ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р5 - 10369

Е.П.Жидков, Е.Х.Христов

УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

1977

P5 - 10369

Е.П.Жидков, Е.Х.Христов

УСТОЙЧИВЫЕ МЕТОДЫ СУММИРОВАНИЯ ИНТЕГРАЛА ФУРЬЕ

Направлено в совместный сборник ОИЯИ /Дубна/ - ЦИФИ /Будапешт/: "Алгоритмы и программы для решения некоторых задач физики". Вып. II

Жидков Е.П., Христов Е.Х. P5 - 10369

Устойчивые методы суммирования интеграла Фурье

В рамках метода А.Н.Тихонова построены устойчивые к малым возмущениям в метрике $L^2(-\infty,\infty)$ способы суммирования интеграла Фурье и его производных в некоторых пространствах, гладких на конечном или бесконечном интервалах функций.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Zhidkov E.P., Christov E.H. P5 - 10369

Stable Methods of Summation of the Fourier Integral

In the framework of Tichonov's method there are obtained stable with respect to small distributions in L^2-metric methods of summation of the Fourier integral and its derivatives in some spaces of smooth on finite or infinite intervals functions.

The investigation has been performed at the Labcratory of Computer Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

ВВЕДЕНИЕ

В работах [I,2] на основе метода А.Н.Тихонова были построены способы суммирования ряда Фурье функции

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n\varphi_n(x),$$

где $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – некоторая заданная ортонормированная система функций, устойчивых в равномерной метрике C к малым в метрике ℓ^2 изменениям коэффициентов a_n. В частности, было показано, что если $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел, порядок роста которых при $n\to\infty$ не ниже, чем $n^{2+\varepsilon}$, $(\varepsilon\geqslant 0)$, то искомое приближение в C вычисляется по правилу

$$f_\alpha(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{\tilde a_n\varphi_n(x)}{1+\alpha\xi_n},$$

где параметр регуляризации $\alpha>0$ согласовывается с погрешностью $\delta^2=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n-\tilde a_n|^2$ исходных данных $\{\tilde a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В настоящей заметке аналогичный круг вопросов рассматривается для интеграла Фурье (и.Ф.), т.е. изучается задача о нахождении функции

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(k)e^{ikx}\,dk=F^{-1}\hat f \tag{0.I}$$

и ее производных в метрике C устойчиво к малым изменениям функции $\hat f(k)$ в метрике $L^2=L^2(-\infty,\infty)$.

Метод суммирования и.Ф. (0.I) для функции $f(x)$, принадлежащей нормированному пространству X, с приближенно заданной в L^2 функцией $\hat{f}$, следуя[1], будем называть устойчивым, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из неравенства $\| \hat{f} - \hat{\tilde{f}} \| \le \delta$ следует неравенство $\| f - \tilde{f} \|_X < \varepsilon$, где $f(x)$ и $\tilde{f}(x)$ - результаты суммирования данным методом интегралов

$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{f}}(k) e^{ikx} dk$ соответственно.

При $X = L^2$, в силу равенства Парсеваля

$$2\pi \| f \|^2_{L^2} = \| \hat{f} \|^2_{L^2}, \quad (f = F^{-1} \hat{f}), \qquad (0.2)$$

устойчивое суммирование и.Ф. получается сразу заменой пределов интегрирования в (0.I) на конечные, т.е. подсчитывается функция $f_{M,N}(x) = \int_{-M}^{N} \hat{f}(k) e^{ikx} dk$ с последующим пределом $M, N \to \infty$, где в силу (0.2)

$$\lim_{M,N\to\infty} \| f(x) - f_{M,N}(x) \|^2_{L^2} = \lim_{M,N\to\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{-M} + \int_{N}^{\infty} \right\} |\hat{f}(k)|^2 dk = 0. \quad (0.3)$$

Следовательно, можно положить

$$\tilde{f}(x) = \underset{M,N\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}} \int_{-M}^{N} \hat{\tilde{f}}(k) e^{ikx} dk.$$

В случае, когда X является пространством типа C, метод суммирования (0.3) заведомо неустойчив*). Задача об устойчивости суммирования и.Ф. здесь рассматривается в рамках общих

*) Пусть, например $\hat{f}_{h,\delta}(k) = (2\pi i k h)^{-1} [\exp\{-ik(h^2-\delta^2)\} - 1]$, где $\delta, h > 0$, $\delta h^{-1} < 1$. Тогда $f_{h,\delta}(x) = h^{-1}$ при $0 \le x \le h^2 - \delta^2$, $f_{h,\delta}(x) \equiv 0$ при $x \bar{\in} [0, h^2-\delta^2]$ и $\| \hat{f}_{\delta,h} \|^2_{L^2} = (1 - \delta^2 h^{-2}) \to 0$ при $\delta h^{-1} \to 1$, в то время как $\sup_x | f_{h,\delta}(x) | = h^{-1} \to \infty$ при $h \to 0$.

