СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 10682

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕСКОНЕЧНОГО СВОБОДНОГО РАНГА

1977

P5 - 10682

В.М.Лебеденко

О СИСТЕМАХ ОБРАЗУЮЩИХ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП БЕСКОНЕЧНОГО СВОБОДНОГО РАНГА

Лебеденко В.М.

P5 - 10682

О системах образующих непериодических абелевых групп бесконечного свободного ранга

Работа является дальнейшим продвижением в решении проблемы В.Длаба, связанной с системами образующих абелевых групп. Даны некоторые критерии существования наследственно сильно приводимых систем образующих у абелевых групп. На основании этого получено распределение непериодических групп бесконечного свободного ранга по классам В.Длаба.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Lebedenko V.M.

P5 - 10682

On Generator Systems for Non-Torsion Abelian Groups of Infinite Free Rank

This work is further advance in solution of the Dlab problem related to the systems of generators of Abelian groups. We present some existence criteria for heriditarily strongly reducible systems of generators of Abelian groups. On this basis the distribution of non-torsion groups of infinite free rank on Dlab's classes was obtained

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

I. ВВЕДЕНИЕ

1. Настоящая работа является дальнейшим развитием решения проблемы В.Длаба /см. [3–5] /. В предыдущих работах, посвященных указанной проблеме, автор касался различных ее аспектов [7–10]. В частности, удалось дать полное распределение по классам В.Длаба неограниченных периодических групп [10]. Ниже будут даны некоторые критерии существования систем образующих типа (VI) у абелевых групп. На основании этого будет получено распределение непериодических групп бесконечного свободного ранга по классам В.Длаба.

2. Терминология. Используя понятие неприводимой системы образующих и введенные им понятия сильно приводимой, наследственно приводимой и наследственно сильно приводимой систем образующих /см. ниже/, Длаб разделил все системы образующих групп на шесть типов:

(I) - неприводимая система образующих;

(II) - приводимая, но не сильно приводимая и не наследственно приводимая система образующих;

(III) - сильно приводимая, но не наследственно приводимая система образующих;

(IV) - наследственно приводимая система образующих, но не сильно приводимая;

(V) - наследственно и сильно приводимая система образующих, но не наследственно сильно приводимая;

(VI) - наследственно сильно приводимая система образующих.

В.Длаб показал, что существуют абелевы группы, обладающие всеми шестью типами систем образующих. Им установлено, какими вообще комбинациями этих типов могут обладать абелевы группы.

Это следующие комбинации:

(I);

(I), (II);

(I), (II), (III);

(I), (II), (III), (IV), (V);

(I), (II), (III), (IV), (V), (VI);

(IV), (V);

(IV), (V), (VI);

(VI).

В соответствии с этим абелевы группы можно разделить на восемь непересекающихся классов, если поставить в соответствие каждой такой комбинации типов систем образующих все абелевы группы, в которых реализуется только она:

D(1,0,0,0,0,0) – (I)
D(1,1,0,0,0,0) – (I)(II)
D(1,1,1,0,0,0) – (I)(II)(III)
D(1,1,1,1,1,0) – (I)(II)(III)(IV)(V)
D(1,1,1,1,1,1) – (I)(II)(III)(IV)(V)(VI)
D(0,0,0,1,1,0) – (IV)(V)
D(0,0,0,1,1,1) – (IV)(V)(VI)
D(0,0,0,0,0,1) – (VI).

Далее всюду под группами мы будем подразумевать абелевы группы. Через $\bar{g}$ и $\bar{D}$ будем обозначать образы элемента g и подмножества D группы G в фактор-группе $\bar{G} = G/A$. Символ "$\subset$" употребляется нами для обозначения строгого вложения подмножеств, в отличие от "$\subseteq$". Множество, состоящее из элементов g_λ, $\lambda \in \Lambda$, будем обозначать через $[g_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$, а разность некоторого множества D и одноэлементного множества g - через $D \setminus g$. Для обозначения прямой суммы групп мы употребляем знаки "+" и Σ.

Пусть D - система образующих некоторой группы G.

Определение 1. D - *неприводима*, если отношение

$$g \in \{D \setminus g\} \qquad (*)$$

не выполняется ни для одного элемента $g \in D$. В противном случае D - *приводима*.

Определение 2. D - *сильно приводима*, если соотношение $(*)$ выполняется для любого элемента $g \in D$.

Определение 3. D - *наследственно приводима*, если приводима всякая подсистема $D' \subseteq D$, порождающая $G = \{D\}$.

