СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 10535

В.М.Лебеденко

ОБ ОРБИТАХ И ДОПУСТИМЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ДЛЯ PR-ГРУПП

1977

P5 - 10535

В.М.Лебеденко

ОБ ОРБИТАХ И ДОПУСТИМЫХ ПОДАЛГЕБРАХ ДЛЯ **PR**-ГРУПП

Лебеденко В.М. P5 - 10535

Об орбитах и допустимых подалгебрах для PR-групп

В рамках метода орбит А.А.Кириллова исследуются PR-группы, то есть группы Ли с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i < j)$.
В общем виде построены орбиты для всех PR-групп. Для отдельных классов PR-групп в явном виде получены орбиты и допустимые подалгебры.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Lebedenko V.M. P5 - 10535

On Orbits and Admissible Subalgebras for the PR-Groups

The PR-groups (Lie groups with commutation relations of $[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$ $(i<j)$ -type) are investigated within the Kirillov orbit method.
Orbits for all the PR-groups are constructed in a general form. For some classes of PR-group orbits and admissible subalgebras are obtained in an explicit form.

The investigation has been performed at the Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

I. Введение

I.I. Предисловие

В работах [4,5] вводится понятие PR - группы Ли и PR-алгебры Ли, изучаются некоторые их свойства.

Оказалось, что для построения гармонического анализа на PR - группах применим метод орбит А.А. Кириллова (см. [2,7]), поскольку все они экспоненциальны (вместе со своими алгебрами Ли, см. [2,7]). В работе [5] приведены отдельные примеры PR -групп, которые можно встретить в теоретической физике.

Сравнив наши определения PR - групп и PR -алгебр (PR - алгебра Ли $L = \{H_1, \dots, H_n\}$, $n \geq 2$, задается коммутационными соотношения типа

$$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i \quad (i<j), \quad r_{ij} \in R)$$

с результатами работы Ласснера [3], можно легко пополнить этот список.

В работе [5] исследуется класс PR - групп в целом. В частности, там показано, что существует континуум попарно неизоморфных PR - групп (и PR - алгебр).

Теоретически, как отмечено выше, вопрос построения гармонического анализа на PR - группах уже решен. Однако метод орбит, в чистом виде дает его решение в слишком абстрактной форме, и получение конкретных результатов может потребовать достаточных усилий.

Благодаря относительной простоте структуры PR -групп, видимо, возможно дать явное построение гармонического анализа специально для них на основе указанного метода, доведя результаты до справочного уровня.

Таким образом, на практике удастся обойти тонкости "кухни" метода орбит и многие технические трудности.

Настоящая работа является первым шагом автора в указанном направлении. Мы построим орбиты в общем виде для всех PR- -групп, а для отдельных типов PR - групп дадим явное описание орбит и допустимых подалгебр.

I.2. Обозначения и терминология

Мы будем рассматривать PR - алгебры и PR- группы Ли (см./4,5/). PR - алгебра Ли - это действительная алгебра Ли, у которой есть такой базис

$H_1, \dots, H_p, H_{p+1}, \dots, H_n$ $(n \geq 2)$, что

$[H_i, H_j] = r_{ij} H_i$, если $i \leq p$, $j \geq p+1$

(причем для каждого $i \leq p$ есть $j \geq p+1$ с $r_{ij} \neq 0$),

$[H_i, H_j] = 0$, если $i, j \leq p$, или при $i, j \geq p+1$.

В дальнейшем нам понадобятся матрицы, составленные из констант r_{ij} вида

$$\begin{pmatrix} r_{1,p+1} & \dots & r_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{p,p+1} & & r_{p,n} \end{pmatrix}.$$

Указанный вид базиса будем называть каноническим, а соответствующую матрицу - канонической матрицей PR -алгебры (PR- группы).

PR - группой мы называем всякую связную и односвязную группу Ли, алгебра Ли которой является PR - алгеброй (явный вид см. в/5/).

Обозначения, используемые ниже, общеупотребительны. (например, размерность- dim, $H^{\perp}$ -ортогональное дополнение H, $\{M\}$-линейное подпространство, натянутое на множество M).

I.3. Приведенная форма канонической матрицы. Выделение центра

Кроме общей, рассмотренной нами, канонической формы мы введем специальную.

Пусть

$$C = \begin{pmatrix} r_{1,p+1} & \dots & r_{1,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{p,p+1} & \dots & r_{p,n} \end{pmatrix} -$$

каноническая матрица PR - группы G (алгебры L, $dim L = n$). Такие матрицы однозначно определяют группы (обратное утверждение неверно).

Для дальнейшего C будет удобно привести к некоторому виду, который мы будем называть приведенным.

