=1$ имеем $\{ma\}=\{a\}$. Действительно, как отмечено выше, существуют такие целые числа u и v, что $um+vn=1$. Следовательно,

$$u(ma)+v(na)=a\,(v(na)=0) \quad \text{и} \quad u(ma)=a.$$

4.2. О разложимости конечнопорожденных групп в прямую сумму циклических групп

Группа G называется конечнопорожденной, или группой с конечным числом образующих, если она порождается некоторым своим конечным подмножеством. Известно, что такие группы разлагаются в прямые суммы циклических подгрупп /см. /1/ /. Например, пусть

$$G=\{a\}\dot{+}\{b\}\dot{+}\{c\},$$

$$\{a\}\cong C(4)\cong\{b\}, \qquad \{c\}\cong C(\infty) \quad \text{и}$$

$$A=\{2b,\ (b+c)\}.$$

Так как $\{2b\}\cap\{b+c\}=0$ $(n(2b)=m(b+c)\rightarrow mc=0 \rightarrow m=0)$,

то $A=\{2b\}\dot{+}\{b+c\}\cong C(2)\dot{+}C(\infty)$,

$$(\{2b\}\cong C(2), \quad \{b+c\}\cong C(\infty)).$$

Заметим, что *всякая подгруппа группы с конечным* числом образующих сама является группой с конечным числом образующих /см. /1/ /.

4.3. Разложимость периодических групп в суммы примарных подгрупп

Пусть G - периодическая, но непримарная* группа. Обозначим через G_p подгруппу G, состоящую из всех

---

* Примарной группой называют группу, порядки элементов которой являются степенями одного простого числа.

элементов G, порядки которых являются степенями простого числа p.

Группа G содержит некоторое множество таких подгрупп по различным p. Это - примарные компоненты группы G. Имеет место разложение вида

$$G = \sum_i G_{p_i}$$

/ G_{p_i} пробегает все примарные компоненты G /. Разложение вытекает из прямой разложимости любой группы типа $C(n)$ на примарные циклические компоненты.

4.4. *Связи между сервантными подгруппами. Возрастающие последовательности сервантных подгрупп. Элементы в смежных классах в разложении по сервантной подгруппе. О базисных подгруппах примарных групп*

Если A *и* B - *подгруппы* G, $A \subseteq B$ и A сервантна в G, то очевидно, что A сервантна в B.

Сервантность обладает некоторым свойством транзитивности: если S сервантна в G, а T сервантна в S, то T сервантна в G. Если S сервантна в G и T - подгруппа S, то S/T сервантна в G/T. Далее, если A сервантна в G и B/A сервантна в G/A, то B сервантна в G. Эти результаты непосредственно вытекают из определения сервантности. Легко проверить, что если G/A - группа без кручения, то A - сервантны в G. Действительно, здесь из $na \in A$ следует, что $a \in A$.

Объединение любой возрастающей последовательности сервантных подгрупп есть сервантная подгруппа. Это легко проверить.

С другой стороны, объединение возрастающей последовательности прямых слагаемых может и не быть прямым слагаемым. Например, пусть $G = \sum_i^* C(p_i)$, где p_i - пробегают все простые числа. G - смешанная группа. Ее периодическая часть равна $\sum_i C(p_i) = t(G) = T$, $t(G)$ и является объединением возрастающей последовательности прямых слагаемых $C(p_1) \subset C(p_1) + C(p_2) \subset \ldots$ Но $t(G)$ - не прямое слагаемое, так как G/T - полная группа, а G не содержит ненулевых полных групп. Действительно, в G/T

элемент определяется с точностью до любого конечного числа компонент, а уравнения $nx=a$ всегда разрешимы в $\{a\}$, если $(n, 0(a))=1$. Если b - элемент G и имеет ненулевую i-ю компоненту, то уравнение $p_i^{o(b)}x=b$ в G неразрешимо,то есть G не содержит полных подгрупп.

Сервантные подгруппы обладают еще одной особенностью. Если A сервантна G, то для любого смежного класса $\bar{g} \in G/A$ можно выбрать такой элемент $g^* \in \bar{g}$, $g^* \in G$, что $o(g^*) = o(\bar{g})$.

