СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 10993

Т.С.Тодоров

О КОММУТАТИВНОСТИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

1977

P5 - 10993

Т.С.Тодоров

О КОММУТАТИВНОСТИ САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Тодоров Т.С. P5 - 10993

О коммутативности самосопряженных расширений дифференциальных операторов в частных производных

Рассматриваются пары линейных дифференциальных операторов в частных производных порядка 2R, R=1,2,..с постоянными коэффициентами перед высшими производными определенных на подмножестве функций типа $C^{\infty}(\bar{\Omega})$, где Ω – ограниченная область в R^n. Доказываются необходимые и достаточные условия коммутативности их самосопряженных расширений, при некоторых ограничениях на коэффициенты и на области определения расширений. Коммутативность связана со свойствами границы области Ω. Устанавливается связь с проблемой задания совместимых наблюдаемых в квантовой теории.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Todorov T.S. P5 - 10993

On the Commutativity of Self-Adjoint Extensions of Partial Differential Operators

Pairs of linear partial differential operators of order 2R, R=1,2,.. with the constant coefficients before the higher-order derivatives, defined on a certain subspace of the set $C^{\infty}(\bar{\Omega})$, (Ω is a bounded domain in R^n) are considered. Necessary and sufficient conditions for the commutativity of their self-adjoint extensions are proved, some assumptions are provided about the coefficients, about the boundary of Ω and about domains of the extensions. Applications of these results to the problem of defining compatible observables as commuting self-adjoint operators in quantum theory are considered.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

I. Описание проблемы. Пример из квантовой механики

Обозначим через Ω ограниченную область в n-мерном эвклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n=2,3,\ldots$ с кусочно C^{∞}-гладкой границей $\partial\Omega$, а через $x=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – точки в $\mathbb{R}^n$. Определим

$$D^I = \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \ldots \partial x_{i_k}},$$

где $I=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ – мультииндекс, $i_1, i_2, \ldots, i_k$ принимают значения 1, 2, 3,... , и $k=|I|=0, 1, 2,\ldots$ – порядок производной D^I. Рассмотрим пространство $L_2(\Omega)$ квадратично интегрируемых на замыкании $\bar{\Omega}$ функций. Пусть $\hat{A}$ и $\tilde{B}$ – самосопряженные расширения пары дифференциальных операторов

$$A = \sum_{|I|\le 2R} \alpha_I D^I \quad , \quad B = \sum_{|I|\le 2R} \beta_I D^I$$

одного и того же (четного) порядка, где $\alpha_I, \beta_I, |I|=2R$ – постоянные коэффициенты, удовлетворяющие определенным дополнительным условиям. Пусть A и B заданы на некотором фиксированном подмножестве функций из $C^{\infty}(\Omega)$. Представляет интерес изучение связи между коммутативностью $\hat{A}$ и $\tilde{B}$ и свойствами границы области Ω.

В частности, эта связь представляет интерес и для квантовой физики. Действительно, рассмотрим квантовомеханическую систему, совершающую финитное движение внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (можно считать, что система находится в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками, имеющей пространственную форму Ω). Наблюдаемые a , b ,... такой системы обычно определяются как самосопряженные операторы $\tilde{A}, \tilde{B}, \ldots$ в $L_2(\Omega)$ с областями определения $D(\tilde{A}), D(\tilde{B}), \ldots$. Сужения этих операторов на подмножестве в $C^\infty(\Omega)$ могут иметь вид дифференциальных выражений $A, B, \ldots$. Пара a, b наблюдаемых может допускать совместимые измерения, что эквивалентно (см. /I/) коммутативности соответствующих операторов $\tilde{A}, \tilde{B}$. Установление связи между свойствами границы $\partial\Omega$ и коммутативностью возможных самосопряженных расширений A и B необходимо для корректного выбора операторов $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в качестве совместимых наблюдаемых a, b при фиксированной Ω .

Изучаемый ниже класс дифференциальных операторов иллюстрируется следующим примером из квантовой механики. Рассмотрим в некотором приближении финитное движение квазичастицы (см. /2/ §128) в области $\Omega \in \mathbb{R}^3$ при малых значениях ее импульса p (область Ω предполагается достаточно больших размеров). Энергию $E(p)$ квазичастицы как функцию p можно разложить в ряд Тейлора и ограничиться конечным числом членов в разложении:

$$E(p) = E(0) + \frac{1}{2!}\sum_{l_1,l_2=1}^{3}\left[\frac{\partial^2 E}{\partial p_{l_1}\partial p_{l_2}}\right]_0 p_{l_1}p_{l_2} + \frac{1}{3!}\sum_{l_1,l_2,l_3=1}^{3}\left[\frac{\partial^3 E}{\partial p_{l_1}\partial p_{l_2}\partial p_{l_3}}\right]_0 p_{l_1}p_{l_2}p_{l_3} + \ldots$$

с высшей производной четного порядка $2R$. Обозначим через $p_l, l=1,2,3$ компоненты импульса p . Положив

$$\hat{p}_l = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_l}, \quad l = 1,2,3,$$

получим, согласно известному квантовомеханическому правилу, следующую операторную запись A для $E(p)$:

$$A = \sum_{|I|\le 2R} \alpha_I D^I, \quad R = 1,2,\ldots$$

В частности, некоторые из констант α могут аннулироваться. Считаем, что выражение A определяет дифференциальный оператор на некотором фиксированном подмножестве функций, принадлежащих $C^\infty(\bar{\Omega})$. Можно образовать квантовомеханические наблюдаемые при помощи других функций от компонентов p_l квазиимпульса p , отличающиеся от $E(p)$, например:

$$p^2 = \sum_{l=1}^{3} p_l^2, \qquad F(p) = \sum_{l=1}^{3} p_l^{2R}, \quad R = 1,2,\ldots$$

При переходе к операторной записи B для $F(p)$ получаем:

$$B = const\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial^{2R}}{\partial x_l^{2R}}, \quad R = 1,2,\ldots$$