В частности, по этому виду можно будет точно судить о центре группы G или соответствующей алгебры L.

Мы будем использовать элементарные столбцовые преобразования (см./I/), то есть линейные преобразования столбцов, и перестановки строк (этому соответствует изменение нумерации H_i, $i \leq p$).

Известно, что с помощью таких преобразований любую матрицу, в том числе и матрицу C, можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{c|c} E_\pi & 0 \\ \hline X & 0 \end{array}\right), \qquad (*)$$

где $\pi = r(C)$, E_π – единичная $\pi\times\pi$ матрица.

В данном случае преобразованию столбцов $\alpha_{p+1},\dots,\alpha_n \Rightarrow \alpha'_{p+1},\dots,\alpha'_n$, где

$$\alpha'_i = \sum_{j=p+1}^{n} k_{ij}\alpha_j,$$

соответствует переход к новой канонической форме, где

$$H'_i = \sum_{j=p+1}^{n} k_{ij} H_j, \quad i=p+1,\dots,n; \quad H'_s = H_s \ (s\le p).$$

На групповом языке этому переходу соответствует аналогичная замена элементов $a_i(t_i)$, $i\ge p+1$, из однопараметрических подгрупп A_i ($A_i \leftrightarrow H_i$, см. [4,5]) на

$$a'_i(t'_i) = a_{p+1}(k_{i,p+1}t'_i)\cdot\ldots\cdot a_n(k_{in}t'_i).$$

Для проверки достаточно представить все $a'_i(t'_i)$ в виде

$$(0,\dots,0,k_{i,p+1}t'_i,\dots\dots,k_{in}t'_i)$$

(см. [4,5]).

Заметим, что в силу определения PR - алгебры (см. п. I.2 и [5]) при столбцовых преобразованиях и перестановках строк не могут возникнуть нулевые строки. Это следует из того, что среди H_i $(i\le p)$ нет элементов центра.

При нашем подходе строчные преобразования лишены смысла (кроме некоторых экзотических случаев).

Форму $(*)$ будем называть в дальнейшем приведенной формой канонической матрицы PR - группы (PR-алгебры).

Возможны крайние (и в то же время интересные) случаи, когда C приводится к одному из видов

$$\alpha)\ \begin{pmatrix} r_{1n} \\ r_{2n} \\ \vdots \\ r_{pn} \end{pmatrix} n=p+1, \qquad \alpha')\ \left(\begin{pmatrix} r_{1\,p+1} \\ r_{2\,p+1} \\ \vdots \\ r_{p\,p+1} \end{pmatrix} 0\right),$$

$$\beta)\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \qquad \beta')\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \end{array}\right).$$

Эти случаи мы рассмотрим подробнее ниже.

В общем случае возникают некоторые технические, чисто "организационного" порядка сложности, которые мы надеемся преодолеть в дальнейшем. Но все же ниже будут получены некоторые результаты и для него.

Приведенная форма канонической матрицы дает ценную информацию о соответствующей PR - алгебре и PR - группе.

Если $r(C) = n-p$, то, как следует из соображений линейной зависимости, алгебра L (и группа G) - без центра.

Аналогично, если $\pi = r(C) < n-p$ (C - в приведенной форме), то $H'_1,\dots H'_{\pi+p}$ порождают PR - алгебру без центра, а остальные генераторы, $H'_{\pi+p+1},\dots,H'_n$, порождают центр L. Соответствующие утверждения справедливы и для группы G.

II. Орбиты

Мы будем использовать метод орбит (см.[2]) в версии Л. Пуканского (см.[7]), справедливый для всех экспоненциальных групп (в частности, и для PR – групп). Краткое его изложение дано в приложениях к работе[5] автора этой статьи.

Пусть G – PR — группа с канонической матрицей C :

$$C = \begin{pmatrix} z_{1p+1} & \cdots & z_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ z_{pp+1} & \cdots & z_{pn} \end{pmatrix}$$

(не обязательно в приведенной форме).

Нам потребуется коприсоединенное представление G – $K(g)$ (см.[2],[6]), двойственное (конградиентное) к присоединенному представлению $Ad\, g$ (см.[6]). $K(g)$ действует в L' – -пространстве, сопряженном к L – алгебре Ли группы G . Его матрица равна

$$(Ad(g^{-1}))'$$

(здесь „ $'$ " означает транспонирование; иногда используется эквивалентная его форма – $(\exp(ad\, l))'$ (см.[6,7])).