Определение 4. D - *наследственно сильно приводима*, если сильно приводима всякая подсистема $D' \subseteq D$, которая порождает $G = \{D\}$. Остальные обозначения заимствованы из /2/.

II. КРИТЕРИИ СУЩЕСТВОВАНИЯ НАСЛЕДСТВЕННО СИЛЬНО ПРИВОДИМЫХ СИСТЕМ ОБРАЗУЮЩИХ У НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРУПП

Следующая лемма является обобщением результата, полученного нами ранее /11/ для примарных групп.

Лемма. Пусть группа $G = \{D\}$. Если для любого $a \in D$ и любого простого числа p есть такие элементы $a_i \in D \setminus a$ $(i = 1, \dots, n), (n = n(a,p))$, что

$$h_p(a + \sum_{i=1}^{n} k_i a_i) > 0,$$

то система образующих D сильно приводима.

Доказательство. Пусть $G = \{D\}$, , D удовлетворяет условию леммы, и a - произвольный элемент D. Из условия следует, что

$$\{a\} \cap \{D \setminus a\} \neq 0$$

$$(a + \sum_{1}^{n(a,p)} k_i a_i = pka + pf(D \setminus a)^* \to (pk-1)a \in \{D \setminus a\},$$

$(pk-1)a \neq 0$, если $0(a)=\infty$; если $0(a)=\ell = q\ell'$, где q - простое число, то $(qk-1)a \neq 0)$. Пусть m - минимальное положительное число, для которого $ma \in \{D \setminus a\}$. Предположим, что $m > 1$.

Если p - простой делитель m, то, по условию, найдутся такие элементы $a_i \in D \setminus a$, $(i=1,\dots,n(a,p))$, что

$$h_p(a + \sum_{i=1}^{n} k_i a_i) > 0,$$

то есть

$$a + \sum_{i=1}^{n} k_i a_i = pka + pf(D \setminus a).$$

Следовательно, $(pk-1)a \in \{D \setminus a\}$. Отсюда получаем, что

$$(pk-1, m) = m_1 < m, \quad m_1 > 0$$

и

$$m_1 a \in \{D \setminus a\}.$$

Это противоречит минимальности m. Следовательно, $a \in \{D \setminus a\}$. В силу произвольности $a \in D$ система D сильно приводима.

Лемма доказана.

Теорема 1. Если группа $G \supset A = \{M\}$,

$$G/A \cong \sum_{\lambda \in \Lambda} C(p_\lambda^\infty), \ |\Lambda| \geq |M|,$$

то G обладает системой образующих типа (VI).

Доказательство. Можно считать, что $M = [a_\lambda]_{\lambda \in \Lambda}$ /может быть с повторениями/. Пусть $G/A = \sum_{\lambda \in \Lambda} \{\bar{C}_\lambda\}$, где

$$\{\bar{C}_\lambda\} \cong C(p_\lambda^\infty), \quad \bar{C}_\lambda = [\bar{c}_{\lambda i}]_{i=1}^\infty,$$

$$p_\lambda \bar{c}_{\lambda 1} = 0, \dots, \quad \bar{c}_{\lambda i} - p_\lambda \bar{c}_{\lambda, i+1} = 0, \dots \quad \text{и}$$

$$C_\lambda = [c_{\lambda i}]_{i=1}^\infty, \ c_{\lambda i} \in \bar{c}_{\lambda i}.$$

Рассмотрим новые элементы

$$e_{\lambda n} = (\prod_{i=1}^{n} p_i) c_{\lambda i} + a_\lambda, \ \lambda \in \Lambda, \ n = 1,2,\dots .$$

где p_i - пробегают все простые числа в естественном порядке. При $E_\lambda = [e_{\lambda n}]_{n=1}^\infty$ система $M \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = D$ порождает G, так как в $G/\{M\}$ подсистемы $\bar{D}$ $\bar{E}_\lambda$ порождают прямые слагаемые $\{C_\lambda\} \cong C(p_\lambda^\infty)$. Покажем, что D-система образующих типа (VI). Пусть $D' \subseteq D$ и $\{D'\} = G$. Тогда $D' = M' \cup (\bigcup_{\lambda \in \Lambda} E'_\lambda)$, где $\emptyset \subseteq M' \subseteq M$, $E'_\lambda \subseteq E_\lambda$, $|E'_\lambda| = \aleph_0$ /в силу выбора E_λ, $\lambda \in \Lambda$ /.

