СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 10708

С.И.Сердюкова

СХЕМА РУСАНОВА. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ. АСИМПТОТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОГО РАЗРЫВА

1977

P5 - 10708

С.И.Сердюкова

СХЕМА РУСАНОВА. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ. АСИМПТОТИКА В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОЛИРОВАННОГО РАЗРЫВА

Сердюкова С.И. P5 - 10708

Схема Русанова.Исследование устойчивости в равиомерной метрике. Асимптотика в окрестности изолированного разрыва

В работе исследуется устойчивость в равномерной метрике, в C, схемы Русанова, которая широко используется при решении уравнений газовой динамики. Решения уравнений газовой динамики имеют разрывы. Известно, что при численном моделировании разрывных решений следует использовать разностные схемы, устойчивые в C. В предлагаемой работе построены асимптотики численного решения в окрестности изолированного разрыва. Доказано, что на границе устойчивости в L_2 устойчивости в C нет и в окрестности разрыва появляются паразитические осцилляции,сильно искажающие решение. Тем самым доказано, что при численном решении разрывных решений дифференциальных уравнений по схеме Русанова следует избегать выхода на границу устойчивости в L_2: $\omega = 4\sigma^2 - \sigma^4$, $0 < \sigma < 1$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Serdyukova S.I. P5 - 10708

The V.V.Rusanov Scheme. Investigation of Stability in Uniform Metrics.Asymptotic Expansion in the Vicinity of Isolated Discontinuity

There is investigated stability in C of the Rusanov scheme used widely in numerical solution of gas dynamics problems. Asymptotic expansions of numerical solution are constructed in the vicinity of isolated discontinuity. It is proved, that on the boundary of stability in L_2 $\omega = 4\sigma^2 - \sigma^4$, $0 < \sigma < 1$ stability in C is absent and in the vicinity of discontinuity there appear parasitic oscillations deforming solution very strongly.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

В работах В.В.Русанова /1,2/ обсуждается схема третьего порядка точности, которая широко используется при решении уравнений газовой динамики. Исследована устойчивость в L_2. Известно, что при решении разрывных решений следует использовать разностные схемы, устойчивые в равномерной метрике. В предлагаемой работе исследуется устойчивость схемы Русанова в C. Построены асимптотики в окрестности изолированного разрыва. Установлено, что на границе области устойчивости в L_2 устойчивости в C нет и в окрестности разрыва возникают паразитические осцилляции, сильно искажающие решение.

Для уравнения $u_t = u_x$ рассматривается /1,2/ такая разностная аппроксимация:

$$u_\nu^{n+1} = \Big\{ I + \frac{\sigma}{12}\left(-T^2 + 8T - 8T^{-1} + T^{-2}\right) + \frac{\sigma^2}{8}\left(T^2 - 2I + T^{-2}\right) + \frac{\sigma^3}{12}\left(T^2 - 2T + 2T^{-1} - T^{-2}\right) - \frac{\omega}{24}\left(T^2 - 4T + 6I - 4T^{-1} + T^{-2}\right)\Big\} u_\nu^n , \tag{I}$$

$$n \geq 0, \quad \nu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots; \quad x = \nu \cdot h, \quad t = n \cdot \tau, \quad \sigma = \frac{\tau}{h},$$

$$T u_\nu^n = u_{\nu+1}^n .$$

Характеристическая функция (I) имеет вид:

$$f(e^{i\varphi}) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}\sin^2\varphi - \frac{2}{3}\omega\sin^4\frac{\varphi}{2} + \sigma i\sin\varphi\left(1+\frac{2}{3}(1-\sigma^2)\sin^2\frac{\varphi}{2}\right),$$

$$|f(e^{i\varphi})|^2 = 1 + \frac{4}{9}\Big\{\left[4\sigma^2(1-\sigma^2)^2 - (\omega-3\sigma^2)^2\right]z^2 - 2\left[2\sigma^2(1-\sigma^2)^2 + \right.$$
$$\left. + 3\sigma^2(\omega-\sigma^2-2)\right]z + 3(\omega-4\sigma^2+\sigma^4)\Big\}\cdot z^2 = 1 + \mathcal{P}(z)\cdot z^2, \qquad (2)$$