Займемся построением представления $K(g)$ для нашего случая. Пусть $g \in G$ и $g = a_1(s_1)\cdots a_n(s_n)$, где $[a_i(s_i)]_{s_i \in R} \leftrightarrow H_i$ (см.[5]). Тогда отображение $A(g)$: $G \to G$: $h \to g h g^{-1}$ переводит каждую гладкую кривую $X(t)$,

$$X(t) = a_1(\varphi_1(t))\cdots a_n(\varphi_n(t)),$$ в

$$\begin{aligned} y(t) = a_1\Big(&s_1 + e^{-(z_{12}s_2+\cdots+z_{1n}s_n)}\varphi_1(t) - \\ &- e^{-(z_{12}\varphi_2(t)+\cdots+z_{1n}\varphi_n(t))}s_1\Big)\, a_2\Big(s_2 + \\ &+ e^{-(z_{23}s_3+\cdots+z_{2n}s_n)}\varphi_2(t) - e^{-(z_{23}\varphi_3(t)+\cdots+z_{2n}\varphi_n(t))}s_n\Big)\cdots \\ &\cdots a_{n-1}\Big(s_{n-1} + e^{-z_{n-1,n}s_n}\varphi_{n-1}(t) - e^{-z_{n-1,n}\varphi_n(t)}s_{n-1}\Big)\, a_n(\varphi_n(t)). \end{aligned}$$

Переходя к векторной записи (см.[4]), получаем, что при этом

$$\dot X(0) = (\dot\varphi(0), \ldots, \dot\varphi_n(0))$$

переходит в

$$\begin{aligned} \dot y(0) = \Big(&e^{-(z_{12}s_2+\cdots+z_{1n}s_n)}\dot\varphi_1(0) + \\ &+ (z_{12}\dot\varphi_2(0)+\cdots+z_{1n}\dot\varphi_n(0))s_1,\ e^{-(z_{23}s_3+\cdots+z_{2n}s_n)}\dot\varphi_2(0) + \\ &+ (z_{23}\dot\varphi_3(0)+\cdots+z_{2n}\varphi_n(0))s_2,\ \ldots\ldots \\ &\ldots,\ e^{-z_{n-1,n}s_n}\dot\varphi_{n-1}(0) + z_{n-1,n}\dot\varphi_n(0)s_{n-1},\ \dot\varphi_n(0)\Big). \end{aligned}$$

Естественно, что можно искать орбиты не относительно $K(g) = (Ad(g^{-1}))'$, а относительно $f(g) = (Ad\, g)'$, поскольку эти орбиты совпадают.

Из предыдущего следует, что при $g = a_1(s_1)\cdots a_n(s_n) \in G$ и $X = \sum_{i=1}^{n} x_i H_i = (x_1, \ldots, x_n) \in L$

$$Ad(g)X = (e^{\alpha_1}x_1 + s_1(z_{12}x_2 + \dots + z_{1n}x_n),$$
$$e^{\alpha_2}x_2 + s_2(z_{23}x_3 + \dots + z_{2n}x_n), \dots\dots,$$
$$e^{\alpha_{n-1}}x_{n-1} + s_{n-1}z_{n-1,n}x_n,\ x_n) =$$

$$=\begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & s_1 z_{12} & s_1 z_{23} & \dots & s_1 z_{1,n-1} & s_1 z_{1,n} \\ 0 & e^{\alpha_2} & s_2 z_{23} & \dots & s_2 z_{2,n-1} & s_2 z_{2n} \\ 0 & 0 & e^{\alpha_3} & \dots & s_3 z_{3,n-1} & s_3 z_{3n} \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & e^{\alpha_{n-2}} & s_{n-2} z_{n-2,n-1} & s_{n-2} z_{n-2,n} \\ \vdots & \vdots & 0 & & e^{\alpha_{n-1}} & s_{n-1} z_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix} X$$

(об α_i: см. ниже).

Следовательно, матрица $\rho(g) = K(g^{-1})$ в каноническом базисе L' (см. /6/) $f_1, \dots, f_n$ имеет вид

$$(Ad(g))' =$$

$$\begin{pmatrix} e^{\alpha_1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 z_{12} & e^{\alpha_2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ s_1 z_{13} & s_2 z_{23} & e^{\alpha_3} & 0 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & 0 & \\ s_1 z_{1,n-1} & s_2 z_{2,n-1} & s_3 z_{3,n-1} & \dots\ s_{n-2} z_{n-2,n-1} & e^{\alpha_{n-1}} & 0 \\ s_1 z_{1n} & s_2 z_{2n} & s_3 z_{3n} & \dots\ s_{n-2} z_{n-2,n} & s_{n-1} z_{n-1,n} & 1 \end{pmatrix}$$