Можно интересоваться коммутативностью самосопряженных расширений двух операторов A и B, а также двух операторов вида A (типа энергии) с несовпадающими коэффициентами. Обозначим через D совокупность тех функций из $C^\infty(\bar{\Omega})$, которые аннулируются на $\partial\Omega$, и потребуем, чтобы D принадлежало $D(\tilde{A})$ и $D(\tilde{B})$. Фиксирование области определения $D(\tilde{A})$ оператора энергии $\tilde{A}$ отвечает выбору определенной динамики системы, (см., напр., /3/). В /4,5,6/ для случая $R=1$ показано, для каких областей Ω $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ коммутируют , а для каких - нет. В /4/ обсуждалась совместимость измерений $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$. В /5/ из предположения этой совместимости выводилась необходимость представления $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ в $L_2(\Omega)$ операторами вида, отличного от

$$A = \sum_{i=1}^{3}\frac{1}{2m_i^*}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad B = -\hbar^2\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}, \quad m_i^* = const,$$

на функциях из D , а также обсуждались некоторые процедуры перехода с классических наблюдаемых $E(p) = \sum_i 1/2m_i^* \cdot p_i^2$ и $p^2 = \sum_i p_i^2$ к квантовым $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ (процедуры квантования). Рассмотрения в /4,5,6/ основывались на двух теоремах, доказанных в /7/. Ниже мы показываем, что эти теоремы могут быть применены только для дифференциальных операторов второго порядка $(|I|=2)$, но и для операторов любого четного порядка $(|I| \ge 2)$. Доказательства проводятся сразу для любого (конечного) числа n измерений эвклидова пространства $\mathbb{R}^n$.

2. О необходимых условиях коммутативности самосопряженных расширений A и B

Пусть D обозначает множество функций, принадлежащих $C^\infty(\bar{\Omega})$ и аннулирующихся вместе с любой частной производной $\partial^k u(x)$ порядка $k \le R-1$ на $\partial\Omega$ (R - целое число):

$$D = \{u(x) \in C^\infty(\bar{\Omega}) : u(x) = \partial u(x) = \ldots = \partial^{R-1}u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega\}.$$

(Для случая $R=1$ D рассматривалась в п.I). Через A и B обозначим следующие дифференциальные операторы порядка $2R$, заданные на функциях $u\in D$:

$$Au=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\frac{\partial^{2R}u}{\partial x_i^{2R}}+\sum_{|I|\le 2R-1}a_I(x)D^I u$$

$$Bu=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^{2R}u}{\partial x_i^{2R}}+\sum_{|I|\le 2R-1}b_I(x)D^I u,$$

где α_i, $i=1,2,\dots,n$ - константы. Пусть $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ - самосопряженные расширения A и B соответственно в $L_2(\Omega)$ с областями определения $D(\widetilde{A})$ и $D(\widetilde{B})$, удовлетворяющими условиям: I) $D(\widetilde{A})=D(\widetilde{B})$. 2) $u(x)\in D(\widetilde{A})$ влечет $u(x)=0$ для $x\in\partial\Omega$. 3) $D(\widetilde{A})\supset D$. Пусть множество коэффициентов $\{\alpha_k, k=1,2,\dots n\}$ разбивается на непересекающиеся подмножества: $\{\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\dots,\alpha_{i_p}\}$, $\{\alpha_{j_1},\alpha_{j_2},\dots,\alpha_{j_q}\}$, ... , $\{\alpha_{l_1},\alpha_{l_2},\dots,\alpha_{l_r}\}$, так, что выполняется следующее условие 4): коэффициенты, принадлежащие любому фиксированному подмножеству разбиения, совпадают:

$\alpha_{i_1}=\dots=\alpha_{i_p}$, $\alpha_{j_1}=\dots=\alpha_{j_q}$, $\alpha_{l_1}=\dots=\alpha_{l_r}$,
а коэффициенты из разных подмножеств не совпадают: $\alpha_{i_1}\ne\alpha_{j_1}\ne\dots\ne\alpha_{l_1}$. Введем разбиение n координат точки x на непересекающиеся подмножества: $x_i=\{x_{i_1},\dots,x_{i_p}\}$, $x_j=\{x_{j_1},\dots,x_{j_q}\}$, $x_l=\{x_{l_1},\dots,x_{l_p}\}$, удовлетворяющее условию 5): индексы координат совпадают с индексами коэффициентов α_k.

Теорема I. Предположим, что выполнены условия I), 2), 3), 4) и что $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ коммутируют *). Тогда для любой точки O, принадлежащей гладкой части $\partial\Omega$, существует (гладкая) окрестность $\theta\subset\partial\Omega$, такая, что θ задается уравнением $f(x)=0$, где f зависит только от одного подмножества разбиения x, указанного условием 5.

*) $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ считаются коммутирующими, если коммутируют [I] их спектральные семейства.

Замечания. Из результатов [8] (теорема 2 и далее) видно, что расширения A и B, удовлетворяющие условиям I), 2), 3), 4), существуют, например, для частного случая эллиптических операторов и ограниченных областей Ω с кусочно-гладкими границами.

Предположения о коммутативности A и B и об их самосопряженности при условиях I), 2), 3) в общем случае накладывают дополнительные ограничения на коэффициенты Au и Bu, а также и на поведение границы в окрестности ее негладких кусков (отсутствие углов, больших π, см. [7], теорема 3 для $\Omega\subset R^2$ и [9]). Эти дополнительные ограничения не используются в явном виде при доказательстве теоремы I, но выполняются автоматически при сделанных предположениях.

Рассмотренный случай единичных коэффициентов у высших производных B не является ограничением общности. Выражение

$$Bu=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\frac{\partial^{2R}u}{\partial x_i^{2R}}+\sum_{|I|\le 2R-1}b_I(x)D^I u$$

с $\beta_i\ne 1$ заменой переменных сводится к нему.

