СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 10531

Е.П.Каданцева

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ЗАДАЧИ

1977

P5 - 10531

Е.П.Каданцева

К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ОДНОЙ САМОСОГЛАСОВАННОЙ ЗАДАЧИ

Каданцева Е.П.

Р5 - 10531

К исследованию устойчивости численного решения одной самосогласованной задачи

В работе исследуется устойчивость численного решения самосогласованной задачи, возникающей при *расчете* электромагнитных полей в *резонаторе* проектируемого ускорителя ОНМУ. Соответствующая система уравнений Максвелла *решается* конечно-разностным методом. Показано, что условие $a = \tau/h \le 1$, накладываемое на отношение шагов сетки, обеспечивает устойчивость разностной аппроксимации задачи.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации *ОИЯИ*.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Kadantseva E.P.

Р5 - 10531

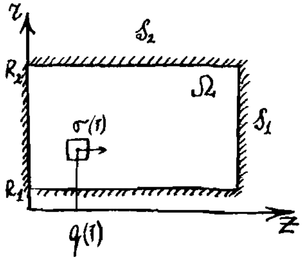
On the Study of Stability of a Numerical Solution of a Self-consistent Problem

The stability of a numerical solution of a self-consistent problem is investigated, which appears when computing the electromagnetic fields in the resonator of an accelerator elaborated at the Department of New Acceleration Methods. The corresponding group of the Maxwell equations is solved by the finite-difference method. At τ, h being the net steps, the ratio estimator $\tau/h \le 1$ is shown to be sufficient for the stability of the difference approximation of the problem.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

При расчёте полей, возбуждаемых в резонаторах движением пучков электронов, решается следующая краевая самосогласованная задача: в области Ω задана система дифференциальных уравнений



$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r w}{\partial r} - \dfrac{4\pi}{c} j_z, \quad j_z = c\rho \dfrac{dq}{d\xi}, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \xi} = -\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial v}{\partial r}, \\ c^2 M \dfrac{d}{d\xi}\left(\dfrac{dq}{d\xi}\left(1 - \left(\dfrac{dq}{d\xi}\right)^2\right)^{-1/2}\right) = 2\pi \iint\limits_{\sigma(\xi)} \rho v \, r \, dr \, dz; \end{cases}$$

$$\xi = ct, \quad \xi \in [0, T], \quad \rho = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{2\pi r}, & (r, z) \in \sigma(\xi), \\ 0, & (r, z) \notin \sigma(\xi), \end{cases}$$

$q(\xi)$ – центр движущейся площадки $\sigma(\xi)$.

Заданы начальные данные

$$u(r,z,0) = u_0(r,z), \quad v(r,z,0) = v_0(r,z), \quad w(r,z,0) = w_0(r,z)$$

$$q(0) = q_0, \quad \dot{q}(0) = 0$$

и граничные условия

$$u|_{S_1} = v_z|_{S_1} = \omega_z|_{S_1} = 0 \ , \quad v|_{S_2} = \frac{\partial}{\partial r}(ru)\Big|_{S_2} = \frac{\partial}{\partial r}(r\omega)\Big|_{S_2} = 0 .$$

В предлагаемой работе исследуется устойчивость модельной краевой самосогласованной задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\omega}{\partial r} - \rho\dfrac{dq}{dt} , \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial r} , \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dq}{dt}\left(1-\left(\dfrac{dq}{dt}\right)^2\right)^{-1/2}\right) = \displaystyle\int_{\sigma(t)} \rho v r dr , \end{cases} \qquad (I)$$

$$t \in [0,T], \ r \in [R_1, R_2], \ \rho = \begin{cases} \rho_0 , & r \in \sigma(t) , \\ 0 , & r \notin \sigma(t) \end{cases}$$

с начальными данными

$$v(r,0) = v_0(r), \ \omega(r,0) = \omega_0(r), \ q(0) = q_0, \ \dot q(0) = 0$$

и граничными условиями

$$v\Big|_{\substack{r=R_1 \\ r=R_2}} = 0 , \quad \frac{\partial}{\partial r}(r\omega)\Big|_{\substack{r=R_1 \\ r=R_2}} = 0 .$$

Показано, что для такой задачи условие $\alpha = \tau/h \le 1$, накладываемое на отношение шагов сетки, обеспечивает устойчивость разностной аппроксимации системы (I) по схеме Лакса с пересчетом по явному кресту.

Сначала исследуется устойчивость разностной краевой задачи, аппроксимирующей систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial r\omega}{\partial r} , \\ \dfrac{\partial \omega}{\partial t} = \dfrac{\partial v}{\partial r} . \end{cases} \qquad (2)$$

$$t \in [0,T] , \quad \Omega = \{r ; \ r \in [R_1, R_2]\} ,$$

удовлетворяющую начальным и граничным условиям системы (I) для v , ω . Затем доказывается, что в случае устойчивости задачи (2) будет устойчива и разностная краевая самосогласованная задача, аппроксимирующая систему (I).