методов решения некорректных задач, изложенных, например, в книге А.Н.Тихонова и В.Я.Арсенина[3]. Терминология, которой пользуемся в дальнейшем без ссылок, следует установившейся[3]. Аппроксимирующие последовательности $\tilde{f}_\delta(x)$ для точного значения $f_0(x)$ и.Ф. (0.I) (в случае, когда вместо функции $\hat{f}_0(k)$ задана лишь функция $\hat{f}_\delta(k) \in L^2$, для которой известно уклонение $\delta = \| \hat{f}_0 - \hat{f}_\delta \|_{L^2}$), здесь, следуя ([3], гл. 6) строятся, исходя из того, что задачу об устойчивом в X суммировании и.Ф. можно рассматривать как задачу о решении в X интегрального уравнения

$$F f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \hat{f}(k) \qquad (0.4)$$

с приближенно заданной в L^2 правой частью $\hat{f}(k)$.

В § I показано, что идея изложенного выше метода суммирования рядов Фурье приводит в случае и.Ф. к устойчивому в метрике $C^n[a, b]$ суммированию, если a и b конечные.

В § 2 построены стабилизирующие функционалы, позволяющие устойчиво находить $f(x)$, $(-\infty < x < \infty)$ как экстремум соответствующего сглаживающего функционала на некоторых множествах гладких функций с определенным порядком убывания на бесконечности.

Выбор изложенных ниже методов суммирования и.Ф. обусловлен, главным образом, желанием авторов дать аналитическое обоснование уже эффективно применяемых при расчетах на ЭВМ регуляризации и.Ф. в работах[5,6]. Доказательства ряда приведенных в этой работе утверждений являются, в основном, известными и приводятся лишь для некоторой полноты изложения.

§ I. Устойчивое суммирование и.Ф. на конечном интервале

Введем функционал

$$\Omega_n[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k)|\hat{f}(k)|^2 dk, \; (f = F^{-1}\hat{f}), \qquad (I.1)$$

определяемый заданием положительной, непрерывной функции $\omega_n(k)$, $(n = 0,1,\ldots)$, порядок роста которой при $|k| \to \infty$ не ниже, чем $k^{2(n+1)}$, т.е.

$$\underline{\lim}\; k^{-2(n+1)}\omega_n(k) > 0, \quad |k| \to \infty. \qquad (I.2)$$

Например, в качестве $\omega_n(k)$ можно взять полином вида

$$\omega_n(k) = k^{2(n+1)} + a_n k^{2n} + \ldots + a_0, \quad a_0 > 0 \qquad (I.3)$$

с неотрицательными коэффициентами $a_j \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$. Обозначим через D_n область определения функционала $\Omega_n[f]$:

$$D_n = \{ f = F^{-1}\hat{f} \mid \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k)|\hat{f}(k)|^2 dk < \infty \}. \qquad (I.4)$$

Пусть $C^n[a,b]$ - банахово пространство $n \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых на конечном интервале $[a,b]$ функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_{C^n[a,b]} = \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq j \leq n}} |f^{(j)}(x)| \qquad (I.5)$$

и пусть

$$X = C^n[a,b] \oplus L^2\{(-\infty,a);(b,\infty)\} \qquad (I.6)$$

прямая сумма пространств $C^n[a,b]$ и $L^2\{(-\infty,a);(b,\infty)\}$

с нормой

$$\|f\|_X = \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq j \leq n}} |f^{(j)}(x)| + \{(\int_{-\infty}^{a} + \int_{b}^{\infty})|f(x)|^2 dx\}^{\frac{1}{2}}. \qquad (I.7)$$

В этом параграфе для уравнения (0.4) построены с помощью функционала $\Omega_n[f]$ регулирующие операторы $R_{\omega_n}[\hat{f},\alpha]$ с областью регуляризуемости D_n (I.4), позволяющие устойчиво в метрике X (I.7) находить решение $f(x)$ при малых в метрике L^2 возмущений функции $\hat{f}(k)$. Точнее, будет показано, что имеет место следующая

<u>Теорема I.I.</u> Пусть для функции $\hat{f}_0(k) \in L^2$ точное решение $f_0(x)$ уравнения (0.4) принадлежит D_n (I.4). Тогда существует функция $\alpha = \alpha(\delta)$, где

$$\delta = \|\hat{f}_0 - \hat{f}_\delta\|_{L^2} \qquad (I.8)$$

такая, что для функции

$$f_{\alpha(\delta)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}_\delta(k)e^{ikx}}{1 + \alpha\omega_n(k)} dk \overset{def.}{=\!=} R_{\omega_n}[\hat{f}_\delta,\alpha], (\alpha > 0) \qquad (I.9)$$

справедливо равенство

$$\lim_{\delta \to 0} \|f_0(x) - f_{\alpha(\delta)}(x)\|_X = 0. \qquad (I.10)$$

Если

$$\delta^2 < \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_\delta(k)|^2 dk, \qquad (I.11)$$

то параметр регуляризации $\alpha > 0$ определяется однозначно из уравнения

$$\Psi(\alpha) \equiv \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}_\delta(k)|^2 \omega_n^2(k)[1 + \alpha\omega_n(k)]^{-2} dk = \delta^2. \qquad (I.12)$$

<u>Замечание.</u> Представляя оператор F^{-1} (0.I) в виде

$$F^{-1} = P_1F^{-1} \oplus P_2F^{-1} \equiv F_1 \oplus F_2,$$

где P_j $(j=1,2)$ - операторы проектирования из X (I.6) соответственно на $C^n[a,b]$ и $L^2\{(-\infty,a);(b,\infty)\}$, получаем, в силу равенства Парсеваля (0.2), что

$$\| F_2 \hat{f} \|_{L^2\{(-\infty,a);(b,\infty)\}} \le \| F^{-1}\hat{f}\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}.$$