Построения этого пункта близки к понятию базисной подгруппы примарной группы. Если p - примарная группа G отлична от $C(p^k)(k \leq \infty)$,то она имеет прямое циклическое слагаемое. Дополнительное слагаемое, если оно не совпадает с $C(p^k)$, тоже имеет прямое циклическое слагаемое. Поступая так далее, мы получим возрастающую последовательность прямых слагаемых, разложимых в прямую сумму циклических групп. Их объединение будет сервантной подгруппой. В каждой примарной группе существуют подгруппы такого рода, обладающие еще тем свойством, что фактор-группы по ним полны. Этот результат характеризует структуру примарных групп. Если G является прямой суммой циклических групп, то она сама является базисной группой для себя.

Если группа G не полна и порядки ее элементов не ограничены в совокупности, то она обладает собственными базисными подгруппами /см. /9/ /.

4.5. Высоты элементов. Критерий Л.Я.Куликова. Группы с ограниченными в совокупности порядками элементов

Высотой $h(a)$ элемента $a \in G$, $a \neq 0$, называется максимальное $k \geq 1$, при котором разрешимо в группе G уравнение

$$p^k x = a,$$

если такое число существует. Если такого k нет, то считают $h(a) = \infty$*. Имеет место следующее утверждение,

* Противоположным является случай, когда такие уравнения вообще не разрешимы $- h(a) = 0$.

называемое критерием Л.Я.Куликова /см. /9/ /. Примарная абелева группа G тогда и только тогда разложима в прямую сумму циклических групп, если она является объединением возрастающей последовательности

$$A^{(1)} \subseteq A^{(2)} \subseteq \ldots \subseteq A^{(n)} \subseteq \ldots$$

таких своих подгрупп, что у каждой из них высоты элементов в группе G конечны и ограничены в совокупности. Например, если у группы G порядки элементов ограничены в совокупности числом p^n, то все высоты в G ограничены числом $n-1$. Периодические группы с ограниченными в совокупности порядками элементов называются еще ограниченными.

Из критерия Л.Я.Куликова вытекает утверждение: всякая ограниченная периодическая группа разложима в прямую сумму циклических групп. Если у некоторой p-примарной группы есть подгруппа типа $C(p^\infty)$, то и есть элементы бесконечной высоты, например элемент a_1, для которого разрешимы канонические уравнения:

$$a_1 = pa_2, \quad a_2 = pa_3, \ldots, a_k = pa_{k+1}, \ldots$$

На самом деле не всякая p-группа с элементами бесконечной p-высоты должна содержать подгруппы типа $C(p^\infty)$.

4.6. Свойство полных групп быть прямыми слагаемыми. Полные части и редуцированные части групп

Интересно следующее свойство полных групп. Если группа A-подгруппа группы G и A полна, то она является прямым слагаемым G.

Пусть G - некоторая группа и D - объединение всех полных подгрупп G. Легко проверить, что D - полная подгруппа G. Она называется полной частью G. Группа G равна $D+G'$, где G'- редуцированная часть. Подгруппа G' не содержит ни одной полной подгруппы. Группы, у которых полная часть равна O, называются редуцированными. Таким образом, изучение произвольных групп во многом сводится к изучению полных и редуцированных групп.

4.7. Сервантные подгруппы полных групп

Предположим, что группа A содержится в полной группе G в качестве сервантной подгруппы. Тогда для любого элемента $a \in A$ в G разрешимо уравнение $a = nx$ /при любом n /. Оно, в свою очередь, разрешимо в A в силу сервантности в G. Отсюда мы получаем утверждение: всякая сервантная подгруппа полной группы сама является полной.

4.8. Вложения в полные группы

Всякая абелева группа G вложима в качестве подгруппы в некоторую полную группу D. Причем, D можно выбрать примарной, если G - примарна; периодической, если G - периодическая; без кручения, если G - без кручения; смешанной, если G - смешанная.

Мы имеем в виду, что D содержит подгруппу G' и $G' \cong G$. Таким образом, появляется возможность при исследовании абелевых групп считать их подгруппами полных групп. Например, всякую группу без кручения мощности не более континиума можно считать подгруппой R.