Доказательство: Рассмотрим окрестность $V\subset R^n$ точки O такую, чтобы $V\cap\partial\Omega=\omega$, где ω - гладкий кусок $\partial\Omega$. В V введем новые координаты ξ :

$$\xi=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\},$$

$$\begin{aligned}\xi_1&=\xi_1(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ \xi_2&=\xi_2(x_1,x_2,\dots,x_n)\\ &\dots\dots\dots\dots\\ \xi_n&=\xi_n(x_1,x_2,\dots,x_n)\end{aligned}\qquad\text{(I)}$$

так, чтобы полученное отображение было взаимно-однозначным, ξ_i – бесконечно дифференцируемы в V и ω задавался уравнением $\xi_1 = 0$. После замены переменных для Au и Bu получится:

$$Au = \sum_{\ell_1,\dots,\ell_{2R}=1}^{n} \alpha_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_{2R}} \frac{\partial^{2R} u}{\partial\xi_{\ell_1}\partial\xi_{\ell_2}\dots\partial\xi_{\ell_{2R}}} + \sum_{|F|\le 2R-1} a'_F D^F u \qquad (2)$$

$$Bu = \sum_{\ell_1,\dots,\ell_{2R}=1}^{n} \beta_{\ell_1,\ell_2,\dots,\ell_{2R}} \frac{\partial^{2R} u}{\partial\xi_{\ell_1}\partial\xi_{\ell_2}\dots\partial\xi_{\ell_{2R}}} + \sum_{|F|\le 2R-1} b'_F D^F u \qquad (2')$$

Здесь u - функция от ξ, а $\alpha_{\ell_1,\dots,\ell_{2R}}, \beta_{\ell_1,\dots,\ell_{2R}}, a'_F, b'_F$ – функции от производных $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ по $x_1,x_2,\dots,x_n$ и от коэффициентов Au и Bu, соответственно. В частности, имеем:

$$\alpha_{\ell_1,\dots,\ell_{2R}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\partial\xi_{\ell_1}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi_{\ell_2}}{\partial x_i}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial\xi_{\ell_{2R}}}{\partial x_i},$$

$$\beta_{\ell_1,\dots,\ell_{2R}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\xi_{\ell_1}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\xi_{\ell_2}}{\partial x_i}\cdot\ldots\cdot\frac{\partial\xi_{\ell_{2R}}}{\partial x_i}.$$

Равенства (2) и (2') можно записать в виде скалярных произведений следующим образом. Обозначим:

$$u_\kappa = \Gamma_\kappa^0,\ \frac{\partial u_\kappa}{\partial\xi_1} = \Gamma_\kappa^1,\dots,\frac{\partial^R u_\kappa}{\partial\xi_1^R} = \Gamma_\kappa^R,\dots,\frac{\partial^{2R} u_\kappa}{\partial\xi_1^{2R}} = \Gamma_\kappa^{2R}. \qquad (3)$$

Рассмотрим вектор $G_\kappa = \{G_{\kappa 1},\dots,G_{\kappa\delta}\}$, зависящий от $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$:

$$G_\kappa = \{\Gamma_\kappa^0, [\partial\Gamma_\kappa^0]_1^0,\dots,[\partial^{2R}\Gamma_\kappa^0]_{2R}^0, \Gamma_\kappa^1, [\partial\Gamma_\kappa^1]_1^1,\dots,[\partial^{2R-1}\Gamma_\kappa^1]_{2R-1}^1,\dots$$

$$\dots,\Gamma_\kappa^R,[\partial\Gamma_\kappa^R]_1^R,\dots,[\partial^R\Gamma_\kappa^R]_R^R,\dots,\Gamma_\kappa^{2R-1},[\partial\Gamma_\kappa^{2R-1}]_1^{2R-1},\Gamma_\kappa^{2R}\}, \qquad (4)$$

с δ компонентами $G_{\kappa i}$, $1\le i\le\delta$, равными либо Γ_κ^l, $0\le l\le 2R$, либо их производным $\partial^j\Gamma_\kappa^l$ по $\xi_2,\xi_3,\dots\xi_n$, упорядоченным по возрастанию l и j.

В скобках $[\ ]_j^l$ записаны в некоторой фиксированной последовательности всевозможные неравные между собой производные $\partial^j\Gamma_\kappa^l$ от Γ_κ^l одного и того же порядка j. При l фиксированном j принимает, возрастая, все такие значения $j\ge 0$, для которых $j+l\le 2R$. Число всех компонент $G_{\kappa i}$, равных Γ_κ^l либо производным от Γ_κ^l с $l<R$, т.е. находящихся левее Γ_κ^R в строке (4), обозначим через ρ и $\delta-\rho-1=\Delta$.

Запишем Au_κ и Bu_κ как скалярные произведения $\langle G_\kappa,\Xi^\alpha\rangle$, $\langle G_\kappa,\Xi\rangle$ вектора G_κ на векторы Ξ^α и Ξ, соответственно, с элементами Ξ_i^α, Ξ_i, $i=1,2,\dots,\delta$. Элементы Ξ_i^α, Ξ_i функции от производных ξ_i по x_j и от коэффициентов Au и Bu, соответственно, но не от u_κ и их производных.

$$\Xi^\alpha = \left\{\Xi_1^\alpha = a'_{0,\dots,0},\ \Xi_2^\alpha,\dots,\ \Xi_\delta^\alpha = \sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\cdot\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_\kappa}\right)^{2R}\right\}$$

$$\Xi = \left\{\Xi_1 = b'_{0,\dots,0},\ \Xi_2,\dots,\ \Xi_\delta = \sum_{\kappa=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_\kappa}\right)^{2R}\right\}.$$

Запишем (2), (2') в виде:

$$(Au_\kappa)_{|\omega} = \langle G_{\kappa|\omega}, \Xi^\alpha_{|\omega}\rangle = \sum_{i=\rho+1}^{\delta} G_{\kappa i|\omega}\cdot\Xi^\alpha_{i|\omega}, \qquad (5)$$

$$(Bu_\kappa)_{|\omega} = \langle G_{\kappa|\omega}, \Xi_{|\omega}\rangle = \sum_{i=\rho+1}^{\delta} G_{\kappa i|\omega}\cdot\Xi_{i|\omega}, \qquad (5')$$

так как из $u_\kappa\in D$ следует, что производные u_κ, содержащие меньше, чем R, дифференцирований по ξ_1, аннулируются в ω.