Если $a_\lambda \in M$, $e_{\lambda m} \in E'_\lambda$, $m>n$, то $h_{p_n}(a_\lambda - e_{\lambda m}) > 0$ в силу определения элементов $e_{\lambda i}$.

Пусть $e_{\lambda s} \in E'$. Найдется такой $e_{\lambda t} \in E'$, что $t>s$. Далее, так как в $G/\{M\}$ $\bar{e}_{\lambda s} - p_\lambda^{t-s} \bar{e}_{\lambda t} = 0$, то

$$e_{\lambda s} - p_\lambda^{t-s} e_{\lambda t} = \sum_{i=1}^{r} k_i a_{\lambda(i)} \in \{M\}.$$

Если $e_{\lambda s} - p_\lambda^{t-s} e_{\lambda t} \neq 0$ то для любого n найдем такие

$$e_{\lambda(i)m(i)} \in E'_{\lambda(i)}, \ m(i) > t \ (i = 1,\dots,r),$$

что

$$h_{p_n}(a_{\lambda(i)} - e_{\lambda(i)m(i)}) > 0.$$

Следовательно,

$$h_{p_n}(\sum_{i=1}^{r} k_i (a_{\lambda(i)} - e_{\lambda(i)m(i)})) > 0$$

и

---

*Через $f(M)$ мы обозначаем конечную линейную комбинацию элементов, взятых из M.

$$h_{p_n}(e_{\lambda s} - p_\lambda^{t-s}\, e_{\lambda t} - \sum_{i=1}^{n} k_i e_{\lambda(i)m(i)}) > 0,$$

$$(e_{\lambda t}, e_{\lambda(i)m(i)} \in D' \setminus e_{\lambda s}).$$

Итак, мы показали, что система D' удовлетворяет условию леммы. Следовательно, она сильно приводима. В силу произвольности D', D наследственно сильно приводима. Теорема доказана.

Так как всякая свободная группа счётного ранга имеет фактор-группу типа $C(p^\infty)$, то из теоремы 1 вытекают следствия.

Следствие 1. Всякая группа без кручения бесконечного ранга обладает системой образующих типа (VI).

Следствие 2. Если свободный ранг смешанной группы $r_0(G) = |G|$, то она обладает системой образующих типа (VI).

Укажем еще два следствия из теоремы 1.

Следствие 3. Если группа G без кручения конечного ранга n является расширением свободной группы ранга n с помощью полной группы, ранг которой больше или равен n, то G обладает системой образующих типа (VI).

Следствие 4. Если G - свободная группа бесконечного ранга, то $G \in D(1,1,1,1,1,1)$.

Теорема 2. Если группа $G \supset A$,

$$G/A \cong \sum_{\lambda\in\Lambda} \sum_{i=1}^{\infty} C(p_{\lambda i}^{k_{\lambda i}}),$$

где при каждом $\lambda \in \Lambda$, $p_{\lambda i}$ - различные простые числа, $0 < k_{\lambda i} < \infty$, , $|\Lambda| \geq |A|$, то она обладает системой образующих типа (VI).

Доказательство. Пусть $G/A = \sum_{\lambda\in\Lambda} \{\bar{C}_\lambda\}$,

$$\{\bar{C}_\lambda\} = \sum_{i=1}^{\infty} \{\bar{c}_{\lambda i}\}, \quad \bar{C}_\lambda = [\bar{c}_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty},$$

$$\{\bar{c}_{\lambda i}\} \cong C(p_{\lambda i}^{k_i}), \qquad c_{\lambda i} \in \bar{c}_{\lambda i}; \lambda \in \Lambda,$$

$$i = 1,2,\dots .$$

Представим каждое множество $C_\lambda = [c_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty}$ в виде:

$$C_\lambda = [b_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty} \cup [b'_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty}$$

с пустым пересечением, а множество всех простых чисел в виде

$$[q_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty} \cup [q'_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty},$$

где

$$[q_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty} \cap [q'_{\lambda i}]_{i=1}^{\infty} = \emptyset, \quad \lambda \in \Lambda,$$

$$(q_{\lambda i}, 0(\bar{b}_{\lambda j})) = 1, \quad (q'_{\lambda i}, 0(\bar{b}'_{\lambda i})) = 1,$$

$$(i,j = 1,2,\dots).$$

Пусть $A = \{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ /возможно, с повторениями/,

$$d_{\lambda n} = \sum_{i=1}^{n} b_{\lambda i}, \quad d'_{\lambda n} = \sum_{i=1}^{n} b'_{\lambda i} \quad \text{и}$$

$$e_{\lambda n} = (\prod_{i=1}^{n} q_{\lambda i}) d_{\lambda n} + a_\lambda,$$

$$e'_{\lambda n} = (\prod_{i=1}^{n} q'_{\lambda i}) d'_{\lambda n} + a_\lambda, \quad n = 1,2,\dots .$$