4.9. Строение полных групп

Сами полные группы разлагаются в прямые суммы стандартных слагаемых. Всякая полная p-примарная группа разлагается в прямую сумму групп типа $C(p^{\infty})$. Отсюда получаем, что всякая периодическая полная группа разложима в прямую сумму подгрупп типа $C(q^{\infty})$, где q соответствуют некоторым примарным компонентам группы.

С другой стороны, всякая группа без кручения разложима в прямую сумму групп типа Q - аддитивной группы рациональных чисел.

Если G - смешанная полная группа, то ее периодическая часть $t(G)$ сервантна в G. Следовательно, $t(G)$ - прямое слагаемое G, как сервантная подгруппа полной группы.

Отсюда получаем, что всякая смешанная полная группа разложима в прямую сумму групп типов $C(p^{\infty})$ и Q^{*}.

*4.10. Ограниченные сервантные подгруппы***

Если периодическая подгруппа T органичена /заметим, что ограниченная группа может иметь произвольную мощность/ и сервантна в G, то она является прямым слагаемым G /см. [9]/.

4.11. О расширении сервантной подгруппы с помощью прямой суммы циклических групп. Расширения с помощью свободной группы

Если подгруппа A содержится в группе G в качестве сервантной подгруппы и G/A разложима в прямую сумму циклических групп, то A выделяется в G прямым слагаемым /см. [9]/.

В качестве следствия получаем /см. п. 4.4/, что если подгруппа A содержится в группе G и G/A - свободная группа, то A - прямое слагаемое в G.

4.12. Обобщение сервантности

Во многих рассмотрениях полезны обобщения сервантности. Примером является Π-сервантность. Здесь Π - некоторое множество чисел для уравнений $nx=a$. Рассматривается разрешимость этих уравнений относительно только чисел из Π. В частности, при $\Pi=Z$ получаем обычную сервантность.

---

* Например:

$$O(2) \cong \dot{\sum_{1\leq i<\infty}} C(p_i^{\infty}) + R \cong \dot{\sum_{1\leq i<\infty}} C(p_i^{\infty}) + \dot{\sum_{\lambda\in\Lambda}} Q_{\lambda},$$

$$Q_{\lambda} \cong Q, \quad |\Lambda| =$$

** Периодическая группа называется ограниченной, если порядки ее элементов ограничены в совокупности.

4.13. Неразложимые примарные группы

Легко установить, что группы типа $C(p^k)(1 \le k \le \infty)$ неразложимы, так как в них любые две подгруппы имеют ненулевое пересечение.

На самом деле такими и только такими группами исчерпываются неразложимые примарные абелевы группы /см. /1,9/ /.

4.14. Сойства групп без элементов бесконечной высоты

Пусть G - примарная группа и B - ее базисная подгруппа. Можно записать $B=\sum_{n=1}^{\infty} B_n$, где B_n - прямая сумма групп типа $C(p^n)$. Обозначим через $\bar{B}$ периодическую часть группы $\sum_{n=1}^{\infty}{}^{*} B_n \supset B$. Справедливо утверждение /см. Abelian Groups/9/ §33, corollary 33.2/: если G - примарная группа без элементов бесконечной высоты, то она изоморфна некоторой сервантной подгруппе $\bar{B}$, содержащей B.

4.15. Группы без кручения ранга 1

Каждую группу без кручения ранга 1 можно вложить *в полную группу без кручения ранга 1, а именно* в аддитивную группу рациональных чисел Q. Для того чтобы обозреть все такие группы, надо знать все подгруппы группы Q.

В группе ранга 1 все элементы имеют один тип. Поэтому таких групп не больше, чем типов. На самом деле попарно неизоморфных подгрупп в Q существует ровно столько, сколько и типов - континуум. Для каждого типа существует группа ранга 1, имеющая его своим типом. Примером может служить Q_2 - группа двоичных дробей. Ее тип содержит $(\infty, 0, 0, 0, \dots, 0, \dots)$. Она состоит из всех рациональных дробей вида $\ell/2^k$. Аналогично выглядят и группы p-ичных дробей. Интересна группа типа, содержащего $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$, состоящая из всех дробей вида $\frac{k}{p_1 \cdots p_\ell}$, где p_i - различные простые числа.