Следовательно, оператор $F_2 : L^2 \mapsto L^2\{(-\infty,a);(b,\infty)\}$ является непрерывным. Оператор $F_1 : L^2 \mapsto C^n[a, b]$, очевидно (см., например, сноску на стр. 4), является неограниченным. Таким образом, задача об устойчивом суммировании и.Ф. в метрике X (I.7) сводится, по существу, к устойчивому нахождению значений оператора F_1 в метрике $C^n[a,b]$. Отметим, что сам оператор $F: X \mapsto L^2$ непрерывен, так как

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}}\| F f\|_{L^2} = \| f\|_{L^2} \le (b-a)^{\frac{1}{2}} \| f\|_X .$$

Доказательству теоремы I.I предпошлем две простые леммы, показывающие, что функционал $\Omega_n[f]$ (I.I) является стабилизирующим в пространстве X для уравнения (0.4).

<u>Лемма I.I.</u> Любая функция $f(x) \in D_n$ (I.4) есть $n+1$ раз дифференцируемой функцией. Первые $n \ge 0$ производных являются непрерывными при $-\infty < x < \infty$ функциями, которые определяются формулами

$$f^{(j)}(x) = i^j \int_{-\infty}^{\infty} k^j \hat{f}(k) e^{ikx} dk , \quad \int_{-\infty}^{\infty} |k^j \hat{f}(k)| dk < \infty, j=0,\dots,n. \quad \text{(I.I3)}$$

Функция $f^{(n)}(x)$ дифференцируема по L^2 - норме и для ее производной $f^{(n+1)}(x)$ справедливо

$$\int_{-\infty}^{\infty} | f^{(n+1)}(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k^{2(n+1)} |\hat{f}(k)|^2 dk < \infty. \quad \text{(I.I4)}$$

<u>Доказательство.</u> Из условия (I.2) следует, в силу неравенства Коши-Буняковского, что при любом $j=0,1,\dots,n$ и $0<\varepsilon\le 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |k^j \hat{f}(k)| dk \le \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} k^{2j}(1+|k|)^{1+\varepsilon} |\hat{f}(k)|^2 dk \right\}^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

что и доказывает (I.I3). Далее из (I.2) вытекает также, что

$$k^{n+1} \hat{f}(k) \in L^2. \quad \text{(I.I5)}$$

Следовательно, существует функция

$$\tilde{f}(x) = \underset{M,N\to\infty}{l.i.m.} \int_{M}^{N} k^{n+1} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \in L^2,$$

для которой стандартной техникой дифференцирования преобразования Фурье обобщенных функций медленного роста показывается, что $\tilde{f}(x)$ совпадает с $f^{(n+1)}(x)$, что вместе с (I.I5) дает (I.I4). Лемма доказана.

Замечая, что пространство $\mathcal{D}$ финитных, бесконечно дифференцируемых функций является всюду плотным в X и принадлежит D_n, получаем

<u>Следствие.</u> Область определения D_n функционала $\Omega_n[f]$ является всюду плотным множеством в X.

<u>Лемма I.2.</u> При любом $d>0$ множество функций

$$\mathfrak{M}_d = \{ f \in X \,|\, \Omega_n[f] \le d \} = \mathfrak{M}_d^{(1)} \oplus \mathfrak{M}_d^{(2)}, \quad \text{(I.I6)}$$

где $\mathfrak{M}_d^{(1)}$ является компактом в $C^n[a,b]$ при любых фиксированных, конечных a и b, а $\mathfrak{M}_d^{(2)}$ - ограниченное множество в $L^2\{(-\infty,a);(b,\infty)\}$ *).

Доказательство. Из леммы I.I в силу равенства Парсеваля (0.2) получаем

$$2\pi\sum_{j=0}^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}|f^{(j)}(x)|^2dx=\sum_{j=0}^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}k^{2j}|\hat f(k)|^2dk<\infty. \quad \text{(I.17)}$$

Следовательно, для всех $f\in\mathfrak{M}_d$ справедливо

$$\|f\|_{W^2_{n+1}[a,b]}\overset{def}{=}\Big\{\sum_{j=0}^{n+1}\int_a^b|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac12}\le M(d),$$

где $M(d)$ – функция, ограниченная вместе с d. Отсюда в силу известной теоремы о вполне непрерывном вложении пространства $W^2_{n+1}[a,b]$ в пространство $C^n[a,b]$ следует компактность $\mathfrak{M}^{(1)}_d$ в $C^n[a,b]$. Ограниченность $\mathfrak{M}^{(2)}_d$ является прямым следствием равенства Парсеваля. Лемма доказана.

Следствие. На множестве функций $\mathfrak{N}_d=F(\mathfrak{M}_d)\subset L^2$ (при любом конечном $d>0$) обратный оператор F^{-1} (0.I) является непрерывным.