Если $f = \sum_1^n y_i f_i = (y_1, \dots, y_n) \in L' (f_i(H_j) = \delta_{ij})$, то

$$\rho(g)f = (e^{\alpha_1}y_1,\ s_1 z_{12} y_1 + e^{\alpha_2} y_2,\ s_1 z_{13} y_1 +$$
$$+ s_2 z_{23} y_2 + e^{\alpha_3} y_3, \dots\dots$$
$$\dots, s_1 z_{1n-1} y_1 + s_2 z_{2n-1} y_2 + \dots +$$
$$+ s_{n-2} z_{n-2,n-1} y_{n-2} + e^{\alpha_{n-1}} y_{n-1}, \qquad (**)$$

$$s_1 z_{1n} y_1 + \dots + s_{n-1} z_{n-1,n} y_{n-1} + y_n),$$

где $\alpha_1 = -(z_{12}s_2 + \dots + z_{1n}s_n)$,

$$\alpha_2 = -(z_{23}s_3 + \dots + z_{2n}s_n),$$

$$- - - - - -$$

$$\alpha_{n-1} = -z_{n-1,n}s_n.$$

Поскольку $z_{ij}=0$ при $i,j \le p$ и при $i,j \geq p+1$,

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -(z_{1,p+1}s_{p+1} + \dots + z_{1n}s_n), \\ &\alpha_2 = -(z_{3p+1}s_{p+1} + \dots + z_{2n}s_n), \\ &- - - - - - - - - - - \\ &\alpha_p = -(z_{p,p+1}s_{p+1} + \dots + z_{pn}s_n, \\ &\alpha_{p+1} = 0, \\ &- - - - \\ &\alpha_{n-1} = 0 \end{aligned} \tag{I}$$

(это при $n-p>1$). Случай $n-p=1$ мы рассмотрим отдельно. Здесь $n-1=p$ и

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -z_{1n}s_n, \\ &- - - - - - \\ &\alpha_{n-1} = z_{n-1,n}s_n. \end{aligned} \tag{2}$$

При $s_n = s$ эти выражения принимают вид

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -z_{1n}s, \\ &- - - - - \\ &\alpha_{n-1} = z_{n-1,n}s. \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь соотношения $(**)$ при $n-p>1$ принимают вид:

$$\begin{aligned} \rho(g)f = (&e^{\alpha_1}y_1, \dots, e^{\alpha_p}y_p, s_1 z_{1,p+1} y_1 + \dots + \\ &+ s_p z_{p,p+1} y_p + y_{p+1}, s_1 z_{1,p+2} y_1 + \dots + s_p z_{p,p+2} y_p + \\ &+ y_{p+2}, \dots, s_1 z_{1,n-1} y_1 + \dots + s_p z_{p,n-1} y_p + y_{n-1}, \\ &s_1 z_{1n} y_1 + \dots + s_p z_{pn} y_n + y_n) \end{aligned} \tag{4}$$

(поскольку некоторые константы $z_{ij} = 0$),
где

$$\begin{aligned} &\alpha_1 = -(z_{1,p+1}s_{p+1} + \dots + z_{1n}s_n), \\ &\alpha_2 = -(z_{2,p+1}s_{p+1} + \dots + z_{2,n}s_n), \\ &- - - - - - - - - - - - - - \\ &\alpha_p = -(z_{p,p+1}s_{p+1} + \dots + z_{pn}s_n), \\ &\alpha_{p+1} = 0, \\ &- - - - \\ &\alpha_{n-1} = 0. \end{aligned}$$

При $p=n-1$ соотношения $(**)$ принимают вид

$$\rho(g)f = (e^{\alpha_1}y_1, \dots, e^{\alpha_{n-1}}y_{n-1}, s_1 z_{1n} y_1 + \dots + s_{n-1} z_{n-1,n} y_{n-1} + y_n)$$

или (см. (3))

$$d) \quad \rho(g)f = (e^{z_{1n}s}y_1, \dots, e^{z_{n-1,n}s}y_{n-1}, s_1 z_{1n} y_1 + \dots + s_{n-1} z_{n-1,n} y_{n-1} + y_n). \tag{5}$$

При выводе формул (4), (5) мы не считали канонические матрицы приведенными.
Однако в случае (5) мы уже имеем приведенную матрицу -столбец.