где $z=\sin^2\frac{\varphi}{2}$. Разностная схема (I) устойчива в L_2 , если и только если:

$$\sigma \le 1, \quad 4\sigma^2-\sigma^4 \le \omega \le 3. \qquad (3)$$

Далее предполагается, что условия устойчивости в L_2 выполняются. Тогда $|f(e^{i\varphi})| \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Сразу исключим из рассмотрения два тривиальных случая: $\sigma=\omega=0$ и $\sigma=1$, $\omega=3$. Первому случаю отвечает тождественное преобразование: $u_\nu^{n+1}=u_\nu^n$. Второму случаю отвечает абсолютно точная схема: $u_\nu^{n+1}=u_{\nu+1}^n$, $f(e^{i\varphi})=e^{i\varphi}$. Для того чтобы исследовать устойчивость в C , найдем все точки, в которых $|f(e^{i\varphi})|=1$. Такие точки назовем определяющими. Устойчивость в C зависит от структуры характеристической функции в окрестности определяющих точек. $\varphi=0$ для всех (σ , ω) является определяющей точкой: $f(1)=1$. Далее, $f(-1)=1-\frac{2}{3}\omega$, так что $\varphi=\pi$ является определяющей точкой при $\omega=3$. Покажем, что в остальных точках единичной окружности $|f(e^{i\varphi})|<1$ для всех (σ,ω) , удовлетворяющих (3). Для этого достаточно доказать, что $\mathcal{P}(z)>0$ (см.(2)) при $0<z<1$. Заметим, что на концах рассматриваемого отрезка многочлен $\mathcal{P}(z)$ неотрицателен:

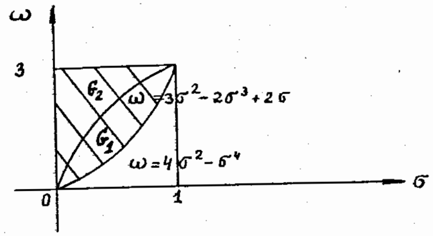
$$\mathcal{P}(0) = \omega - 4\sigma^2 + \sigma^4 \geqslant 0, \qquad \mathcal{P}(1) = 1-\left(1-\frac{2}{3}\omega\right)^2 \geqslant 0.$$

При $\omega=4\sigma^2-\sigma^4$ многочлен $\mathcal{P}(z)$ имеет два корня:

$$z_1=0, \qquad z_2=-\frac{2}{1-\sigma^2}<0.$$

Заметим далее, что в рассматриваемой области изменения (σ,ω) :

$$0 \le \sigma \le 1, \qquad 4\sigma^2-\sigma^4 \le \omega \le 3.$$



$\sigma=1$ достигается лишь при $\omega=3$, и этот случай исключён из рассмотрения. Таким образом, если (σ,ω) принадлежит границе области устойчивости $\omega=4\sigma^2-\sigma^4$, то многочлен $\mathcal{P}(z)$ имеет отрицательный корень. В области G_1 : $4\sigma^2-\sigma^4<\omega<3\sigma^2-2\sigma^3+2\sigma$, коэффициент при z^2 положителен и тогда вследствие непрерывности $\mathcal{P}(z)$ имеет два отрицательных корня. Если $(\sigma,\omega)\subset G_1$ и ω стремится к $3\sigma^2-2\sigma^3+2\sigma$, то один из корней $\mathcal{P}(z)$ уходит в бесконечность, а второй стремится к предельному значению