---

*) Отметим, что само множество $\mathfrak{M}_d$ (I.I6) не является компактом в X. Для этого достаточно рассмотреть последовательность функций

$$f_\ell(x)=A\exp\{-\beta^2(x-\ell)^2\},\quad \ell=0,1,\dots,\ (A,\beta>0), \quad \text{(I.I8)}$$

которая за счет выбора $A=A(d)$ принадлежит $\mathfrak{M}_d$ (с $\omega_n(k)$ вида (I.3)), так как

$$\hat f_\ell(k)=(2\beta\sqrt{\pi})^{-1}A\exp\{-k^2(4\beta^2)^{-1}+ik\ell\},\ \ell=0,1,\dots. \quad \text{(I.I9)}$$

Последовательность $\{f_\ell(x)\}_{\ell=0}^{\infty}$, очевидно, не содержит сходящуюся в X подпоследовательность.

Доказательство. Так как на множестве $\mathfrak{M}_d$ (I.I6) оператор $F:X\mapsto L^2$ является непрерывным и взаимно однозначным, доказательство в силу замечания к теореме I.I получается непосредственным обобщением доказательства известной леммы о непрерывности обратного отображения (см. например, /3/, стр. 32).

Доказательство теоремы I.I. Докажем сначала, что однопараметрическое (по α) семейство операторов

$$R_{\omega_n}[\hat f,\alpha](x)=\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(k)[1+\alpha\omega_n(k)]^{-1}e^{ikx}dk,\ (\alpha>0) \quad \text{(I.20)}$$

является регуляризирующим для уравнения (0.4), т.е. (a) при любом $\alpha>0$ оператор $R_{\omega_n}[\hat f,\alpha]:L^2\mapsto X$ является непрерывным оператором и (b) для любой функции $f\in D_n$ имеет место равенство

$$\lim_{\alpha\to0}\|R_{\omega_n}[Ff,\alpha]-f\|_X=0,\ (f\in D_n). \quad \text{(I.2I)}$$

Непрерывность $R_{\omega_n}[\hat f,\alpha]$ вытекает сразу из условия (I.2), так как, в силу неравенства Коши-Буняковского, имеем

$$\|R_{\omega_n}[\hat f,\alpha]\|_X\le\sup_{0\le j\le n}\Big\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{2k^{2j}dk}{[1+\alpha\omega_n(k)]^2}\Big\}^{\frac12}\|\hat f\|_{L^2},\ (\alpha>0). \quad \text{(I.22)}$$

Для того чтобы показать (b), отметим, что из равенства

$$R_{\omega_n}[Ff,\alpha](x)-f(x)=\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\hat f(k)\omega_n(k)[1+\alpha\omega_n(k)]^{-1}e^{ikx}dk$$

следует, в силу леммы I.I, что при $f\in D_n$ для любого $j=0,1,\dots,n$ имеет место неравенство

$$\sup_{-\infty<x<\infty}\Big|\frac{d^j}{dx^j}R_{\omega_n}[Ff,\alpha](x)-f^{(j)}(x)\Big|\le$$
$$\le\alpha\sqrt{\max(M,N)}\Big\{\int_{-M}^{N}k^{2j}|\hat f(k)|^2\omega_n^2(k)dk\Big\}^{\frac12}+\Big(\int_{-\infty}^{-M}+\int_{N}^{\infty}\Big)|k^j\hat f(k)|dk. \quad \text{(I.23)}$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$, равномерно по $j = 0, 1, \ldots, n$, существует, в силу (I.14), число $N_0 = N_0(\varepsilon)$, для которого при $M, N \geq N_0$ второе слагаемое в правой части (I.23) меньше $\varepsilon/2$. При фиксированных (конечных) $M, N \geq N_0$ существует $\alpha_0 = \alpha_0(\varepsilon, M, N) > 0$ такое, что при $0 \leq \alpha \leq \alpha_0$ первое слагаемое тоже меньше $\varepsilon/2$. Таким образом, получаем

$$\lim_{\alpha \to 0} \| R_{\omega_n}[Ff, \alpha] - f \|_{C^n[a,b]} .$$

Отсюда, с учетом

$$\| R_{\omega_n}[Ff, \alpha] - f \|^2_{L^2\{(-\infty, a); (b, \infty)\}} \leq \| R_{\omega_n}[Ff, \alpha] - f \|^2_{L^2} = \Psi(\alpha),$$

где функция $\Psi(\alpha)$ определяется равенством (I.12), т.е.

$$\Psi(\alpha) = \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \omega_n^2(k) [1 + \alpha\omega_n(k)]^{-2} dk, \quad \text{(I.24)}$$

следует (I.21), так как для любой $\hat{f} \in L^2$ функция $\Psi(\alpha)$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией, $\Psi(0) = 0$, $\Psi(\infty) = \| \hat{f} \|^2_{L^2}$. Действительно, при $\alpha > 0$ монотонность вытекает из

$$\Psi'(\alpha) = 2\alpha \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 \omega_n^2(k) [1 + \alpha\omega_n(k)]^{-3} dk > 0,$$

что вместе с $\hat{f} \in L^2$ и равномерной на каждом конечном интервале сходимостью

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha\omega_n(k)[1 + \alpha\omega_n(k)]^{-1} = 0, \quad -M \leq k \leq N,$$

дает $\Psi(0) = 0$. Существование функции $\alpha(\delta)$, для которой имеет место равенство (I.10), следует, в силу (I.21) и (I.22), непосредственно из неравенства

$$\| f_{\alpha(\delta)}(x) - f_0(x) \|_X \leq \| R_{\omega_n}[\hat{f}_\delta, \alpha] - R_{\omega_n}[\hat{f}_0, \alpha] \|_X +$$
$$+ \| R_{\omega_n}[Ff_0, \alpha] - f_0 \|_X .$$

Доказательство теоремы заканчивается следующей леммой.