Пусть θ – кусок $\partial\Omega$ такой, что $\theta\subset\omega$ и расстояние между θ и $\partial\Omega\setminus\omega$ больше некоторого $\epsilon>0$. Через θ_1 обозначим кусок $\partial\Omega$ такой, что $\theta\subset\theta_1\subset\omega$, и чтобы расстояния между θ и $\omega\setminus\theta_1$, а также между θ_1 и $\partial\Omega\setminus\omega$ были оба больше некоторого числа $\epsilon_1>0$. Выберем $\Delta\cdot R$ функций $\phi_k^l\in C^\infty(\omega)$, $1\le k\le\Delta$, $R\le l\le 2R-1$, аннулирующихся вне θ_1 и таких, что:

$$\det\begin{bmatrix} F_1\\ F_2\\ \vdots\\ F_\Delta\end{bmatrix}\ne 0 \qquad \text{для} \qquad x\in\theta, \tag{6}$$

где F_k, $k=1,2,\dots,\Delta$ – вектор, зависящий от x с Δ компонентами вида:

$$F_k=\{\phi_k^R, [\partial\phi_k^R]_1^R,\dots,[\partial^R\phi_k^R]_R^R,\ \phi_k^{R+1},\ [\partial\phi_k^{R+1}]_1^{R+1},\dots$$

$$\dots,[\partial^{R-1}\phi_k^{R+1}]_{R-1}^{R+1},\dots\dots,\ \phi_k^{2R-1}, [\partial\phi_k^{2R-1}]_1^{2R-1}\}. \tag{7}$$

В скобках $[\partial^j\phi_k^l]_j^l$ записаны конечные последовательности из всевозможных неравных между собой производных от ϕ_k^l по $\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ порядка j. Последовательность в записи производных $[\partial^j\phi_k^l]_j^l$ такая же, как и в соответствующей скобке $[\ \ ]_j^l$ в (4). Функции, удовлетворяющие (6), можно выбрать, например, так. Фиксируем произвольную строку с номером k и с элементами $F^{k,k'}$. Если имеется (случай I) $\phi_k^\lambda=F^{k,k}$, то $\phi_k^\lambda=const\ne0$. Если для фиксированной производной $\partial^j\phi_k^\lambda$ в скобке $[\ \ ]_j^\lambda$ имеем (случай 2) $\partial^j\phi_k^\lambda=F^{k,k}$, то выберем ϕ_k^λ так, чтобы $\partial^j\phi_k^\lambda=const\ne0$ и все остальные производные $F^{k,k'}$ в скобке $[\ \ ]_j^\lambda$ аннулировались. В обоих случаях выберем $\phi_k^{\lambda_1}\in C^\infty(\theta)$ произвольной, если $\lambda_1<\lambda$, и $\phi_k^{\lambda_1}=0$, если $\lambda_1>\lambda$. Тогда все элементы над главной диагональю нулевые, а определитель в (6) ненулевой.

Пользуясь ϕ_k^l, определим рекуррентным образом функции $\phi_k^{2R+\mu}$, $0\le\mu\le R-1$, на θ формулами (8),(10),(10').

$$\phi_k^{2R}=-\Xi_{\delta|\omega}^{-1}\langle F_k^0,\ \Xi'_{|\omega}\rangle, \tag{8}$$

где $\Xi_{\delta|\omega}=\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_k}\right)^{2R}\right]_{|\omega}$

и вектор Ξ' определяется так: $\Xi'=\{\Xi_1,\Xi_2,\dots,\Xi_{\delta-1}\}$.
Вектор F_k^0 с $\delta-1$ компонентами определяется добавлением слева к F_k множества из ρ нулевых элементов, записанных ради удобства индексирования в виде последовательности функций $\phi_k^i=0$ на ω и их производных $\partial^j\phi_k^i$, $i=0,1,\dots,R-1$.

$$\phi_k^0, [\partial\phi_k^0]_1^0,\dots,[\partial^{2R}\phi_k^0]_{2R}^0, \phi_k^1, [\partial\phi_k^1]_1^1,\dots,[\partial^{2R-1}\phi_k^1]_{2R-1}^1,$$

$$\dots, \phi_k^{R-1}, [\partial\phi_k^{R-1}]_1^{R-1},\dots\dots,[\partial^{R+1}\phi_k^{R-1}]_{R+1}^{R-1}. \tag{9}$$

Последовательность в записи производных в скобках $[\partial^j\phi_k^i]_j^i$ такая же, как и в соответствующих скобках $[\ \ ]_j^i$ в (4).

$$\phi_k^{2R+1}=-\Xi_{\delta|\omega}^{-1}[D_1+\phi_k^{2R}(\partial\Xi_\delta)_{|\omega}]. \tag{10}$$

Через D_1 обозначено выражение $\langle F_k^1,\ \Xi'_{|\omega}\rangle+\langle F_k^0,(\partial\Xi')_{|\omega}\rangle$, а F_k^1 – вектор с $\delta-1$ компонентами, получающийся из F_k^0 заменой любой функции ϕ_k^l, входящей в F_k^0, на функцию ϕ_k^{l+1}, $0\le l\le 2R-1$. Дифференцирование $\partial\Xi'$ проведено по ξ_1.

Подобным образом определим последовательно $\phi_k^{2R+\mu}$ через F_k^μ для $\mu=2,3,\dots,R-1$:

$$\phi_\kappa^{2R+\mu} = -\Xi_{\delta|\omega}^{-1}\Big[D_\mu + \binom{\mu}{1}\phi_\kappa^{2R+\mu-1}(\partial\Xi_\delta)_{|\omega} + \binom{\mu}{2}\phi_\kappa^{2R+\mu-2}(\partial^2\Xi_\delta)_{|\omega} +$$

$$+ \dots + \binom{\mu}{\mu-1}\phi_\kappa^{2R+1}(\partial^{\mu-1}\Xi_\delta)_{|\omega} + \phi_\kappa^{2R}(\partial^\mu\Xi_\delta)_{|\omega}\Big]. \qquad (10')$$

Через D_μ обозначено выражение $\langle F_\kappa^{(\mu)}, \Xi'_{|\omega}\rangle +$

$$+\binom{\mu}{1}\langle F_\kappa^{\mu-1}, (\partial\Xi')_{|\omega}\rangle + \dots + \binom{\mu}{i}\langle F_\kappa^{\mu-i}, (\partial^i\Xi')_{|\omega}\rangle + \dots + \langle F_\kappa^0, (\partial^\mu \Xi')_{|\omega}\rangle,$$

где $\binom{\mu}{i}$ – биномные коэффициенты, а F_κ^μ – вектор с $\delta-1$ компонентами, получающийся из $F_\kappa^{\mu-1}$ заменой любой функции ϕ_κ^l, входящей в $F_\kappa^{\mu-1}$ на ϕ_κ^{l+1}, $\mu-1\le l\le \mu+2R-2$. Дифференцирование $\partial^\mu\Xi'$ проведено по ξ_1. Далее определим функции $\vartheta_\kappa(x)\in C^\infty(\Omega)$, $1\le\kappa\le\Delta$, удовлетворяющие условиям (11), (12):

$$\vartheta_{\kappa|\omega} = \dots = \partial^l\vartheta_{\kappa|\omega} = \dots = \partial^{R-1}\vartheta_{\kappa|\omega} = 0, \qquad (11)$$