Займемся конкретизацией формулы (4) для приведенной формы матрицы. Если в этой форме матрица C имеет вид

$$p\left\{\begin{pmatrix} \overbrace{E_\pi}^{\pi} \\ \hline \\ \end{pmatrix}\right., \quad \pi = n-p$$

(группа без центра), то $z_{ij} = \delta_i(j-p)$ при $i \le \pi$. При этом

$$\rho(g)f = (e^{\alpha_1}y_1, \dots, e^{\alpha_p}y_p,\ s_1 z_{1,p+1} y_1 + s_{\pi+1} z_{\pi+1,p+1} y_{\pi+1} + \dots + s_p z_{p,p+1} y_p + y_{p+1},$$

$$s_2 z_{2,p+2} y_2 + s_{\pi+1} z_{\pi+1,p+2} y_{\pi+1} + \dots + s_p z_{p,p+2} y_p + y_{p+2}, \dots\dots$$

$$\dots, s_\pi z_{\pi n} y_\pi + s_{\pi+1} z_{\pi+1,n} y_{n+1} + \dots + s_p z_{pn} y_p + y_n), \quad \text{где} \tag{6}$$

$$\alpha_1 = -z_{1,p+1} s_{p+1},$$
$$\dots\dots$$
$$\alpha_\pi = -z_{\pi(\pi+p)} s_{p+\pi},$$
$$\alpha_{\pi+1} = -(z_{\pi+1,p+1} s_{p+1} + \dots + z_{\pi+1,n} s_n),$$
$$\dots\dots$$
$$\alpha_p = -(z_{p,p+1} s_{p+1} + \dots + z_{pn} s_n).$$

Пусть матрица C в приведенной форме имеет нулевые столбцы, $r(C) = \pi$, $p + \pi < n$. Здесь матрица C имеет вид

$$\begin{pmatrix} E_\pi & 0 \\ X & 0 \end{pmatrix}$$

$z_{ij} = \delta_i(j-p)$ при $i \le \pi$ $(\pi < p)$, $(\pi < p)$, $z_{ij} = 0$ при $j > \pi$.

Для неё формула (4) принимает вид:

$$\rho(g)f = (e^{\alpha_1}y_1, \dots, e^{\alpha_p}y_p,\ s_1 z_{1,p+1} y_1 + \dots + s_{\pi+1} z_{\pi+1,p+1} y_{\pi+1} + \dots$$
$$+ s_p z_{p,p+1} y_p + y_{p+1},\ s_2 z_{2,p+2} y_2 + s_{\pi+1} z_{\pi+1,p+2} y_{\pi+1} + \dots$$
$$+ s_p z_{p,p+2} y_p + y_{p+2},\ s_\pi z_{\pi,p+\pi} y_\pi + s_{\pi+1} z_{\pi+1,p+\pi} y_{\pi+1} + \dots \tag{7}$$
$$+ s_p z_{p,p+\pi} y_p + y_{p+\pi},\ y_{p+\pi+1}, \dots, y_n),$$

где

$$\alpha_1 = -z_{1,p+1} s_{p+1},$$
$$\dots\dots$$
$$\alpha_\pi = -z_{\pi,p+\pi} s_{p+\pi},$$
$$\alpha_{\pi+1} = -(z_{\pi+1,p+1} s_{p+1} + \dots + z_{\pi+1,p+\pi} s_{p+\pi}),$$
$$\dots\dots,$$
$$\alpha_p = -(z_{p,p+1} s_{p+1} + \dots + z_{p,p+\pi} s_{p+\pi}).$$

Если элемент $f \in L'$, то его орбита $\Omega(f)$ равна $[\rho(g)f]_{g \in G}$, где $\rho(g)f$ определяется соотношениями (7) при $z(C)<p,\ z(C)+p<n$, соотношениями (6) при $z(C)<p$, $z(C)+p=n$ и соотношениями (5) при $n-p=1$.

Теперь коснемся нескольких частных случаев:

$\alpha')$ $$\left(\begin{pmatrix} z_{1p+1} \\ z_{2p+1} \\ \vdots \\ z_{p,p+1} \end{pmatrix} \ 0 \right) \qquad z(C)=1,\ p+1<n;$$

$\beta)$ $$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}, \ z(C)=p,\ n=2p;$$

$\beta')$ $$\left(\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \ 0 \right) \qquad z(C)=p,\ 2p<n.$$

Для случая $\alpha')$ соотношения (4) принимают вид

$$\rho(g)f=(e^{z_{1,p+1}s_{p+1}}y_1, \ldots, e^{z_{pp+1}s_{p+1}}y_p,\ s_1 z_{1,p+1}y_1+\ldots$$

$$\ldots s_p z_{p,p+1}+y_{p+1}, y_{p+2}, \ldots, y_{n-1}, y_n), \text{ если } n>p+2, \qquad (8)$$

или $$\rho(g)f=(e^{z_{1p+1}s_{p+1}}, \ldots, e^{z_{p,p+1}s_{p+1}},$$

$$s_1 z_{1,p+1}y_1+\ldots+s_p z_{pp+1}y_p+y_{p+1},\ y_n)$$

при $n=p+2$. (9)