$$\frac{3}{4\sigma(\sigma-1)} < 0.$$

Напомним, что случай $\sigma=\omega=0$ отвечает тождественному преобразованию и исключён из рассмотрения. Наконец, рассмотрим

$$(\sigma,\omega)\subset G_2 : \quad 3\sigma^2-2\sigma^3+2\sigma<\omega\le 3.$$

Тогда коэффициент при z^2 отрицателен, соответственно $\mathcal{P}(z)$ имеет корни разных знаков. Итак, установлено, что есть две определяющие точки: $\varphi=0$ (при всех σ,ω) и $\varphi=\pi$ (при $\omega=3$). В окрестности $\varphi=0$ справедливо разложение:

$$f(e^{i\varphi}) = \exp\left\{i\sigma\varphi - \frac{\omega-4\sigma^2+\sigma^4}{24}\varphi^4 + i\left(\frac{\sigma(\omega-4\sigma^2+\sigma^4)}{24} - \frac{\sigma(\sigma^2-1)(\sigma^2-4)}{120}\right)\varphi^5 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{(1+3\sigma^2)(\omega-4\sigma^2+\sigma^4)}{144} - \frac{\sigma^2(\sigma^2-1)(\sigma^2-4)}{144}\right)\varphi^6 + O(\varphi^7)\right\}.$$

На границе устойчивости в L_2, $\omega=4\sigma^2-\sigma^4$, имеем:

$$f(e^{i\varphi}) = \exp\left\{ i\sigma\varphi - i\frac{\sigma(\sigma^2-1)(\sigma^2-4)}{120}\varphi^5 - \frac{\sigma^2(\sigma^2-1)(\sigma^2-4)}{144}\varphi^6 + O(\varphi^7)\right\}.$$

Так как $0<\sigma<1$, коэффициент при φ^5 отличен от нуля, а коэффициент при φ^6 отрицателен. Устойчивости в C нет:

$$\|G^n\|_C \asymp n^{\frac{1}{12}}.$$

G – оператор перехода от слоя к слою задачи Коши. При $\omega=3$ есть ещё одна определяющая точка $\varphi=\pi$, в окрестности этой точки справедливо разложение:

$$f(e^{i\varphi}) = \exp\Big\{ i\pi + i\sigma(\varphi-\pi) + i\sigma\frac{2}{3}(1-\sigma^2)(\varphi-\pi) -$$

$$-(1-\sigma^2)\left(1-\frac{8\sigma^2}{9}+\frac{2\sigma^4}{9}\right)(\varphi-\pi)^2 + O(\varphi-\pi)^3\Big\}.$$

Точка $\varphi=\pi$ удовлетворяет условиям устойчивости в C [3], но здесь есть нестандартная ложная характеристика:

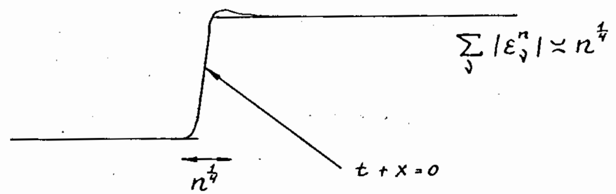
$$n+\sigma\nu+\frac{2}{3}\sigma\nu(1-\sigma^2)=0, \qquad t+x+\frac{2}{3}(1-\sigma^2)x=0.$$