<u>Лемма I.3.</u> Элемент $f_{\alpha(\delta)}(x) = R_{\omega_n}[\hat{f}_\delta, \alpha](x)$,

где $\alpha = \alpha(\delta)$ определяется по невязке, т.е. из уравнения (I.12), минимизирует сглаживающий функционал

$$M^\alpha[\hat{f}_\delta, f] = \| Ff - \hat{f}_\delta \|^2_{L^2} + \alpha\Omega_n[f] = \quad \text{(I.25)}$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k) - \hat{f}_\delta(k)|^2 dk + \alpha \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k) |\hat{f}(k)|^2 dk$$

на множестве функций

$$\mathcal{F}_\delta = Q_\delta \cap D_n, \quad \text{(I.26)}$$

где D_n определяется (I.4), а

$$Q_\delta = \{ f \in X \mid \| Ff - \hat{f}_\delta \|^2_{L^2} = \delta^2 \}. \quad \text{(I.27)}$$

Притом, если функция $\hat{f}_\delta(k)$ удовлетворяет неравенству $\delta^2 \leq \| \hat{f}_\delta \|^2_{L^2}$, то справедливо (I.10).

<u>Доказательство.</u> Из (I.25) и следствия леммы I.I следует, что уравнение Эйлера

$$F^*Ff + \alpha\Omega_n'[f] = F^*f_\delta , \quad \text{(I.28)}$$

(где F^* – оператор, сопряженный оператору F, а $\Omega_n'[f]$ – производная Фреше функционала $\Omega_n[f]$) для элемента f_α, минимизирующего $M^\alpha[\hat{f}_\delta, f]$ (I.25) на множестве D_n, в силу $F^* = F^{-1}$, является

$$\hat{f}_\alpha + \alpha\,\omega_n(k)\,\hat{f}_\alpha = \hat{f}_\delta \;, \quad f_\alpha = F^{-1}\hat{f}_\alpha . \qquad (I.29)$$

Уравнение (I.29) для любой правой части $\hat{f}_\delta \in L^2$ и $\alpha > 0$ имеет единственное решение

$$f_\alpha(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_\delta(k)\,[1 + \alpha\,\omega_n(k)]^{-1} e^{ikx} dk \left(= R_{\omega_n}[\hat{f}_\delta, \alpha]\right) \in D_n .$$

Условие для невязки (I.27) приводит, в силу (I.29), к уравнению (I.12), которое при $\delta^2 \leq \| \hat{f}_\delta \|^2_{L^2}$ вследствие монотонности функций $\Psi(\alpha)$ имеет единственное решение $\alpha = \alpha(\delta)$. (Так как $\Psi(\alpha) \leq \| \hat{f}_\delta \|^2_{L^2}$, то уравнение $\Psi(\alpha) = \delta^2$ при $\delta^2 > \| \hat{f}_\delta \|^2_{L^2}$ не имеет решения). Доказательство сходимости (I.10), с выбранным $\alpha(\delta)$ из-за непрерывности оператора F и следствия леммы I.2, проводится так же, как и в /3/, гл. II). Лемма доказана.

<u>Замечание.</u> Так как при любом $\alpha > 0$ и $\hat{f} \in L^2$ имеем, из условия (I.2) и равенства Парсеваля (0.2),

$$\lim_{M,N\to\infty} \| f_\alpha(x) - \int_{-M}^{N} \frac{\hat{f}(k) e^{ikx} dk}{1 + \alpha\,\omega_n(k)} \|_X = \lim_{M,N\to\infty} \| R_{\omega_n}[\hat{f}, \alpha] - \int_{-M}^{N} \frac{\hat{f}(k) e^{ikx} dk}{1 + \alpha\,\omega_n(k)} \|_X \leq$$

$$\leq \lim_{M,N\to\infty} \sup_{\substack{a \leq x \leq b \\ 0 \leq j \leq n}} \left| \frac{d^j f_\alpha(x)}{dx^j} - i^j \int_{-M}^{N} \frac{k^j \hat{f}(k) e^{ikx}}{1 + \alpha\,\omega_n(k)} dk \right| +$$

$$+ \lim_{M,N\to\infty} \left\{ \left(\int_{-\infty}^{-M} + \int_{N}^{\infty} \right) |\hat{f}(k)|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = 0 ,$$

то элемент $f_{\alpha(\delta)}(x)$ (I.9) можно считать в X с любой, наперед заданной точностью, заменяя пределы интегрирования на конечные.

§ II. <u>Случай бесконечного интервала</u>

Построенные в § I регуляризирующие операторы $R_{\omega_n}[\hat{f}, \alpha]$ (I.9) можно применять, в силу (I.23), и в случае, когда $X = C_0^n(-\infty, \infty)$ – пространство $n \geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых $\lim\limits_{|x|\to\infty} f^{(j)}(x) = 0$, $(j = 0, 1, \ldots, n)$, с нормой $\| f \|_{C_0^n(-\infty,\infty)} = \sup\limits_{-\infty < x < \infty} |f^{(j)}(x)|, (j = 0, 1, \ldots, n)$, однако априори нельзя утверждать ничего о порядке убывания при $|x| \to \infty$ аппроксимирующей последовательности $f_{\alpha(\delta)}(x)$.