Если $E_\lambda = [e_{\lambda n}]_{n=1}^{\infty}$, $E'_\lambda = [e_{\lambda n}]_{n=1}^{\infty}$, $\lambda \in \Lambda$, то $D = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} E'_\lambda) \cup A$

- система образующих G типа (VI). Действительно, если $D'\subseteq D$ и $\{D'\} = G$, то

$$D' = (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \hat{E}_\lambda) \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \hat{E}'_\lambda) \cup A',$$

где

$$A'\subseteq A,\ \hat{E}_\lambda \subseteq E_\lambda, \hat{E}'_\lambda \subseteq E'_\lambda,\ |\hat{E}_\lambda| = |\hat{E}'_\lambda| = \aleph_0 .$$

Поэтому для любого $a_\lambda \in A$ и любого n найдутся такие $e_{\lambda s}\in \hat{E}_\lambda$ и $e'_{\lambda t} \in \hat{E}'_\lambda$, $s,t>n$, что

$$h_{q_{\lambda n}}(a_\lambda - e_{\lambda s}) > 0,$$

$$h_{q'_{\lambda n}}(a_\lambda - e'_{\lambda t}) > 0.$$

Дальше доказательство можно провести так же, как и в теореме 1.

Следствие 5. Если G - группа без кручения конечного ранга и редуцированная часть $G/A-C$ бесконечна, где A - максимальная линейно независимая система G, то G обладает системой образующих типа (VI). Действительно, если $G/A = C+B$, то для любого простого p, $r_p(C) < \infty$. Поэтому G можно представить в виде, относительно прообраза B, $G/B \cong C$, требуемом в теореме 2.

Теорема 3. Если T - периодическая часть смешанной группы G и

$|G/T| < |G|$,

то G обладает системой образующих типа (VI) тогда и только тогда, когда T не представима в виде прямой суммы

$$T = T_1 + T_2, \qquad (*)$$

где $|T_1|>|T_2|$ и T_1- ограничена /порядки ее элементов ограничены в совокупности/.

Доказательство. Последнее условие в теореме означает, что T обладает системой образующих типа (VI) /см. [10]/.

Пусть T не представима в виде $(*)$ и A - максимальная линейно независимая /в смысле свободного ранга/ подсистема в G. Так как

$$\bar{G} = G/A \supset \{T,A\}/\{A\} = \bar{T} \cong T,$$

то $\bar{G}$ не представимы в виде $\bar{G} = \bar{G}_1 + \bar{G}_2$,

где $|\bar{G}_1|>|\bar{G}_2|$ и $\bar{G}_1$ - ограничена. Действительно, если бы это было не так, то $\{\bar{T}, \bar{G}_2\}/\bar{G}_2 = \bar{T}/\{\bar{T}\cap\bar{G}_2\} \cong T/T'$- ограниченная группа и $|T/T'|>|T'|$. Следовательно, T не должна обладать системой образующих типа (VI) /см. теорему 7 из [9] /, что противоречит условию. Здесь возможны два случая /см. доказательство теоремы 4 из [10] /. Либо для некоторого множества примарных компонент $\bar{C}_{p_i} (i\in J)$ группы $\bar{G}$

$$\sum_{i\in J} r_{p_i}(\bar{G}_{p_i}/\bar{B}_{p_i}) = |\bar{G}| = |G| > \aleph_0,$$

где $\bar{B}_{p_i}$ - базисные подгруппы $\bar{G}_{p_i}$. Следовательно, группа G удовлетворяет условию теоремы 1 и обладает системой образующих типа (VI).

Либо G имеет прямое слагаемое типа $\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{i=1}^{\infty} C(p_{\lambda_i}^{k_i})$,

где $0<k_i<\infty$, p_{λ_i} - различные простые числа при каждом $\lambda \in \Lambda$, $|\Lambda| = |G|$. В этом случае группа G удовлетворяет условию теоремы 2 и поэтому обладает системой образующих типа (VI).

С другой стороны, пусть группа G обладает системой образующих типа (VI).