В (2) сделаем замену переменных:

$$\tilde v = r v , \quad \tilde\omega = r\omega .$$

Рассмотрим эквивалентную систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \tilde v}{\partial t} = \dfrac{\partial \tilde\omega}{\partial r} , \\ \dfrac{\partial \tilde\omega}{\partial t} = \dfrac{\partial \tilde v}{\partial r} - \dfrac{1}{r}\tilde v , \\ \tilde v(r,0) = r v_0(r), \quad \tilde\omega(r,0) = r\omega_0(r) , \ t \in [0,T] , \\ \tilde v\Big|_{\substack{r=R_1 \\ r=R_2}} = 0 , \quad \tilde\omega_r\Big|_{\substack{r=R_1 \\ r=R_2}} = 0 . \end{cases} \qquad (3)$$

В области Ω вводятся сетки $\Omega_h = \{r_i = R_1 + (i-1)h, \ i = 1, 2, \dots, M\}$ и $\Omega_h^* = \{r_i^* = R_1 + (i-1/2)h, \ i = 0, 1, \dots, M, M+1\}$, $t_n = n\tau$, τ – шаг по времени, $n\tau \le T$.

Начальные условия задаются в узлах сетки Ω_h^* . На полуцелых временных слоях счёт ведется по схеме Лакса, затем идёт пересчёт целых временных слоёв по явному кресту.

Дадим определение устойчивости. Обозначим через $U_i = \{v_i, \omega_i\}$. Рассмотрим гильбертово пространство H_U векторов $U = \{U_0, U_1, \dots, U_{M+1}\}$, удовлетворяющих граничным условиям (I) с нормой

$$\|U\|_{H_U} = \left(h\sum_{i=1}^{M} |U_i|^2\right)^{1/2} .$$

Разностную краевую задачу для (3) можно записать в операторном виде:

$$\begin{cases} U^{n+1} = L U^n , \\ U^0 \in H_U . \end{cases} \qquad (4)$$

Задача (4) устойчива по начальным данным, если существует такая постоянная C_0, не зависящая от n, что

$$\|U^n\|_{H_U} \leq C_0 \|U^0\|_{H_U}, \ \forall U^0 \in H_U, \quad n\tau \leq T.$$

Оператор L в (4) можно представить в виде $L = Q + \tau\widetilde{Q}$, где Q - onepaгор с постоянными коэффициентами, а $\widetilde{Q}$ - ограниченный в H_U onepaгор, аппроксимирующий член $\frac{1}{\tau}\widetilde{V}$. Тогда для устойчивости (4) достаточно доказать устойчивость соответствующей задачи с $\widetilde{Q} = 0$:

$$\begin{cases} v_i^{n+1} = (1-\alpha^2) v_i^n + \frac{1}{2}\alpha^2 (v_{i+1}^n + v_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\alpha (\omega_{i+1}^n - \omega_{i-1}^n), \\ \omega_i^{n+1} = (1-\alpha^2)\omega_i^n + \frac{1}{2}\alpha^2(\omega_{i+1}^n + \omega_{i-1}^n) + \frac{1}{2}\alpha(v_{i+1}^n - v_{i-1}^n), \\ i = 1, 2, \ldots, M, \\ v_1^n = -v_0^n, \ \omega_1^n = \omega_0^n, \ \omega_{M+1}^n = \omega_M^n, \ v_{M+1}^n = -v_M^n, \\ \quad \alpha = \frac{\tau}{h}. \end{cases}$$

Используя граничные условия, получаем:

$$\|U^{n+1}\|_{H_U}^2 = h \sum_{i=1}^{M} (1-\alpha^2)^2 (U_i^n)^2 + \frac{1}{4}\alpha^2(1+\alpha^2)\left((U_{i+1}^n)^2 + (U_{i-1}^n)^2\right) -$$
$$- \frac{1}{2}\alpha^2(1-\alpha^2) U_{i+1}^n U_{i-1}^n + \alpha^2(1-\alpha^2) U_i^n \left(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n\right).$$

Следуя С.К.Годунову /2/, добавим к правой части этого равенства неотрицательное при $\alpha \leq 1$ выражение

$$\frac{1}{4}\alpha^2(1-\alpha^2) h \sum_{i=1}^{M} \left\{ (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n)^2 + (\omega_{i+1}^n - 2\omega_i^n + \omega_{i-1}^n)^2 \right\}.$$