где дифференцирование ∂^l, $0\le l\le R-1$ производится по $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$:

$$\frac{\partial^h\vartheta_\kappa}{\partial\xi_1^h}\Big|_\omega = \phi_\kappa^h, \quad R\le h\le 3R-1. \qquad (12)$$

Пусть θ_2 – кусок $\partial\Omega$ такой, что $\theta_1\subset\theta_2\subset\omega$, и чтобы оба расстояния между θ_1 и $\omega\setminus\theta_2$, а также между θ_2 и $\partial\Omega\setminus\omega$ были оба больше некоторого числа $\varepsilon_2>0$. Через S_1 и S_2 обозначим открытые в $\mathbb{R}^n$ множества такие, что $S_1\subset S_2\subset V$, $\omega\cap S_1=\theta_1$, $\omega\cap S_2=\theta_2$ и чтобы расстояния между S_1 и $V\setminus S_2$, а также между S_2 и $\mathbb{R}^n\setminus V$ были оба положительными. Пусть $\tau(x)$ – бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n$ функция с носителем $\operatorname{supp}\tau(x)=\bar S_2$ такая, что $\tau(x)=1$ для $x\in S_1$. Определим для $x\in\Omega$ функции $\vartheta_\kappa(x)$:

$$\vartheta_\kappa(x)=\begin{cases}\tau(x)\sum\limits_{N=0}^{2R-1}\frac{1}{(R+N)!}\phi_\kappa^{R+N}(\xi_2,\dots,\xi_n)\xi_1^{R+N}, & x\in V\cap\Omega\\ 0, & x\notin\Omega\setminus V,\end{cases}$$

где $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ задаются согласно (1). Для $f_1,f_2,\dots,f_\chi=1,2,\dots,n$ и $x\in S_1\cap\Omega$, очевидно, имеем:

$$\frac{\partial^{h+\chi}\vartheta_\kappa}{\partial\xi_1^h\partial\xi_{f_1}\dots\partial\xi_{f_\chi}} = \frac{\tau(x)}{(R+N)!}\cdot\sum_{N=0}^{2R-1}\frac{\partial^\chi\phi_\kappa^{R+N}}{\partial\xi_{f_1}\dots\partial\xi_{f_\chi}}\cdot\frac{\partial^h}{\partial\xi_1^h}\xi_1^{R+N},$$

так как ϕ_κ^{R+N} для $N\ge R$ – рациональная функция от $\phi_\kappa^{R+N'}(\xi_2,\dots,\xi_n)$, $N'<R$, и от производных ξ_i по x_j, $i,j=1,2,\dots,n$. В силу (11), $\vartheta_\kappa(x)\in D(B)$.

Покажем, что для ϑ_κ выполняется $\vartheta_\kappa\in D([\tilde B]^2)$. Достаточно доказать, что $B\vartheta_\kappa\in D(B)$. Очевидно, что определив B^2 как $B\cdot B$ на $D(B^2)=\{u\in D(B): Bu\in D(B)\}$, из $B\vartheta_\kappa\in D(B)$ следует $\vartheta_\kappa\in D(B^2)$, и поэтому $\vartheta_\kappa\in D([\tilde B]^2)$. Покажем, что $B\vartheta_\kappa\in D(B)$, что эквивалентно

$$(\partial^{\mu+\nu}B\vartheta_\kappa)_{|\omega}=0,\quad 0\le\mu+\nu\le R-1,\ \mu,\nu\ge0, \qquad (13)$$

где μ и ν – порядки дифференцирования по ξ_1 и $\xi_2,\xi_3,\dots,\xi_n$ соответственно. В остальной части доказательства выберем $u_\kappa=\vartheta_\kappa$. Имеем (см. (4), (4')):

$$B\vartheta_\kappa=\langle G_\kappa,\Xi\rangle=\langle G'_\kappa,\Xi'\rangle+\Gamma_\kappa^{2R}\cdot\Xi_\delta, \qquad (14)$$

где вектор G'_κ с $\delta-1$ компонентами определяется опусканием последней компоненты Γ_κ^{2R} у вектора G_κ.

После дифференцирования*) ∂^μ по ξ_1 и сужения на ω получим:

---

*) соответствующих произведений по правилу Лейбница

$$(\partial^\mu B v_\kappa)_{|\omega} = (\partial^\mu \langle G'_\kappa, \Xi' \rangle)_{|\omega} + [\partial^\mu (\Gamma_\kappa^{2R} \cdot \Xi_\delta)]_{|\omega} = \langle (\partial^\mu G'_\kappa)_{|\omega}, \Xi'_{|\omega} \rangle +$$

$$+ \binom{\mu}{1} \langle (\partial^{\mu-1} G'_\kappa)_{|\omega}, (\partial \Xi')_{|\omega} \rangle + \cdots + \langle G'_{\kappa|\omega}, (\partial^\mu \Xi')_{|\omega} \rangle + \qquad (15)$$

$$+ (\partial^\mu \Gamma_\kappa^{2R})_{|\omega} \Xi_{\delta|\omega} + \binom{\mu}{1} (\partial^{\mu-1} \Gamma_\kappa^{2R})_{|\omega} (\partial \Xi_\delta)_{|\omega} + \cdots + \Gamma^{2R}_{\kappa|\omega} (\partial^\mu \Xi_\delta)_{|\omega}.$$

Далее, для дифференцирования ∂^μ по ξ_1, $0 \le \mu \le R-1$, имеем из (9), (11) и (12):

$$(\partial^\mu \Gamma_\kappa^l)_{|\omega} = \Phi_\kappa^{l+\mu}. \qquad (16)$$

Из (16) получим после дифференцирования ∂^j, $0 \le j \le 2R$, по $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$:

$$\partial^j (\partial^\mu \Gamma_\kappa^l)_{|\omega} = (\partial^\mu \partial^j \Gamma_\kappa^l)_{|\omega} = \partial^j \Phi_\kappa^{l+\mu}. \qquad (17)$$

