СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 10366

Л.Александров

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НА ЭВМ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

1977

P5 - 10366

Л.Александров

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ НА ЭВМ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Александров Л.

Р5 - 10366

О численном решении на ЭВМ нелинейных некорректно поставленных задач

Для устойчивого решения нелинейных задач применяются дважды регуляризованные процессы ньютоновского типа. Приводится обоснование перехода от "регуляризованной" к "ϕ-усредненной" задаче. Вводится понятие о псевдорешениях нелинейных задач, некорректно поставленных в самом общем смысле.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Aleksandrov L.

P5 - 10366

On the Numerical Solution of Nonlinear Uncorrect Problems

Doubly-regularized iteration processes of Newton type are applied for stable solving of nonlinear problems. The use of a "ϕ-averaged"problem instead of a "regularized" one is justified. One introduces the motion about psevdo-solutions of the nonlinear problems incorrectly settled in general sense.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automatization, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

Для решения некорректно поставленных задач А.Н.Тихоновым предложен и обоснован метод регуляризации /I-4/ и др.). Как известно, построение регуляризирующих алгоритмов путем минимизации сглаживающих функционалов в нелинейном случае связано с определенными трудностями (см. /3,5,6/ и др.).

Для устойчивого построения решений нелинейных задач в настоящей работе рассматривается новый класс регуляризирующих алгоритмов: дважды регуляризованные процессы ньютоновского типа (RR -процессы). Способ построения RR -процессов конструктивен при исследовании нелинейных задач на ЭВМ. На его основе в работе вводится понятие о псевдорешениях некорректно поставленных задач.

§I. Усредненно-регуляризованное решение нелинейных уравнений

Пусть E_1 , E_2 , E_3 – банаховы пространства, а f – нелинейный оператор, преобразующий выпуклую область $D_f \subseteq E_1$ во множество $R_f \subseteq E_2$. Пусть заданы операторная функция $\varphi(x): D_\varphi(\subseteq R_f) \to R_\varphi \subseteq E_3$ (определенная в D_f) и нелинейный в общем случае оператор $\alpha : D_f \to R_\varphi$. Предполагаем также существование в области D_f производных Фреше $f'(x)$, $\varphi'(x)$ и $\alpha'(x)$.

Пусть поставлена задача о решении уравнения

$$f x = \bar{y} \quad , \bar{y} \in R_f . \qquad (I)$$

В случае $\bar{y} \,\bar{\in}\, R_f$ эта задача не обладает решением в обыкновенном смысле.

Вместо решения исходного уравнения (I) будем рассматривать решение преобразованного уравнения

$$F x \equiv g x + \alpha x = 0 , \qquad (2)$$

где $\quad g x \equiv \varphi(x)(f x - \bar{y}) .$

Сформулируем общее условие применения операторов α .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. При заданном множестве $L \subseteq D_f$ и операторе $\varphi(x)\,(x \in D_f)$ оператор α <u>называется оператором регуляризации задачи (I)</u> над множеством L , если производная Фреше $g'(x)+\alpha'(x)$ обладает для любого $x \in L$ ограниченным обратным оператором $[g'(x)+\alpha'(x)]^{-1} \in [R_\varphi , D_f]$.

Оператор $\varphi(x)$, $x \in D_f$ в общем случае понимаем как <u>оператор усреднения задачи</u>. При подходящем выборе оператора $\varphi(x)$ можно добиться разрешимости мультипликативно-преобразованного уравнения

$$\varphi(x) f x = \varphi(x) \bar{y} . \qquad (3)$$

В случае разрешимости задачи (2) любое ее решение из области D_f будем понимать как φ -<u>усредненное решение задачи (I)</u>.

В частном случае, когда $E_1 = E_3$ и E_1 , E_2 являются гильбертовыми пространствами, классическим примером φ -усредненного решения служит гауссовское f'^{*} -усредненное решение задачи (I).

Регуляризатор задачи α в уравнении (2) выбирается относительно небольшим по норме и служит для проведения устойчивой аппроксимации задачи (3) в окрестности некоторого ее решения (или некоторых ее решений).