Здесь за счет дополнительных предположений о гладкости функции $\hat{f}(k)$ построены регуляризирующие операторы, позволяющие находить решения $f(x)$ уравнения (0.4), устойчиво в некоторых пространствах со степенным убыванием на бесконечности, однако, в отличие от § I, их явное построение не является столь эффективным.

Предполагая, что функция $\hat{f}(k)$ имеет $m \geq 1$ обобщенных производных, интегрируемых с квадратом на всей оси $(-\infty, \infty)$, введем стабилизирующий функционал m-ого порядка следующего вида:

$$\Omega_{m,n}[f] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k) \left(\sum_{j=0}^{m} |\hat{f}^{(j)}(k)|^2 \right) dk , \quad (f = F^{-1}\hat{f}), \qquad (2.I)$$

определяемый числом $m \geq 1$ (при $m = 0$ получается функционал $\Omega_n[f]$ (I.I)) и функцией $\omega_n(k)$, которая удовлетворяет условиям § I, в частности, (I.2).

<u>Лемма 2.I.</u> Любая функция $f(x)$, принадлежащая области

$$D_{m,n} = \left\{ f = F^{-1}\hat{f} \;\middle|\; \int_{-\infty}^{\infty} \omega_n(k) \left(\sum_{j=0}^{m} |\hat{f}^{(j)}(k)|^2 \right) dk < \infty \right\} \qquad (2.2)$$

определения функционала $\Omega_{m,n}[f]$ (2.I), является

$n+1$ раз дифференцируемой функцией. Первые n производные определяются (I.I3) и являются непрерывными функциями от x, $n+1$ -ая производная существует в смысле L^2 – нормы и для нее справедливо (I.I4). Кроме того, для $f \in D_{m,n}$ имеют место неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^{2m})\Big\{\sum_{j=0}^{n+1}|f^{(j)}(x)|^2\Big\}dx<\infty \tag{2.3}$$

и

$$\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ 0\le j\le n}}(1+x^{2m})^{\frac{1}{2}}|f^{(j)}(x)|<\infty. \tag{2.4}$$

<u>Доказательство.</u> Так как $D_{m,n}\subseteq D_{0,n}=D_n$ (I.4), дифференциальные свойства функции $f(x)$ вытекают из леммы I.I. Неравенства (2.3) и (2.4) вытекают из тождества

$$x^m f^{(j)}(x)=i^{m+j}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^m}{dk^m}[k^j\hat{f}(k)]\,e^{ikx}dk,\ (j=0,1,\dots,n) \tag{2.5}$$

где в силу условия (I.2) функции $[k^j\hat{f}(k)]^{(m)}\in L^1\cap L^2$ при $j=0,1,\dots,n$ и $[k^{n+1}\hat{f}(k)]^{(m)}\in L^2$. Отсюда сразу следует (2.4). Для того чтобы получить (2.3), остается применить равенство Парсеваля (0.2) к функциям (2.5), что вместе с (I.I7) дает

$$2\pi\sum_{j=0}^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^{2m})|f^{(j)}(x)|^2dx=\sum_{j=0}^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{k^{2j}|\hat{f}(k)|^2+\Big|\frac{d^m(k^j\hat{f}(k))}{dk^m}\Big|^2\Big\}<\infty. \tag{2.6}$$

Лемма доказана.

Обозначим через $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$, $(\varepsilon>0,\ n\geq 0)$ гильбертово пространство $n\geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых конечна

$$\|f\|_{W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)}=\Big\{\sum_{j=0}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|)^{2(m-\varepsilon)}|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac{1}{2}}<\infty, \tag{2.7}$$

а через $\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$ – банахово пространство $n\geq 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций с нормой

$$\|f\|_{\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}}=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ 0\le j\le n}}(1+|x|)^{2(m-\varepsilon)})^{\frac{1}{2}}|f^{(j)}(x)|,\ (\varepsilon>0). \tag{2.8}$$

<u>Лемма 2.2.</u> Область определения $D_{m,n}$ (2.2) функционала $\Omega_{m,n}[f]$ является всюду плотным множеством в пространствах $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$ и $\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$. Для всякого $d>0$ множество функций

$$\mathfrak{M}^{(m)}_d=\{f\in D_{m,n}\mid\Omega_{m,n}[f]\le d\} \tag{2.9}$$

есть компакт в $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$ и $\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$.*)

<u>Доказательство.</u> Для того чтобы показать, что $D_{m,n}$ всюду плотно в $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$ (либо $\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$), достаточно сослаться на следствие леммы I.I. Из (2.6) следует, что для всех функций $f(x)\in\mathfrak{M}^{(m)}_d$ имеем

$$\|f\|_{W^2_{m,n+1}(-\infty,\infty)}=\Big\{\sum_{j=0}^{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}(1+x^{2m})|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac{1}{2}}\le M(d), \tag{2.10}$$

---

x) Отметим, что множество функций $\{f_\ell(x)\}_{\ell=0}^{\infty}$ (I.I8) принадлежит $D_{m,n}$ при любом $\ell=0,1,2,\dots$, но так как, в силу (I.I9), имеем

$$\Big|\frac{d}{dk}\hat{f}_\ell(k)\Big|^2=\Big|\frac{d}{dk}\hat{f}_0(k)\Big|^2+\ell^2|\hat{f}_0(k)|^2,\ \ell=0,1,\dots$$

то ни при каком $d>0$ из последовательности $\{f_\ell(x)\}_{\ell=0}^{\infty}$ нельзя найти подпоследовательность, принадлежащую $\mathfrak{M}^{(m)}_d$, $(m\geq 1)$, как и следовало ожидать.