В случае $\beta)$ имеем $(z(C)=p,\ 2p=n)$

$$\rho(g)f=(e^{s_{p+1}}y_1, \ldots, e^{s_{2p}}y_p,\ s_1y_1+y_{p+1},$$

$$s_2y_2+y_{p+2}, \ldots, s_{p-1}y_p+y_{2p-1},\ s_py_p+y_{2p}). \qquad (10)$$

В случае $\beta')$ имеем $(z(C)=p,\ 2p<n)$

$$\rho(g)f=(e^{s_{p+1}}y_1, \ldots, e^{s_{2p}}y_p,\ s_1y_1+y_{p+1}, \ldots$$

$$\ldots, s_py_p+y_{2p}, y_{2p+1}, \ldots, y_{n-1}, y_n) \qquad (11)$$

при $n>2p+1$ и

$$\rho(g)f = (e^{s_{p+1}}y_1, \dots, e^{s_{2p}}y_p, s_1 y_1 + y_{p+1}, \dots, s_p y_p + y_{2p}, y_n)$$

при $n = 2p+1$. (I2)

Теперь для этих случаев и случая $\alpha)$ найдем явный вид орбит.

В случае $\alpha)$ для элемента $f = (y_1, \dots, y_n)$ (в силу (5))

$$\rho(g)f = (e^{\tau_{1n}s}y_1, \dots, e^{\tau_{n-1,n}s}y_{n-1}, s_1\tau_{1n}y_1 + \dots + s_{n-1}\tau_{n-1,n}y_{n-1} + y_n).$$

Если $y_i = 0$, $i < n$, то

$$\rho(g)f = f.$$

Если не все $y_i = 0$ при $i < n$, то орбита

$$\Omega(f) = [(e^{\tau_{1n}s}y_1, \dots, e^{\tau_{n-1,n}s}y_{n-1}, \xi)]_{\xi, s \in R}.$$

Это двумерное многообразие. Легко видеть, что каждую орбиту можно охарактеризовать некоторым вектором

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, 0).$$

Для вектора $(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)$ и $(y_1', \dots, y_{n-1}', y_n')$ лежат на одной орбите тогда и только тогда, когда у них нули (если они есть) стоят на одинаковых местах, а ненулевые компоненты связаны так : $y_i' = e^{\tau_{in}t}y_i$.

В случае $\alpha')$ ввиду (8)

$$\rho(g)f = (e^{\tau_{1,p+1}s}y_1, \dots, e^{\tau_{p,p+1}s}y_p, s_1\tau_{1,p+1}y_1 + \dots + s_p\tau_{p,p+1}y_p + y_{p+1}, y_{p+2}, \dots, y_{n-1}, y_n)$$ при $n > p+2$.

Если $f = (0 \cdots 0, y_{p+1}, \dots, y_n)$, то $\rho(g)f \equiv f$.
Для вектора $f = (y_1, \dots, y_n)$, у которого не все p первых компонент равны нулю, получаем

$$\Omega(f) = [(e^{\tau_{1,p+1}s}y_1, \dots, e^{\tau_{p,p+1}s}y_p, \xi, y_{p+2}, \dots, y_{n-1}, y_n)]_{s, \xi \in R}.$$

Это двумерное многообразие .

Два вектора, $(y_1, \dots, y_n)$ и $(y_1', \dots, y_n')$, лежат на одной орбите тогда и только тогда, когда их компоненты, начиная с $p+2$, совпадают, нули, если они есть, стоят на одинаковых местах, а ненулевые $(i \leq p)$ компоненты связаны соотношениями: $y_i' = e^{\tau_{i,p+1}t}y_i$.

При $n = p+2$

$$\rho(g)f = (e^{\tau_{1,p+1}s}y_1, \dots, e^{\tau_{p,p+1}s}y_p, s_1\tau_{1,p+1}y_1 + \dots + s_p\tau_{p,p+1}y_p + y_{p+1}, y_n).$$

Здесь мы получаем аналогичный случаю $n > p+2$ результат. В частности, два вектора, $f = (y_1, \dots, y_n)$ и $f' = (y_1', \dots, y_n')$, лежат на одной орбите, если $y_n = y_n'$, нулевые компоненты (если они есть) с первых p мест стоят на одинаковых местах, а ненулевые компоненты связаны соотношениями $y_i' = e^{\tau_{i,p+i} t} y_i$.

Рассмотрим случай $\beta)$ $(r(C)=p,\ n=2p)$.

Здесь в силу (I0)

$$\rho(g)f = (e^{s_{p+1}} y_1, \dots, e^{s_{2p}} y_p, s_1 y_1 + y_{p+1}, s_2 y_2 + y_{p+2}, \dots,$$

$$s_{p-1} y_{p-1} + y_{2p-1}, s_p y_p + y_{2p}).$$

Если первые p координат у вектора f равны нулю, то $\Omega(f)=f$.