Из (16), (17) и из определения F_κ^μ имеем:

$$(\partial^\mu G'_\kappa)_{|\omega} = F_\kappa^\mu. \qquad (18)$$

Подставим в (15) значения $(\partial^\mu G'_\kappa)_{|\omega}$ согласно (18) и $(\partial^\mu \Gamma_\kappa^l)_{|\omega}$ для $l = 2R$ согласно (16). Тогда из (15) следует, что равенство $(\partial^\mu B v_\kappa)_{|\omega} = 0$ в случае $\mu = 0$ эквивалентно (8), а в случае $\mu \ge 1$ эквивалентно (10) и (10'). Следовательно,

$$(\partial^\mu B v_\kappa)_{|\omega} = 0 \ . \qquad (19)$$

Дифференцированием ∂^ν, $0 \le \nu \le R-1$ по $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n$ из (19) получим:

$$0 = \partial^\nu (\partial^\mu B v_\kappa)_{|\omega} = (\partial^{\nu+\mu} B v_\kappa)_{|\omega}, \quad 0 \le \nu + \mu \le R-1,$$

т.е. (13) выполнено и, значит $v_\kappa \in D([\tilde{B}]^2)$.

Из леммы /1/ следует*), что области определения $[\tilde{A}]^2$ и $[\tilde{B}]^2$ совпадают: $D([\tilde{A}]^2) = D([\tilde{B}]^2)$. Поэтому $v_\kappa \in D([\tilde{A}]^2)$. В силу условия 2) на области определения $D(\tilde{A})$ и $D(\tilde{B})$ имеем:

$$(A v_\kappa)_{|\omega} = 0 \ . \qquad (20)$$

Рассмотрим сужения $G_{\kappa|\theta}$, $1 \le \kappa \le \Delta$, $\Xi^\alpha_{|\theta}$, Ξ_θ как векторы в любой точке $\theta \subset \omega$. Согласно (11), первые ρ компоненты нулевые. Поэтому из (20) и (19) для $\mu = 0$, учитывая (5), (5'), имеем:

$$(A v_\kappa)_{|\theta} = \langle \tilde{G}_{\kappa|\theta}, \tilde{\Xi}^\alpha_{|\theta} \rangle = 0 \ , \qquad (21)$$

$$(B v_\kappa)_{|\theta} = \langle \tilde{G}_{\kappa|\theta}, \tilde{\Xi}_{|\theta} \rangle = 0 \ , \qquad (22)$$

где векторы $\tilde{G}_{\kappa|\theta}, \tilde{\Xi}^\alpha_{\kappa|\theta}, \tilde{\Xi}_{\kappa|\theta}$ с $\delta - \rho = \Delta + 1$ компонентами определяются опусканием первых ρ компонент у $G_{\kappa|\theta}, \Xi^\alpha_{\kappa|\theta}, \Xi_{\kappa|\theta}$ соответственно. Из (6) следует, что в матрице , составленной из $\Delta+1$ компонент векторов $\tilde{G}_{\kappa|\theta}$, $1 \le \kappa \le \Delta$, существует подматрица ранга Δ , т.е. что $\tilde{G}_{\kappa|\theta}$ линейно независимы в любой точке $x \in \theta$. Тогда из ортогональности $\tilde{G}_{\kappa|\theta}$, $\kappa = 1, 2, \ldots, \Delta$ к $\tilde{\Xi}^\alpha_{|\theta}$ и к $\tilde{\Xi}_{|\theta}$ (формулы (21) и (22)) следует коллинеарность $\tilde{\Xi}^\alpha_{|\theta}$ и $\tilde{\Xi}_{|\theta}$ в любой точке $x \in \theta$:

$$\tilde{\Xi}_{|\theta} = \varkappa(x) \tilde{\Xi}^\alpha_\theta, \quad \text{где } \varkappa(x) \text{ - функция на } \theta \ .$$

В частности, для компонент

$$\alpha_{1,1,\ldots,1,l} = \sum_{\kappa=1}^n \alpha_\kappa \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_\kappa} \right)^{2R-1} \cdot \frac{\partial \xi_l}{\partial x_\kappa}, \quad \beta_{1,1,\ldots,1,l} = \sum_{\kappa=1}^n \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial x_\kappa} \right)^{2R-1} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_\kappa}$$

---

*) Эта лемма утверждает, что из самосопряженности $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, из их коммутативности и равенства $D(\tilde{A}) = D(\tilde{B})$ следует $D([\tilde{A}]^2) = D([\tilde{B}]^2)$.

векторов $\tilde{\Xi}^{\alpha}$ и Ξ, полученных из $\alpha_{\beta_1},\ldots,\beta_{2R}$ и $\beta_{\beta_1},\ldots,\beta_{2R}$ соответственно при $f_1=\ldots=f_{2R-1}=1$ и $f_{2R}=l$, получим:

$$\Big\{\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k-\varkappa(x))\Big(\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\Big)^{2R-1}\cdot\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\Big\}_{|\theta}=0\ ,\ l=1,2,\ldots,n\ . \quad (23)$$

Далее воспользуемся соотношением (23), чтобы получить утверждение теоремы. Эту заключительную часть доказательства можно получить, следуя методу, принятому в /7/. Мы определяем для любого $R=1,2,\ldots$ выражение $P_k(x)$ следующим образом:

$$P_k(x)=(\alpha_k-\varkappa(x))\Big(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_k}\Big)^{2R-1}. \quad (24)$$

Далее, как и в /7/, используя (24), запишем (23) в виде:

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}P_k(x)\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}\Big)_{|\theta}=0\ ,\ l=1,2,\ldots,n. \quad (25)$$

В силу предположений о замене переменных x на ξ следует, что $\xi_1=\xi_1(x)$ можно решить по отношению к некоторой из переменных $\{x_1,x_2,\ldots,x_n\}$, например x_{i_1}. Имеем:

$$\xi_1(x)=x_{i_1}-\zeta(x_1,\ldots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\ldots x_n). \quad (26)$$