Асимптотика в окрестности изолированного разрыва

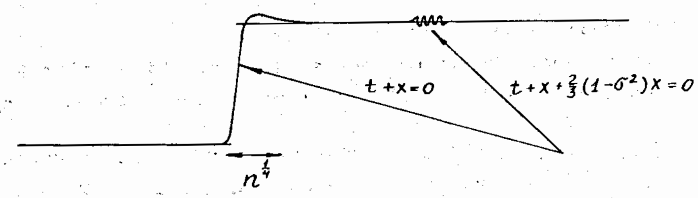
В работе[4] с помощью метода перевала построены асимптотики "разностной ступеньки". В области ширины $n^{\frac14}$ (при $\omega>4\sigma^2-\sigma^4$) и $n^{\frac13}$ (при $\omega=4\sigma^2-\sigma^4$), непосредственно примыкающей к характеристике $t+x=0$, "разностная ступенька" отличается от ступеньки на величину порядка I. При $4\sigma^2-\sigma^4<\omega=3$ в окрестности ложной характеристики имеется область "степенных осцилляций" ширины $n^{\frac12}$ со сменой знака от точки к точке. При $4\sigma^2-\sigma^4=\omega<3$ справа от характеристики находится зона степенных осцилляций ширины $n^{\frac13}$. Для остальных ν уклонение "разностной ступеньки" от ступеньки ε_ν^n экспоненциально мало. Ниже на рисунках

схематически представлено поведение "разностной ступеньки" в трёх различных случаях. Приведены главные члены асимптотики в областях "степенных осцилляций" и оценки скорости роста ε_ν^n в L_1 при $n\to\infty$.

$3>\omega>4\sigma^2-\sigma^4$, $\|G^n\|_C \asymp 1$



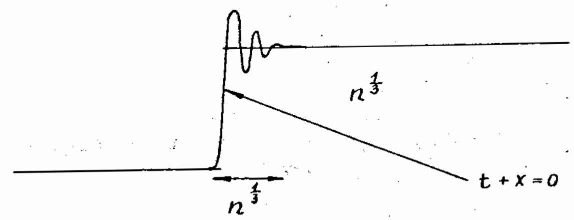
$3=\omega>4\sigma^2-\sigma^4$, $\|G^n\|_C \asymp 1$



$$\varepsilon_\nu^n = \frac{(-1)^{\nu+n}}{4}\left(2\pi n(1-\sigma^2)\left(1-\frac{8}{9}\sigma^2+\frac{2}{9}\sigma^4\right)\right)^{-\frac12}(1+o(1)),$$

$$\left|n+\sigma\nu+\frac{2}{3}\sigma(1-\sigma^2)\nu\right|<cn^{\frac12}; \qquad \sum_\nu|\varepsilon_\nu^n|\asymp n^{\frac14}.$$

$3>\omega=4\sigma^2-\sigma^4$, $\|G^n\|_C \asymp n^{\frac{1}{12}}$



$$\varepsilon_\nu^n = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left(\frac{5An}{j^5}\right)^{\frac{1}{8}} \sin\left(\frac{4}{5}\left(\frac{j^5}{5An}\right)^{\frac{1}{4}} - \frac{\pi}{4}\right) \exp\left\{-\frac{B}{(5A)^{3/2}}\left(\frac{j^3}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}(1+o(1)),$$

$$j = \nu + \sigma n > c n^{\frac{1}{5}}\ ; \quad A = \frac{\sigma(\sigma^2-1)(\sigma^2-4)}{120}, \quad B = \frac{\sigma^2(\sigma^2-1)(\sigma^2-4)}{144},$$

$$\sum_\nu |\varepsilon_\nu^n| \asymp n^{\frac{1}{4}}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. V.V.Rusanov."Difference schemes of third order accuracy for "across" computation of discontinuous solutions", Fluid Dynamics Transactions, Polish Academy of Sci., Warsaw,vol.4,p.p.285-294, 1969.
2. V.V.Rusanov."On difference schemes of third order accuracy for nonlinear hyperbolic systems", Juor. of Comp. Phys., vol.5,N3, p.p. 507-516, 1970.
3. С.И.Сердюкова."Об устойчивости в C линейных разностных схем с постоянными действительными коэффициентами", ЖВМиМФ, 6, № 3, 477-486, 1966.
4. С.И.Сердюкова."Об осцилляциях, возникающих при численных расчётах разрывных решений дифференциальных уравнений", ЖВМиМФ, II, № 2, 4II-424, I97I.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I мая 1977 года.