Если k $(k \leq p)$ из первых p координат f не равны нулю, то $\Omega(f)$ имеет размерность $2k$ и имеет вид множества всех векторов

$$(e^{s_{p+1}} y_1, \dots, e^{s_{2p}} y_p, \xi_1, \dots, \xi_p),$$

где s_i меняются произвольно в R, $\xi_i = y_{p+i}$ при $y_i = 0$, $i \leq p$, а в остальных случаях ξ_i меняется произвольно. Каждая из первых p координат $e^{\tau_{i,p+i} s_{p+i}}$ либо равна нулю при $y_i = 0$, либо принимает произвольные положительные значения.

Здесь условия, при которых два вектора лежат на одной орбите, аналогичны таким условиям для случая $\beta')$ (см. ниже).

Перейдем теперь к случаю $\beta')$. Тут в силу формулы (II) при $n > 2p+1$ $\Omega(f)$ состоит из всех векторов вида

$$(e^{s_{p+1}} y_1, \dots, e^{s_{2p}} y_p, s_1 y_1 + y_{p+1}, \dots, s_p y_p + y_{2p}, y_{2p+1}, \dots, y_n),$$

где s_i меняются независимо и принимают любые действительные значения.

Если k из первых p координат f не равно нулю, то $\dim(\Omega(f)) = 2k$. Два вектора $(y_1, \dots, y_n)$ и $(y_1', \dots, y_n')$, лежат на одной орбите тогда и только тогда, когда $y_i = y_i'$ при $2p+1 \leq i \leq n$, нули, если такие есть среди y_i $(i \leq p)$, стоят на одинаковых местах, а ненулевые из первых p координат имеют один знак.

Эти рассуждения подсказывают простой выбор представителей на таких орбитах. Именно в качестве представителей можно выбирать векторы $(\underset{p}{K}, M)$, где M произвольно, а K может содержать только 0, I, -I. Кроме того, при

$$f = (\underbrace{0 \cdots 0}_{p} M) \quad \Omega(f) = f.$$

Орбиты для данного случая состоят из всех векторов

$$(e^{s_{p+1}} y_1, \dots, e^{s_{2p}} y_p, \xi_1, \dots, \xi_p, y_{2p+1}, \dots, y_n),$$

где при $y_i = 0$, $i \leq p$, $e^{s_{p+i}} y_i = 0$, $\xi_i = y_{p+i}$, при $y_i \neq 0$, $i \leq p$ $e^{s_{p+i}} y_i$ принимает произвольные значения знака $\mathrm{Sgn}(y_i)$, а ξ_i — произвольные значения.

Аналогичный результат получаем и при $n = 2p+1$ в силу формулы (I2), так как здесь

$$\rho(g)f = (e^{s_{p+1}} y_1, \dots, e^{s_{2p}} y_p, s_1 y_1 + y_{p+1}, \dots, s_p y_p + y_{2p}, y_n).$$

Таким образом, мы рассмотрели орбиты для всех интересовавших нас случаев.

III. Допустимые подалгебры

3.1. Если L – алгебра Ли группы G, L' – сопряженное пространство к L, то для некоторого $f \in L'$ подалгебра $H \subseteq L$ называется допустимой, если алгебра $[H,H]$ ортогональна f и

$$\dim H = \dim L - \frac{1}{2}\dim \Omega(f), \tag{13}$$

$$f + H^{\perp} \subseteq \Omega(f). \tag{14}$$

Приступим к нахождению допустимых подалгебр для рассмотренных выше случаев.

3.2. Случай α)

Рассмотрим сначала орбиты для векторов типа

$$f = (y_1, \ldots, y_{n-1}, 0) \neq 0 .$$

Здесь $\Omega(f) = 2$. Поэтому размерность разыскиваемой подалгебры должна равняться $n-1$. Если $H = \{H_1, \ldots, H_{n-1}\}$ (подалгебра L, натянутая на $H_1, \ldots, H_{n-1}$), то $[H,H] = 0 \perp f$. Ортогональное дополнение H $(H^{\perp})$ совпадает с множеством всех векторов вида $(0, \ldots, 0, \xi) \in L'$. Поэтому $f + H^{\perp} \subset \Omega(f)$. Условие (13) выполняется автоматически. Таким образом, для рассматриваемого случая допустима подалгебра $\{H_1, \ldots, H_{n-1}\} = H$.

Если $f = (0, \ldots, 0, y_n)$, то $\dim \Omega(f) = 0$. Следовательно, искомой алгеброй может быть только L.

$$L^{\perp} = 0 \quad , \quad f + L^{\perp} = f \in \Omega(f),$$

$$[L, L] = \{H_1, \ldots, H_{n-1}\} \perp f .$$

Отсюда видно, что L допустима для $f = (0, \ldots, 0, y_n)$.