Выбор величины $\|\alpha x\|_{E_3}$ в окрестности решения (или решений) уравнений (3) необходимо согласовать как с искажениями входных данных задачи (I), если имеются такие, так и с ошибками округлений применяемых вычислительных средств (см. /3,10-12/ и др.). Выбор оператора α чаще всего основан на дополнительной информации об искомом решении.

2. Пусть оператор усреднения φ выбран так, что уравнение (3) обладает решением $\bar{x}$ (или даже множеством решений $\{\bar{x}\}$), находящимся внутри заданного шара $S(x_0 , \rho) \subseteq D_f , \rho > 0$.

Для решения уравнения (2) можно применить метод непрерывных R -траекторий типа Ньютона-Канторовича /13,14/. Получаем задачу Коши

$$
\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -[F'(x) + \tau(x)]^{-1} Fx \equiv Px, & (4) \\ x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \le t < \infty), \ \tau(x) \in \mathcal{R}(F'),^{x/} & (5) \end{cases}
$$

Эту задачу понимаем как непрерывный, дважды регуляризованный процесс (RR -процессы), так как для решения регуляризованной задачи (2) применяется непрерывный регуляризованный процесс.

§2. Обоснование перехода от задачи (2) к задаче (3)

I. В силе следующее основное утверждение.

ТЕОРЕМА I. Пусть: I) процесс (4)-(5) обладает решением $x(t)$, не выходящим из шара $S(x_0, \rho)$ для всех $t \in [t_0, \infty)$; 2) оператор α является вдоль траектории $x(t), t \ge t_0$ оператором регуляризации задачи (I), и для него выполнено соотношение

$$
\lim_{t \to \infty} \| \alpha x(t) \| = 0 \quad ; \tag{6}
$$

3) вдоль траектории $x(t), t \ge t_0$ регуляризаторы α и $\tau(x)$ удовлетворяют соотношениям

$$
\| [g'(x(t)) + \alpha'(x(t)) + \tau(x(t))]^{-1} \| \le \gamma < \infty, \tag{7}
$$

$$
q(t) = t - t_0 - \int_{t_0}^{t} p(s)\, ds \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} \infty, \tag{8}
$$

$$
\int_{t_0}^{\infty} e^{-q(s)}\, ds \le Q < \infty, \tag{9}
$$

где $p(t) = \| \tau(x(t)) [g'(x(t)) + \alpha'(x(t)) + \tau(x(t))]^{-1} \|$.

---

x/ $\mathcal{R}(F')$ обозначает множество регуляризаторов процесса /I4, стр.II3/, т.е. множество операторных функций $\tau(x) \in [S(x_0, \rho), R(\varphi)]$ таких, что для любого $x \in S(x_0, \rho)$: а) существуют ограниченные по норме операторы $[F'(x) + \tau(x)]^{-1}$; б) регуляризаторы $\tau(x)$ дифференцируемы по Фреше, и производные $\tau'(x)$ ограничены в окрестности x. В случаях, когда $F' = F'^{*}, F' \ge 0$, в качестве регуляризаторов процесса можно использовать операторы, для которых $\tau = \tau^{*}$ и $\tau > 0$. Множество таких операторов обозначаем через $\widehat{\mathcal{R}}(F')$.

4) для радиуса шара $S(x_0, \rho)$ выполнено неравенство $\rho \ge \rho_0 = \gamma Q \| F x_0 \|$.
Тогда: I) существует предел $x_\infty = \lim_{t \to \infty} x(t) \in S[x_0, \rho_0]$, являющийся решением уравнения (3) $(x_\infty \in \{\bar{x}\})$; 2) для всех $t > \bar{t}$, где $\bar{t} > t_0$ – такая достаточно большая постоянная, что $q(t) > 0$ при $t \ge \bar{t}$, невязка уравнения (2) убывает по закону

$$
\| F x(t) \| \le \| F x_0 \| e^{-q(t)} . \tag{I0}
$$

При доказательстве теоремы I используем следующее вспомогательное утверждение.