Если $x\in\theta$, то обозначим $x=M(x')$, где $x'=\{x_1,\ldots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\ldots,x_n\}$ проекция x на подпространство, натянутое на координатные оси $x_1,\ldots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\ldots,x_n$. В силу (26) и $\xi_1=0$ на θ имеем:

$$M(x')=\{x_1,\ldots,x_{i_1-1},\zeta(x'),x_{i_1+1},\ldots,x_n\}.$$

В случае $l=1$ из (25) и (26) получим:

$$P_{i_1}(M(x'))-\sum_{k=1,k\neq i_1}^{n}P_k(M(x'))\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}=0. \quad (27)$$

Обозначим для $l\neq 1$: $\eta_l(x')=\xi_l(M(x'))$ и продифференцируем это равенство по x_k для $k\neq i_1$. В силу $x_{i_1}-\zeta(x')=0$ на θ имеем:

$$\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}=\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}+\frac{\partial\xi_l}{\partial x_{i_1}}\cdot\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}. \quad (28)$$

Определим $\frac{\partial\xi_l}{\partial x_k}$ из (28) и подставим в (25), для $k\neq i_1$. В силу $\frac{\partial\xi_1}{\partial x_{i_1}}=1$ имеем:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_1}}^{n}P_k(M(x'))\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}-\frac{\partial\xi_l}{\partial x_{i_1}}\Big[\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_1}}^{n}P_k(M(x'))\frac{\partial\zeta}{\partial x_k}-P_{i_1}(M(x'))\Big]. \quad (29)$$

Из (27) следует, что

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq i_1}}^{n}P_k(M(x'))\frac{\partial\eta_l}{\partial x_k}=0. \quad (30)$$

Из независимости[x)] $n-1$ решений $\eta_l,\ l=2,3,\ldots,n$ дифференциального уравнения (30) следует, что

$$P_k(M(x'))=0,\ k=1,2,\ldots,n,\ k\neq i_1. \quad (31)$$

Из (31) и (27) имеем:

$$P_{i_1}(M(x'))=0\ . \quad (32)$$

В (24) рассмотрим сужения: $P_k(x)_{|\theta}=P_k(M(x'))$, $\alpha_k(x)_{|\theta}=\alpha_k(M(x'))$ и положим $k=i_1$. Тогда из $\Big(\frac{\partial\xi_1}{\partial x_{i_1}}\Big)^{2R-1}=1$ и (32) следует

$$\alpha_{i_1}=\alpha_{i_2}=\ldots\ldots=\alpha_{i_p}=\varkappa(M(x')). \quad (33)$$

Если же $k\neq i_1$, то из (32) и (24) следует $\Big(\frac{\partial\xi_1(M(x'))}{\partial x_k}\Big)^{2R-1}=0$, т.е. $\frac{\partial\xi_1(M(x'))}{\partial x_k}=0$ и значит, ξ_1 не зависит от $x_k, k\neq i_1$. Поэтому θ задается уравнением $\xi_1(x_{i_1},x_{i_2},\ldots,x_{i_p})=0$; полагая $f=\xi_1$, получим заключение.

В /I/ использованы расширения по Фридрихсу A^F, B^F для выражений A,B, заданных первоначально на $u\in C_0^\infty(\Omega)$, функции из $C^\infty(\Omega)$ с компактным носителем (а не на $u\in D$), где

---

x) При замене координат /I/ для $x\in\theta$, т.е. $\{x_1,\ldots,x_{i_1-1},\zeta(x'),x_{i_1+1},\ldots,x_n\}\to\{\xi_1=0,\xi_2=\eta_2,\ldots,\xi_n=\eta_n\}$ ясно, что отображения $\{x'\}\rightleftarrows\{\eta_2,\eta_3,\ldots,\eta_n\}$ однозначны и непрерывно дифференцируемы. Поэтому $\frac{\partial(\eta_2,\eta_3,\ldots,\eta_n)}{\partial(x_1,\ldots,x_{i_1-1},x_{i_1+1},\ldots,x_n)}\neq 0$ и $\eta_2,\ldots,\eta_n$ независимы.

Ω – "регулярная" область и $R=1$. В силу результатов /IO/, § 27, § 29, имеем: $A^F = \widetilde{A}$, $B^F = \widetilde{B}$, где $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ – расширения по Фридрихсу A, B, заданных на $u \in D$.

Теорему I удается переформулировать и для случая, когда коэффициенты α_i в выражении для A и коэффициенты β_i в выражении для B перед высшими производными не являются постоянными, а зависят от x : $\alpha_i = \alpha_i(x)$, $\beta_i = \beta_i(x)$. Доказательство этого утверждения удается провести аналогичным образом.

3. <u>О достаточных условиях коммутативности самосопряженных расширений A и B</u>

Пусть в частном случае $n=2$, Ω имеет вид прямоугольника с вершинами, имеющими координаты (0,0), (0,I), (I,0), (I,I). Уравнения гладких частей $\partial\Omega$ зависят не от всей совокупности координат $\{x_1, x_2\}$, а только от x_1, либо только от x_2. (Граница такой области Ω удовлетворяет заключению теоремы I). В этом случае гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ можно представить в виде тензорного произведения $L_2([0,1]) \otimes L_2([0,1])$ пространств, суммируемых с квадратом функций, заданных на отрезке (0,I). В случае $n>2$ аналогичное наблюдение вместе с рассмотрением дифференциальных операторов порядка $|I| \geq 2$ в $L_2(\Omega)$ позволяют сформулировать и доказать в некотором смысле обратное теореме I утверждение. Пусть даны ограниченные области $\Omega_i, \Omega_j, \ldots, \Omega_l$ соответственно в $p, q, \ldots, r$ -мерных подпространствах из координат $x_i = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_p}\}$, $x_j = \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_q}\}$, $\ldots$, $x_l = \{x_{l_1}, \ldots, x_{l_r}\}$. Здесь подмножества $x_i, x_j, \ldots, x_l$ задают разбиение множества $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ всех координат в R^n. Пусть граница $\partial\Omega_i$ у Ω_i – гладкая, $\partial\Omega_i$ не содержит внутренних точек из $\overline{\Omega}_i$ и то же самое имеет место также и для $\Omega_j, \ldots, \Omega_l$. Рассмотрим формальные дифференциальные выражения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ по переменным x, допускающие "разделение переменных":

$$\mathcal{A} = c_i \mathcal{B}_i + c_j \mathcal{B}_j + \cdots + c_l \mathcal{B}_l, \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_j + \cdots + \mathcal{B}_l.$$