Допустим, что T - представима в виде $(*)$. Группа $G = \{M,T\}$, где M - некоторая система представителей элементов из G/T, $|M|<|T|$. В силу нашего предположения, группа $G/\{M,T_2\}$ ограничена и $|G/\{M,T_2\}| > |\{M_1,T_2|$. Следовательно, группа G не может обладать системой образующих типа (VI) /см. теорему 7 из [9] /. Мы пришли к противоречию, что и доказывает утверждение теоремы.

Следствие 2 и теорема 3 исчерпывают вопрос о существовании системы образующих типа (VI) у несчетных непериодических групп. Если группа G счетна и $r_0(G)=\aleph_0$, то, в силу следствия 2, она обладает системой образующих типа (VI).

Остается рассмотреть счетные непериодические группы с конечным свободным рангом. Но это надеемся сделать в следующих работах.

III. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО КЛАССАМ В.ДЛАБА

Применим полученные результаты для разделения непериодических групп бесконечного свободного ранга по классам В.Длаба.

Отметим, что А.Ю.Сойфер получил в работах [11,12] критерий существования неприводимых систем образующих у абелевых групп. Группы, удовлетворяющие этому критерию,будем называть S-группами.

Периодические группы, не представимые в виде (*), будем именовать N-группами.

Рассмотрим сначала группы бесконечного свободного ранга ($cr_0(G)=|G|$). В силу полученных здесь результатов такие группы могут содержаться только в классах D(1,1,1,1,1,1), D(0,0,0,1,1,1). Группа без кручения бесконечного ранга принадлежит классу D(1,1,1,1,1,1) тогда и только тогда, когда она S - группа, и классу D(0,0,0,1,1,1) - в противоположном случае, так как обладает системой образующих типа (VI).

Рассмотрим теперь смешанные группы бесконечного свободного ранга. Так как группы с $r_0(G) = |G|$ обладают системами образующих типа (VI), то для них мы получаем результаты, аналогичные предыдущим.

Если G - смешанная несчетная группа с $r_0(G)<|G|$ и с периодической частью, являющейся N-группой, то G принадлежит классу D(1,1,1,1,1,1), тогда и только

тогда, когда она S - группа, и классу D(0,0,0,1,1,1) - в противном случае.

Если G - несчетная смешанная группа с $r_0(G)<|G|$ и с периодической частью, не являющейся N-группой, то G не обладает системой образующих типа (VI) и обладает системой образующих типа (I) /см. [8]/ как расширение некоторой группы с помощью ограниченной группы большей мощности, обладающей неприводимой системой образующих.

Если при этом G/T не свободная группа конечного ранга, то G обладает системами (IV) и (VI).Следовательно, $G\in D(1,1,1,1,1,0)$/см. [4] /.

Если G/T - свободная группа конечного ранга, а T - не ограниченная группа, то мы приходим к аналогичному результату /см. [7] /: $G\in D(1,1,1,1,1,0)$.

Если $G=T+F_n$, где F_n - свободная группа конечного ранга, а T - ограниченная группа, то $G\in D(1,1,1,0,0,0)$ или $G\in D(1,1,1,1,1,0)$ /см. [7] /. Окончательно вопрос о распределении по классам В.Длаба таких групп пока не решен.

В заключение автор приносит глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за интерес к работе и А.П.Мишиной - за ценные советы и постоянную помощь.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Курош А.Г. Теория групп. "Наука", М., 1967.*
2. ***Fuchs L. Abelian Groups. Budapest, 1958.***
3. *Длаб В. Чехословацкий математический журнал. 1958, 8, с.54-61.*
4. *Длаб В. Чехословацкий математический жернал. 1959, 9, с.161-169.*
5. ***Dlab B. Journal London Math. Soc., 1961, 36, p.139-144.***
6. ***Khabbaz S. Trans. Amer. Math. Soc., 1961, vol. 98, No. 3.***
7. *Лебеденко В.М. Сибирский математический журнал. 1970, т.XI, №6; ВИНИТИ, 1971, №1499-70 Деп.*
8. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р2-7002, Дубна, 1973.*

9. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-7344, Дубна, 1973.*
10. *Лебеденко В.М. ОИЯИ, Р5-7817, Дубна, 1974.*
11. *Сойфер А.Ю. Сибирский математический журнал, 1971, т.XII, №3.*
12. *Сойфер А.Ю. Сибирский математический журнал, 1974, т. XV, № 1.*

Рукопись поступила в издательский отдел 25 мая 1977 года.