Тогда

$$\|U^{n+1}\|_{H_U}^2 \leq h \sum_{i=1}^{M} \left\{ (1-\alpha^2)^2 + \alpha^2(1-\alpha^2) \right\} (U_i^n)^2 + \frac{\alpha^2}{2}\left((U_{i+1}^n)^2 + (U_{i-1}^n)^2\right).$$

Отсюда, учитывая граничные условия, имеем

$$\|U^{n+1}\|_{H_U}^2 \leq h \sum_{i=1}^{M} (U_i^n)^2 = \|U^n\|_{H_U}^2.$$

Тем самым доказана устойчивость (4) при $\alpha \leq 1$, $n\tau \leq T$. Далее докажем, что при этих условиях устойчив и разностный

аналог задачи (I):

$$\begin{cases} U^{n+1} = L U^n - \tau \rho^n p_n, \\ \dfrac{p_{n+1}}{\sqrt{1-p_{n+1}^2}} - \dfrac{p_n}{\sqrt{1-p_n^2}} = \frac{1}{2}\tau\rho_0 h \left(\sum\limits_{i \in \nu_1(n)}^{\nu_2(n)} v_i^n \tau_i^* + \sum\limits_{i \in \nu_1(n+1)}^{\nu_2(n+1)} v_i^{n+1} \tau_i^* \right), \\ \rho^n = \begin{cases} \rho_0, & \nu_1(n) \leq i \leq \nu_2(n), \\ 0, & i < \nu_1(n), \ i > \nu_2(n), \end{cases} \end{cases} \tag{5}$$

$$\left(p = \frac{dq}{d\xi}\right), \quad p_0 = 0, \quad U^0 \in H_U, \quad n\tau \leq T.$$

$R_1 + h\nu_1(n)$, $R_1 + h\nu_2(n)$ - концы движущейся площадки $\sigma(t)$ в момент времени $t = n\tau$. Положим $B_n = p_n/\sqrt{1-p_n^2}$, тогда $p_n = B_n/\sqrt{1+B_n^2}$, $B_0 = 0$. Из второго уравнения (5) следует, что

$$B_{n+1} = \tau\left(\frac{1}{2}A_0 U^0 + \sum_{j=1}^{n} A_j U^j + \frac{1}{2}A_{n+1} U^{n+1} \right), \tag{6}$$

где A_j - оператор, действующий в H_U :

$$A_j U = \rho_0 h \sum_{i \in \nu_1(j)}^{\nu_2(j)} v_i \tau_i^*.$$

Нетрудно показать, что операторы A_j для всех j ограничены. Оценим $\|U^{n+1}\|_{H_U}$. Из (5) получаем, что

$$\|U^{n+1}\|_{H_U} \leq \|L\| \|U^n\|_{H_U} + \tau\rho_0\sqrt{\sigma}\|p_n\|, \tag{7}$$

где σ - длина площадки $\sigma(t)$.

Кроме того,

$$\|p_n\| \leq \|B_n\| \leq \tau \sum_{j=0}^{n}{}' \|A_j\| \|U^j\|_{H_U}.$$

Обозначим через A $\rho_0\sqrt{\sigma}\max\limits_j \|A_j\|$. Так как $L = Q + \tau\widetilde{Q}$ и, по доказанному выше, $\|Q\|_{H_U} \leq 1$, $\|\widetilde{Q}\|$ - ограничена, то $\|L\| \leq$ i t $\tau\|\widetilde{Q}\|$. Тогда из (7) nonyvaen

$$\|U^{n+1}\|_{H_U} \leq (1 + \tau\|\widetilde{Q}\|)\|U^n\|_{H_U} + \tau^2 A \sum_{j=0}^{n} \|U^j\|_{H_U}.$$

Используя метод математической индукции, легко получить оценку

$$\|U^n\|_{H_U} \le e^{n\tau C_0} \|U^0\|_{H_U}, \quad \forall U^0 \in H_U, \quad n\tau \le T, \quad C_0 = \|\tilde{Q}\| + AT.$$

Тем самым доказана устойчивость (5) при $\alpha \le 1$, $n\tau \le T$.

В работе /3/ была установлена устойчивость разностного аналога задачи Коши для системы уравнений Максвелла.

В заключение выражаю глубокую благодарность С.И.Сердюковой и Е.П.Жидкову за полезные обсуждения и постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р.Рихтмайер, К.Мортон. Разностные методы решения краевых задач ."Мир",М.,1972 .

2. С.К.Годунов, В.С.Рябенький. Введение в теорию разностных схем . Гос.изд-во физ.мат литературы, М., 1962.

3. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова. О численном решении системы уравнений Максвелла в неоднородной области с движущимся разрывом в правой части . ЖВМ и МФ, т.16, № 3, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел

25 марта 1977г.