ЛЕММА. Пусть выполнено условие I) теоремы I. Тогда для решения задачи о невязке уравнения (2), рассматриваемой над траекторией $x(t), t \ge t_0$

$$
\begin{cases} \dfrac{d}{dt} F x(t) = - F'(x(t)) P x(t), & (\mathrm{II}) \\ F x(t_0) = F x_0, & (\mathrm{I2}) \end{cases}
$$

справедлива оценка (I0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ограниченное решение задачи Коши (II)-(I2) существует при всех $t \ge t_0$ и в силу теоремы 4.2 /I5, стр.I22/ для него выполняется неравенство

$$
\| F x(t) \| \le \| F x_0 \| e^{-(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{-(t-s)} p(s) \| F x(s) \| ds. \tag{I3}
$$

При помощи леммы 2.2 /I5, стр.I55/ из неравенства (I3) можно получить неравенство (I0).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы I. Из доказанной леммы и неравенств (7) и (9) следуют неравенства

$$\|x(t)-x_0\| \le \int_{t_0}^{t}\|x'(s)\|ds \le \gamma\|Fx_0\|\int_{t_0}^{t}e^{-q(s)}ds \le \le \gamma Q\|Fx_0\| \le \rho_0 . \qquad (14)$$

Конечность длины траектории $x(t)-x_0$ при $t\to\infty$ обеспечивает существование предела x_∞. Неравенства (I4) показывают также, что справедливо включение $x_\infty \in S[x_0,\rho_0]$.

Из соотношения (8) следует существование числа $\bar{t} > t_0$, для которого неравенство $q(t)>0$ справедливо при всех $\bar{t}>t_0$. Утверждение, что имеет место включение $x_\infty \in \{\bar{x}\}$, следует из оценки (I0), соотношения (8) и предположения (6).

2. Следующее утверждение является, в некотором смысле, более простым для применения по сравнению с теоремой I.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия I) и 2) теоремы I, а также условия: 3) вдоль траектории $x(t), t\ge t_0$ регуляризаторы α и $r(x)$, кроме соотношения (7), удовлетворяют неравенству

$$p(t) \le \frac{\mu t}{\mu t+\nu}, \qquad (15)$$

где $\nu>2\mu$, $\mu\ge 1$, $\nu\ge 2$ – некоторые целые постоянные;
4) для радиуса шара $S(x_0,\rho)$ выполнено неравенство $\rho>\rho_0 = \gamma\|Fx_0\|(\mu t_0+\nu)/(\nu-\mu)$.

Тогда справедливы утверждения I) и 2) теоремы I, где оценка (I0) убывания нормы невязки уравнения (2), заменена оценкой

$$\|Fx(t)\| \le \|Fx_0\|\left(\frac{\mu t_0+\nu}{\mu t+\nu}\right)^{\frac{\nu}{\mu}} \quad (t>t_0), \qquad (16)$$

а также имеет место утверждение: 3) для скорости процесса (4) - (5) в силе оценка

$$\|x(t)-x_\infty\| \le \rho_0\left(\frac{\mu t_0+\nu}{\mu t+\nu}\right)^{\frac{\nu}{\mu}-1} \quad (t>t_0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неравенства (I5) следует неравенство

$$t-t_0-\int_{t_0}^{t}\frac{\mu s\, ds}{\mu s+\nu} = \ln\left(\frac{\mu t+\nu}{\mu t_0+\nu}\right)^{\frac{\nu}{\mu}} \le q(t) \quad (t>t_0). \qquad (17)$$

Для интеграла в соотношении (9) имеем

$$\int_{t_0}^{\infty}e^{-q(s)}ds \le \frac{\mu t_0+\nu}{\nu-\mu}.$$

Из этого неравенства и из неравенства (I7) следует выполнимость соотношений (8) и (9) в предположениях теоремы I $(Q=(\mu t_0+\nu)/(\nu-\mu))$. Таким образом, утверждение доказуемой теоремы о том, что имеют место утверждения I) и 2) теоремы I (где оценка (I0) заменена оценкой (I6)), прямо следует из теоремы I.