где функция $M(d)$ ограничена вместе с d. Следовательно, для доказательства компактности достаточно показать, что любое ограниченное в $W^2_{m,n+1}(-\infty,\infty)$ множество компактно в $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$. Для этого отметим сначала, что из (2.10) следует, что если $f(x)\in\mathfrak{M}^{(m)}_d$, то при любом $N>0$ имеют место неравенства

$$\Big\{\sum_{j=0}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{-N}+\int_{N}^{\infty}\Big)|x|^{2(m-\varepsilon)}|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac12}\le M(d)N^{-\varepsilon}, \qquad (2.11)$$

$$\mathfrak{M}^{(m)}_d(-N,N)\overset{def}{=\!=}\Big\{\sum_{j=0}^{n+1}\int_{-N}^{N}|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac12}\le M(d). \qquad (2.12)$$

Из (2.11) следует существование возрастающей последовательности чисел R_ℓ, $(\ell=1,2,\dots)$, для которой

$$\Big\{\sum_{j=0}^{n}\Big(\int_{-\infty}^{-R_\ell}+\int_{R_\ell}^{\infty}\Big)|x|^{2(m-\varepsilon)}|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac12}\le\frac{1}{\ell}. \qquad (2.13)$$

Из (2.12) в силу леммы 1.2 следует, что множества $\mathfrak{M}^{(m)}_d(-R_\ell,R_\ell)$ при любом $\ell=0,1,\dots$ компактны в $C^n[-R_\ell,R_\ell]$, а следовательно, и в пространстве $W^2_{m-\varepsilon,n}[-R_\ell,R_\ell]$ с нормой

$$\|f\|_{W^2_{m-\varepsilon,n}[-R_\ell,R_\ell]}=\Big\{\int_{-R_\ell}^{R_\ell}\sum_{j=0}^{n}(1+|x|^{2(m-\varepsilon)})|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac12}.$$

Следовательно, существует последовательность функции $\{f_{j,1}\}_{j=1}^{\infty}\subset\mathfrak{M}^{(m)}_d$, сходящейся в $W^2_{m-\varepsilon,n}[-R_1,R_1]$.
Далее из этой последовательности опять в силу компактности $\mathfrak{M}^{(m)}_d$ в $W^2_{m-\varepsilon,n}[-R_2,R_2]$ следует существование подпоследовательности $\{f_{j,2}\}_{j=1}^{\infty}$ последовательности $\{f_{j,1}\}_{j=1}^{\infty}$, сходящейся в $W^2_{m-\varepsilon,n}[-R_2,R_2]$ и т.д. Диагональная последовательность $\{f_{j,j}\}_{j=1}^{\infty}$, в силу (2.13), сходится в $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$. Доказательство компактности $\mathfrak{M}^{(m)}_d$ в $\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$ проводится точно так же. Лемма доказана.

Пусть $W^1_{\mu,n}(-\infty,\infty)$ – пространство $n\ge 0$ раз непрерывно дифференцируемых функций $f(x)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{W^1_{\mu,n}(-\infty,\infty)}=\int_{-\infty}^{\infty}(1+|x|^{\mu})\Big\{\sum_{j=0}^{n}|f^{(j)}(x)|\Big\}dx<\infty. \qquad (2.14)$$

Так как, при $0\le\mu<m-\frac12$, вследствие неравенства

$$\int_N^{\infty}|x|^{\mu}|f^{(j)}(x)|dx\le N^{m-\mu-\frac12}(2m-2\mu-1)^{-\frac12}\Big\{\int_N^{\infty}x^{2m}|f^{(j)}(x)|^2dx\Big\}^{\frac12},$$

получаем включение

$$W^1_{\mu,n}(-\infty,\infty)\subset W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty),\ (\varepsilon\le m-\mu-\tfrac12),$$

то справедливо

<u>Следствие.</u> Для всякого $d>0$ множество функции $\mathfrak{M}^{(m)}_d$ (2.9) компактно в $W^1_{\mu,n}(-\infty,\infty)$, $0\le\mu<m-\frac12$.