3.3. Случай α'

Здесь при $f = (y_1, \ldots, y_p, 0, y_{p+2}, \ldots, y_n)$

$$y_i \neq 0, \ i \leq p, \quad \dim \Omega(f) = 2 .$$

Следовательно, искомая подалгебра должна иметь размерность $n-1$. Пусть $H = \{H_1, \ldots, H_p, H_{p+2}, \ldots H_n\}$.
Тогда $[H,H] = 0 \perp f$, $H^{\perp}$ состоит из всех векторов вида

$$(\underbrace{0, \ldots, 0}_{p}, \xi, 0, \ldots, 0)$$

и

$$f + H^{\perp} \subset \Omega(f) .$$

Поэтому H допустима для f.

Для $f = (0, \ldots, 0, y_{p+1}, \ldots, y_n)$ получаем, что

$$\Omega(f) = f, \ \dim \Omega(f) = 0 .$$

Поэтому допустимой подалгеброй должна быть сама L. Так как $[L,L] = \{H_1, \ldots, H_p\} \perp f$, $L^{\perp} = 0$, $f + H^{\perp} = f = \Omega(f)$, то L действительно допустима.

3.4. Случай β

Здесь при $f = (0, \ldots, 0, y_{p+1}, \ldots y_n)$

$$\Omega(f)=f \text{ и } \dim\Omega(f)=0 .$$

Легко проверить, что в этом случае алгебра L допустима для f.

Пусть $y_i\neq 0$ при $i\le p$, а именно, только $y_{i_1}\neq 0,\dots,y_{i_k}\neq 0$ $(i_1,\dots,i_k\le p)$. Тогда $\dim\Omega(f)=2k$.

В силу условия (13) допустимая подалгебра должна иметь размерность $n-k=2p-k$. Такую размерность имеет подалгебра

$$H=\left\{[H_i]^{1\le i\le 2p}_{i\neq p+i_1,\dots,p+i_k}\right\}.$$

Для неё $$[H,H]=\left\{[H_i]^{1\le i\le p}_{i\neq i_1,\dots,i_p}\right\}\perp f .$$

Далее, $$H^{\perp}=\{f_{p+i_1},\dots,f_{p+i_k}\}.$$

Поэтому $$f+H^{\perp}\subset\Omega(f) .$$

Заметим, что при $y_i\neq 0$, $i\le p$, в качестве H можно выбрать $\{H_1,\dots,H_p\}$. Здесь $[H,H]=0$,

$$H^{\perp}=\{f_{p+1},\dots,f_{2p}\} .$$

3.5. Случай β')

Здесь, как легко проверить, при $f=(0,\dots,0,y_{p+1},\dots y_n)$ в качестве допустимой подалгебры можно взять L.

Так же легко установить по аналогии со случаем 3.4, что если среди первых p коодинат только $y_{i_1}\neq 0,\dots,y_{i_k}\neq 0$,

то в качестве допустимой подалгебры можно взять

$$H=\left\{[H_i]^{1\le i\le n}_{i\neq p+i_1,\dots,p+i_k}\right\}.$$

При $y_i\neq 0$, $i\le p$ в качестве допустимой подалгебры можно взять

$$\{H_1,\dots,H_p, H_{2p+1},\dots H_n\} .$$

Итак, мы построили допустимые подалгебры для всех интересовавших нас случаев.

В заключение автор благодарит В.Г. Кадышевского за интерес к работе и полезные советы, М. Гавличека и В.Ласснера за плодотворные обсуждения, а также Г.И. Колерова за ценные замечания.

Литература

1. Ф.Р. Гантмахер. Теория матриц, Гостехиздат, 1953.
2. А.А. Кириллов. Элементы теории представлений, Издательство "Наука", Москва, 1972.
3. W.Lassner. Realizations of the Poincaré Group on Homogeneous spaces. Acta Physica Slovaca. 23 (1973), No. 4, pp.193-202 .

4. В.М. Лебеденко. Об одном классе групп Ли. ОИЯИ , Р5-9384, Дубна, 1975.

5. В.М. Лебеденко. О группах Ли с коммутационными соотношениями типа $[H_i, H_j] = H_i \ (i<j)$. ОИЯИ, Р5-9867, Дубна, 1976.

6. М.А. Наймарк. Теория представлений групп. Издательство "Наука", Москва, 1976.

7. L.Pukansky. On the Unitary Representations of Exponential Group, Journal of Functional Analysis 2, 73-113 (1968).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 марта 1977 года