Утверждение 3) вытекает из неравенств (I6) и (I7). Имеем:

$$\|x(t)-x_\infty\| \le \int_{t_0}^{\infty}\|x'(s)\|ds \le \gamma\|Fx_0\|\int_{t}^{\infty}e^{-q(s)}ds \le$$

$$\le \gamma\|Fx_0\|(\mu t_0+\nu)^{\frac{\nu}{\mu}}\int_{t}^{\infty}\frac{ds}{(\mu s+\nu)^{\frac{\nu}{\mu}}} = \rho_0\left(\frac{\mu t_0+\nu}{\mu t+\nu}\right)^{\frac{\nu}{\mu}-1} \quad (t>t_0).$$

3. Пусть $E_1=E_3$ и E_1, E_2 – гильбертовы пространства. В этом случае для решения преобразованного уравнения (3) с оператором усреднения $\varphi(x)=f'^{*}(x)$ можно воспользоваться непрерывными R -траекториями типа Гаусса-Ньютона/I4, стр.II5/. Получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -[f'^{*}(x)f'(x)+\alpha'(x)+\tau(x)]^{-1}[f'^{*}(x)(fx-\tilde{y})+\alpha x], \\ x(t_0)=x_0 \quad (t_0 \le t < \infty), \quad \tau(x) \in \widehat{\mathcal{R}}(f'^{*}f'). \end{cases} \tag{I8}$$

Для обоснования перехода от задачи (2) к задаче (3) с $\varphi(x)=f'^{*}(x)$ имеют место утверждения, аналогичные теоремам I и 2. При доказательстве этих утверждений используется теорема 4.5 /I4/ вместо теоремы 4.2 /I4/.

§3. Два характерных примера применения теорем I и 2

ПРИМЕР I. Для решения уравнения

$$\cos x + 1 = 0, \quad \frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3}{2}\pi, \tag{I9}$$

воспользуемся теоремой I.

В этом случае возможно применение R -процесса типа (4)-(5) непосредственно к исходной задаче (I9), т.е. без перехода к задачам типа (2) или (3) ($\varphi(x)=1$, $\alpha=0$).

Пусть в процессе (4)-(5) в качестве регуляризатора используется $\tau(x)=1-\sin x$, а для начала "времени" положено $t_0=1$. Имеем: $x(t)=\arccos\frac{1-t^2}{1+t^2}\ (t\ge 1)$, $x_\infty=\pi$, $\gamma=1$,

$$q(t)=\ln\frac{1+t^2}{2}\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\infty, \quad \int_1^\infty e^{-q(s)}ds=\frac{\pi}{2} \text{ и } \rho_0=\frac{\pi}{2}.$$

Оценка (I0) о невязке задачи превращается в равенство

$$\| \cos x + 1 \| = \frac{2}{1+t^2} \quad (t>1).$$

Этот пример показывает, что на основе R -процессов ньютоновского типа в принципе можно решать вырожденные нелинейные задачи без проведения регуляризации задачи $(\alpha=0)$. Из следующего примера, однако, станет видно, что эта возможность утрачивается в случае решения вырожденных линейных задач.

ПРИМЕР 2. Пусть $E_1=E_3$ и E_1, E_2 - гильбертовы пространства. Пусть $A: E_1 \to E_2$ - линейный ограниченный оператор, спектр которого пересекается с мнимой осью.

Вместо решения исходного уравнения

$$Ax=\bar{y} \quad (x\in E_1, \bar{y}\in R_A) \tag{20}$$

рассматриваем решение преобразованного уравнения типа (3)

$$Bx=z \quad , \text{где } B=A^*A, \ z=A^*\bar{y}. \tag{2I}$$

Решение уравнения (2I) приводит к нахождению A^* -усредненного решения исходного уравнения (2I).

Оператор B является ограниченным, самосопряженным и неотрицательно определенным ($B\ge 0$). В качестве минимального собственного значения оператор B имеет значение 0.

Очевидно, теоремы I и 2 непосредственно не применимы к исходному уравнению (20). В то же время существование глобальной кривой $x(t), t\ge t_0$ обеспечено для любого регуляризатора процесса со свойствами $\tau=\tau^*$, $\tau>0$, (т.е. $\tau\in\widehat{\mathcal{R}}(A^*A)$). С другой стороны, однако, при всех $t\ge t_0$ выполнено равенство $p(t)=1$, что не допускает выполнения соотношения (8) теоремы I.

Построение A^*, усредненного решения уравнения (20), возможно на основе проведения регуляризации задачи и применения RR -процесса типа (4)-(5). Действительно, вместо решения задачи (2I) рассмотрим решение ее асимптотически эквивалентной задачи

$$Bx+\frac{\alpha}{t}x=z \quad (1\le t<\infty), \tag{22}$$

где $\alpha\ge 2$ – некоторая целая постоянная.