4.16. Группы больших рангов. Пример неразложимой группы ранга 2

Кроме групп ранга 1 существуют группы произвольных рангов. Достаточно рассмотреть прямые суммы групп ранга 1. Если $G = \sum_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$, где $r(G_\lambda)=1$, то $r(G)=|\Lambda|$.

Каждая группа ранга x вложима в прямую сумму x групп типа Q. Не всякая группа без кручения, даже конечного ранга, разложима в прямую сумму групп ранга 1.

Так, например, в работе Л.С.Понтрягина /7/, имеющей топологический характер, приведен пример группы ранга два, неразложимой в прямую сумму. Все элементы этой группы имеют тип, содержащий $(0,0,0,\ldots,0,\ldots)$, как в свободной группе. Она является расширением бесконечной циклической группы с помощью группы двоичных дробей.

4.17. Подгруппы свободных групп и вполне разложимых групп

Всякая подгруппа свободной группы свободна, но не всякая является прямым слагаемым. Группы, разложимые в прямые суммы групп ранга 1, называются вполне разложимыми. Не всякая подгруппа вполне разложимой группы сама вполне разложима. Действительно, группу, о которой говорилось в п. 4.16, можно вложить в качестве подгруппы в $Q+Q$. Имеет место утверждение /см. /9/ /: если G - прямая сумма групп без кручения ранга 1, имеющих один тип, то каждая сервантная подгруппа G снова вполне разложима.

4.18. Сервантные подгруппы, порожденные множествами

В группах без кручения пересечение любого множества сервантных подгрупп сервантно, так как в каждой такой группе всякое уравнение типа $nx=a$ может иметь только одно решение. Если $S \neq \emptyset$ - подмножество группы G, то пересечение всех сервантных подгрупп G, содержащих S, называется сервантной подгруппой, порожденной S . Сервантная подгруппа, порожденная S , обозначается через $\{S\}_*$. Легко проверить, что $\{S\}_*$ состоит из всех элементов G , для которых некоторое их кратное принадлежит $\{S\}$. Поэтому $G/\{S\}_*$ - группа без кручения, а $\{S\}_*/\{S\}$ - периодическая группа.

4.19. Неразложимые группы

Для каждой мощности $m \le \aleph$ / $\aleph$ - мощность континуума/ существует неразложимая в прямую сумму группа ранга m /см. /9/ /. Таких групп достаточно много. Например, существует $2^{\aleph}$ неразложимых /попарно неизоморфных/ групп ранга $\aleph$. Существуют неразложимые группы любого ранга $\le 2^{\aleph} = F$ /см. /9/ /.

4.20. Одна теорема о выделении сервантных подгрупп прямыми слагаемыми

Группа без кручения G имеет свойство выделения прямым слагаемым всякой ее сервантной подгруппы тогда и только тогда, когда $G=D+H$, где D - полная группа, а $H=H_1+\ldots+H_n$, где H_i - попарно изоморфные группы ранга 1 /см. /9/ /.

4.21. Расщепление смешанных групп

Смешанная группа называется расщепляемой, если она представима в виде прямой суммы периодической группы и группы без кручения. Складывая различные периодические группы и группы без кручения мы можем получить множество расщепляемых групп. Однако не все смешанные группы расщепляемы.

Рассмотрим пример /см. /9/ /. Пусть $T = \sum_i \{a_i\}$, $o(a_i) = p^{2i}$ $(i=1,2,\ldots)$, а $V = \sum_1^{\infty} {}^* \{a_i\}$.

Выберем элементы

$$b_i = (0,\ldots,0, a_i, pa_{i+1}, p^2 a_{i+2}, \ldots), \quad i = 1,2,\ldots .$$

Ясно, что $o(b_i) = \infty$ и $pb_{i+1} = b_i - a_i^*$, $i=1,2,\ldots$ Пусть те-

* Имеется в виду, что $a_i = (0\ldots0, a_i, 0,\ldots,0,\ldots)$.