Пусть теперь известно, что точное решение $f_0(x)$ уравнения (0.4) принадлежит $D_{m,n}$ (2.2). Если вместо точного значения $\hat f_0(k)$ правой стороны уравнения (0.4) задана лишь функция $\hat f_\delta(k)\in L^2$, для которой известна величина погрешности $\delta=\|\hat f_0-\hat f_\delta\|_{L^2}$, то для нахождения приближенного решения уравнения (0.4), т.е. последовательности $f_{\alpha(\delta)}(x)$, для которой $\lim\limits_{\delta\to0}\|f_{\alpha(\delta)}(x)-f_0(x)\|_X=0$, достаточно найти элемент $f_\alpha\in X$ (где в качестве X можно взять любое из пространств $W^2_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$, $\mathcal{S}_{m-\varepsilon,n}(-\infty,\infty)$, $W^1_{\mu,n}(-\infty,\infty)$), минимизирующий функционал

$$M^\alpha[\hat f_\delta,f]=\int_{-\infty}^{\infty}|\hat f(k)-\hat f_\delta(k)|^2dk+\alpha\int_{-\infty}^{\infty}\omega_m(k)\Big\{\sum_{j=0}^{m}|\hat f^{(j)}(k)|^2\Big\}dk \qquad (2.15)$$

где параметр $\alpha>0$ определяется по невязке, т.е. из уравнения $\|Ff_\alpha-\hat f_\delta\|^2_{L^2}=\delta^2$. Существование элемента $f_\alpha(x)$

(возможно, не единственного) с указанными свойствами вытекает, в силу леммы 2.I и 2.2, из общей теории построения регуляризирующих операторов для уравнения вида (0.4) с помощью минимизаций сглаживающего функционала (2.I5) ([3], гл. II). Так как производная Фреше функционала $\Omega_{m,n}[f]$ (2.I) является

$$\Omega'_{m,n}[f]h = 2\int_{-\infty}^{\infty}\Big\{\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \frac{d^j}{dk^j}[\omega_n(k)\frac{d^j}{dk^j}\hat{f}(k)\Big\}\hat{h}(k)\,dk,$$

то уравнение Эйлера (I.28) приводит (в случае функционала $M^\alpha[\hat{f}_\delta, f]$ (2.I5)) формально к краевой задаче, определяемой обыкновенным дифференциальным уравнением $2m$ -ого порядка

$$\hat{f}(k) + \alpha\sum_{j=0}^{m}(-1)^j \frac{d^j}{dk^j}[\omega_n(k)\frac{d^j}{dk^j}\hat{f}(k)] = \hat{f}_\delta(k), (f = F^{-1}\hat{f}), \tag{2.I6}$$

и граничным условиям

$$\lim_{|k|\to\infty} \hat{f}^{(j)}_\alpha(k) = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, m-1. \tag{2.I7}$$

Решение задачи (2.I6), (2.I7), за исключением случая $m = 0$, когда уравнение (2.I6) сводится к уравнению (I.29), приводит к исследованию спектра сингулярного дифференциального оператора $2m$ -ого порядка. Эта задача выходит за пределы настоящей заметки. Более удобными, с вычислительной точки зрения, методами нахождения $f_\alpha(x)$ являются прямые методы минимизации выпуклых функционалов, как, например, метод наискорейшего спуска, метод Ньютона и т.д. Подробное изучение возможностей их применения к функционалам вида (2.I5) содержится в [3].

Отметим, что рассмотренные здесь методы суммирования и.ф. могут быть полезны при численном решении обратной задачи квантовой теории рассеяния. Так, например, для радиального уравнения Шредингера

$$\frac{d^2y}{dx^2} + [k^2 - v(x)]y = 0, \quad 0 \le x < \infty, \quad y(0,k) = 0 \tag{2.I8}$$

с вещественным потенциалом $v(x)$, для которого

$$\int_0^\infty x|v(x)|\,dx < \infty, \tag{2.I9}$$

в подходе В.А.Марченко[4] необходимо, в первую очередь, подсчитать функцию

$$F(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[1 - S(k)]\,e^{ikx}dk$$

и ее производную $F'(x)$ при $x > 0$, где $S(k)$ - заданная функция рассеяния задачи (2.I8). Сам потенциал $v(x)$ находится по $F(x)$ из соответствующего уравнения В.А.Марченко, являющегося уравнением Фредгольма второго рода, решение которого легко реализуется на ЭВМ. В случае финитных, гладких потенциалов приходим к задаче, рассматриваемой в § I, так как из $v(x) \equiv 0$ при $x > a$ следует $F(x) \equiv 0$ при $x > 2a$ (при отсутствии собственных чисел у краевой задачи (2.I8)). В случае нефинитных $v(x)$ - к задачам § 2, так как, например, если $v(x)$ удовлетворяет условию (2.9), то и для $F'(x)$ справедливо (2.9), а $F(x) \in L^1(-\infty, \infty)$.

При некоторых априорных предположениях о равномерном убывании при $x \to \infty$ потенциалов $v(x)$ в (2.I8), широкий круг вопросов устойчивости обратной задачи рассеяния был решен в работах В.А.Марченко и его учеников[4].

Метод регуляризации, изложенный в § I, применялся при расчетах на ЭВМ потенциала $v(x)$ по фазе рассеяния $\delta(k) (= \frac{i}{2}\ln S(k))$ модифицированным методом Ньютона-Канторовича в работах[4, 5], где приведен расчетный алгоритм и подробные результаты численных расчетов.

В заключение авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В.А.Попову за полезные обсуждения.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. А.Н.Тихонов. ДАН СССР 156, I, (1964).

2. В.Я.Арсенин. ДАН СССР 183, 2 (1968).

3. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. М., Наука, 1974.

4. В.А.Марченко. Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля, Киев, Наукова Думка, 1972.

5. Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов. Сообщение ОИЯИ, Р5-9063, Дубна, 1975.

6. Е.П.Жидков, Р.В.Малышев, Е.Х.Христов. Сообщение ОИЯИ, Р5-9923, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 января 1977 года.