Здесь $c_i, c_j, \ldots, c_l$ – действительные константы, $\mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j, \ldots, \mathcal{B}_l$ – эллиптические формально самосопряженные дифференциальные выражения четного порядка $2R_i, 2R_j, \ldots, 2R_l$ соответственно по переменным $x_i, x_j, \ldots, x_l$.

$$\mathcal{B}_i = \sum_{|s| \leq 2R_i} \alpha_s(x_i) D^s, \quad \mathcal{B}_j = \sum_{|s| \leq 2R_j} \beta_s(x_j) D^s, \ldots, \mathcal{B}_l = \sum_{|s| \leq 2R_l} \gamma_s D^s \quad {}^{*)}$$

Пусть $\alpha_s(x_i) \in C^\infty(\overline{\Omega}_i), \ldots, \gamma_s(x_l) \in C^\infty(\overline{\Omega}_l)$. Зададим оператор B_i с областью определения $D(B_i) = \{u(x_i) \in C^\infty(\overline{\Omega}_i) : u(x_i) = \partial u(x_i) = \ldots = \partial^{R_i - 1} u(x_i) = 0,\ x_i \in \partial\Omega_i\}$ так: $B_i u(x_i) = \mathcal{B}_i u(x_i)$ для $u(x_i) \in D(B_i)$ (и соответственно для $B_j, \ldots, B_l$ с заменой i на $j, \ldots, l$). Обозначим через L тензорное произведение $L_2(\Omega_i) \otimes L_2(\Omega_j) \otimes \ldots \otimes L_2(\Omega_l)$, где, по определению,

$$L \ni u(x_i) \otimes u(x_j) \otimes \ldots \otimes w(x_l) = u(x_i) u(x_j) \ldots, w(x_l).$$

Обозначим: $B_i' = B_i \otimes I_j \otimes \ldots \otimes I_l$, $B_j' = I_i \otimes B_j \otimes I_k \otimes \ldots \otimes I_l, \ldots \ldots B_l' = I_i \otimes I_j \otimes \ldots \otimes B_l$, где $I_i, I_j, \ldots I_l$ – единичные операторы в $L_2(\Omega_i), L_2(\Omega_j), \ldots, L_2(\Omega_l)$ соответственно. Рассмотрим $B = B_i' + B_j' + \ldots + B_l'$ и $A = c_i B_i' + c_j B_j' + \cdots + c_l B_l'$ с областями определения $D(B) = D(A) = D(B_i) \otimes D(B_j) \otimes \ldots \otimes D(B_l)$.

<u>Теорема 2</u>. В предположениях и обозначениях п. 3 допустим, что Ω совпадает с прямым произведением $\Omega_i \times \Omega_j \times \ldots \times \Omega_l = \Omega$. Тогда самосопряженные расширения $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ у A и B соответственно, коммутируют.

<u>Доказательство.</u> Согласно (/II/, теорема 25 гл.XIУ,§6), замыкание $\overline{B}_i$ у B_i самосопряжено и B_i имеет полную систему собственных функций в $L_2(\Omega_i)$: $u_\mu^i \in D(B_i)$, $\mu = 1, 2, \ldots$; $B_i u_\mu^i = \lambda_\mu^i u_\mu^i$, где λ_μ^i – константы. Аналогичный результат имеет место и для $\overline{B}_j, \ldots, \overline{B}_l$: $B_j u_\nu^j = \lambda_\nu^j u_\nu^j, \ldots, B_l u_\sigma^l = \lambda_\sigma^l u_\sigma^l$; $\nu, \sigma = 1, 2, \ldots$ Множество $\{u_{\mu,\nu,\ldots,\sigma} = u_\mu^i u_\nu^j \ldots u_\sigma^l,\ \mu, \nu, \ldots, \sigma = 1, 2, \ldots\}$ образует полную систему векторов в $L_2(\Omega)$ (см. /I2/, гл. I § 2). Функции $u_{\mu,\nu,\ldots,\sigma}$ являются собственными для A и B. Действительно,

$$B u_{\mu\nu\ldots\sigma} = (\lambda_\mu^i + \lambda_\nu^j + \ldots + \lambda_\sigma^l) u_{\mu\nu\ldots\sigma},$$

$$A u_{\mu\nu\ldots\sigma} = (c_i \lambda_\mu^i + c_j \lambda_\nu^j + \cdots + c_l \lambda_\sigma^l) u_{\mu\nu\ldots\sigma}.$$

Так как $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ – расширения **) A и B, то $u_{\mu\nu\ldots\sigma}$ – полная система общих собственных функций в $L_2(\Omega)$ для $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, т.е. $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ коммутируют.

Автор обязан Р.Т.Денчеву за полезные обсуждения.

---

*) Если коэффициенты у высших производных $B_i, B_j, \ldots, B_l$ константы (и среди этих производных смешанные производные отсутствуют), то коэффициенты A удовлетворяют условию разбиения (4) использованному в теореме I.

**) В случае двух слагаемых $B = B_i' + B_j'$, из (/I2/ гл.УI §4, Лемма 4.I) и из самосопряженности $\overline{B}_i$, $\overline{B}_j$ следует, что у B есть самосопряженное расширение. Аналогичное утверждение имеет место и в случае большего числа слагаемых.

Литература

I. Й. фон Нейман. Математические основы квантовой механики, Москва I964.
2. А.С.Давыдов. Квантовая механика, Москва, I963.
3. А.Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, Москва, I969.
4. Т.С.Тодоров. Сообщение ОИЯИ Р2-9409 (I975).
5. T.S.Todorov. Intern. Jour. Theor.Phys. (to be published) (1977).
6. R.T.Denchev, Ch.I.Poushkarov, T.S.Todorov, Acta Phys. Austr. v. 45, p. 255, (1976).
7. Р.Т.Денчев. Математический сборник, т. 84 (I26), с. 366 (I97I).
8. М.Ш.Бирман. ДАН СССР, т. 92, № 2, с. 205, (I953).
9. М.Ш.Бирман, Г.Е.Скворцов. Известия вузов, Математика №5 (30), с. I2, (I962).
I0. С.Г.Михлин. Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, (I952).
II. Н.Данфорд, Дж.Шварц. Линейные операторы т. П, Москва, (I966).
I2. Ю.М.Березанский. Разложение по собственным функциям дифференциальных операторов, Киев, (I965).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 октября I977 года.