перь $H=\{T, b_1, \ldots, b_i, \ldots)$. Это - смешанная группа, и ее периодическая часть - T . Разложение $H=T+J$ невозможно, так как в фактор-группе $\bar{H}=H/T \ni \bar{b}_i, p\bar{b}_{i+1}=\bar{b}_i$, то есть в $\bar{H}$, есть элементы бесконечной высоты, $H/T \cong J$, но в H нет элементов бесконечной высоты.

Приведем теорему Бэра и Фомина /см. /8/ /: *периодическая группа T имеет свойство выделяться прямым слагаемым из любой смешанной группы, в которой она является периодической частью, тогда и только тогда, когда она прямая сумма полной группы и группы с ограниченными в совокупности порядками элементов.*

Подробнее с классическими результатами в теории абелевых групп можно ознакомиться в книгах А.Г.Куроша /1,2/ и Л.Фукса /9/.

5. О СОВРЕМЕННОМ СОСТОЯНИИ ТЕОРИИ

Современное развитие теории абелевых групп отличается большой глубиной и тонкостью результатов, в основном структурного характера. Об этом свидетельствуют обзоры А.Г.Куроша и А.П.Мишиной /см. /1,5,6/ /.

В качестве примера приведем один результат, принадлежащий С.Кхаббазу /см. /3/ /. Большое значение в теории абелевых групп имеют свойства систем образующих. Существуют тесные связи между внутренней структурой систем образующих групп и свойствами самих групп *. Одним из свойств системы образующих является неприводимость. Система образующих группы называется неприводимой, если никакая ее истинная подсистема не порождает ту же группу. С.Кхаббаз показал, что примарная абелева группа обладает неприводимой системой образующих тогда и только тогда, когда имеет ту же мощность, что и ее базисная подгруппа.

6. О СВЯЗЯХ ТЕОРИИ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП С ДРУГИМИ ОБЛАСТЯМИ АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИКИ

Теория абелевых групп, являясь частью общей алгебры, тесно связана со многими ее разделами. Так,

* См. п. 2.5.

например, каждую группу можно вложить в группу автоморфизмов некоторой абелевой группы, каждое кольцо можно вложить в кольцо эндоморфизмов подходящей абелевой группы.

Теория абелевых групп тесно связана и с другими разделами математики - топологией, теорией чисел, алгебраической геометрией.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В.А.Мещерякову и В.Г.Кадышевскому за интерес к работе, А.П.Мишиной и Э.Б.Винбергу за ценные советы, А.Б.Пестову за любезно предоставленные физические примеры.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А.Г. Теория групп. "Наука", М., 1967.*
2. *Курош А.Г.Лекции по общей алегбре. Изд-во физ.-мат.лит., М., 1962.*
3. *Khabbaz S. Trans.Amer.Math.Soc., 1961, v. 98, No. 3.*
4. *Маршак Р., Судершан В. Введение в физику элементарных частиц. ИЛ, М., 1962.*
5. *Мишина А.П. Абелевы группы. В кн.: Алгебра. Топология, Геометрия /Итоги науки/, ВИНИТИ, М., 1967.*
6. *Мишина А.П. Абелевы группы. В кн.: Алгебра. Топология. Геометрия /Итоги науки и техники/, т. 10, ВИНИТИ, М., 1972.*
7. *Pontryagin L.S. Annals of Math., 1934, 35, p, 361.*
8. *Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. ИЛ, М., 1962.*
9. *Fuchs. Abelian groups. Publ.House of the Hungarian Academy of Sceinces. Budapest, 1958. Infinite Abelian Groups, v. 1, Academic Press, New York and London, 1970; Infinite Abelian Groups, v. 2, Academic Press, New York and London, 1973; Бесконечные абелевы группы. т. 1, "Мир", М., 1974, т. II, "Мир", М., 1977.*
10. *Хаусдорф Ф.Теория множеств. М.-Л., ОНТИ, 1937.*

Содержание

Рукопись поступила в издательский отдел
14 октября 1977 года.