Применяя к (22) процесс (4)-(5), получаем дифференциальную задачу

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-[B+(\frac{\alpha}{t}+\varepsilon)I_1]^{-1}[(B+\frac{\alpha}{t}I_1)x-z], & (23)\\ x(1)=x_0\in E_1 \quad (1\le t<\infty). & (24)\end{cases}$$

В уравнении (23) $\varepsilon\ge 1$ является целой постоянной, связанной с постоянной α неравенством $\alpha>2\varepsilon$.

Условия I) и 2) теоремы 2 для процесса (23)-(24) выполнены. Условие 3') тоже выполнено со знаком равенства в соотношении (I5) (здесь имеем $\mu=\varepsilon$ и $\nu=\alpha$). Таким образом, при решении уравнения (2I) в силе утверждения теоремы 2 с:

$$\rho_0=\|[B+\varepsilon I_1]^{-1}\|\|(B+\alpha I_1)x_0-z\|(\varepsilon+\alpha)/(\alpha-\varepsilon).$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. В работе /I4/ доказывается (теорема 5.I, стр.I44), что при более общих предположениях о параметрах и процесс (23)-(24) сходится к нормальному решению задачи (2I), независимо от начального приближения x_0.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В литературе по вычислительной математике часто указывается (см., например, работы /I6,стр.I24;I7,стр.7I/), что при переходе к задаче типа (22) (спектр оператора A предполагается непересекающим мнимую ось) число обусловленности

оператора B $(c(B))$ /I8, стр.I04/ существенно увеличивается по сравнению с числом обусловленности оператора A. Однако указанный недостаток легко устраняется путем регуляризации задачи. Проиллюстрируем это на примере. Пусть $A=A^*$, $A>0$. Минимальное и максимальное собственные значения оператора A обозначим соответственно через σ_m и σ_M. Вместо решения задачи (20) рассматриваем решение стационарно-регуляризованной задачи

$$(B+\alpha I_1)x=z, \quad \alpha=\mathrm{const}>0.$$

Очевидно, что для всех регуляризаторов α, для которых выполняется неравенство $\alpha>\sqrt{\sigma_m\sigma_M}$, в силе неравенство

$$\frac{(\sigma_M+\alpha)^2}{(\sigma_m+\alpha)^2}<\frac{\sigma_M}{\sigma_m},$$

представляющее не что иное как неравенство $c(B)<c(A)$ в терминах спектральной нормы операторов.

§4. Устойчивое построение псевдорешений уравнения (I)

I. Условие I) теоремы I можно заменить требованиями о глобальной интегрируемости задачи (4)-(5) (см., например, /I9/).

Отметим один из простейших подходов, применяемый при построении глобального решения задачи Коши (4)-(5).

Пусть в шаре $S(x_0,\rho)$ для оператора Px (правая часть уравнения (4)) выполнены условия

$$\| Px \| \le a + b \| x \|, \tag{25}$$

$$\| Px_1 - Px_2 \| \le c \| x_1 - x_2 \| \tag{26}$$

$$(x, x_1, x_2 \in S(x_0, \rho))$$

с некоторыми постоянными a, b, $c > 0$.

Функции $F(x)$ и $\tau(x)$ продолжаем на радиусах шара $S(x_0, \rho)$, так чтобы соотношения (25) и (26) оставались справедливыми во всем пространстве E_1 с теми же постоянными a, b и c. Тогда (см., например, /I5, стр.392/) задача Коши (4)-(5) обладает единственным глобальным решением $x(t), t \ge t_0$ для любого начального приближения $x_0 \in E_1$.

Подбирая подходящим образом регуляризатор процесса $\tau(x)$, можно добиться построения кривой $x(t; x_0, \tau), t \in [t_0, t_\tau]$ (где t_τ - достаточно большое число), не выходящей из наперед заданного шара $S(x_0, \rho)$.

Пусть построена некоторая дуга $x(t; x_0, \tau) \in S(x_0, \rho), t \in [t_0, t_\tau]$. Регуляризатор τ и число t_τ считаются уже зафиксированными.

Рассмотрим решения дифференциального уравнения (4) с разными начальными условиями

$$x(t_0) = \bar{x}_0 \in S(x_0, \bar{\rho}), \tag{5}$$

где $\bar{\rho} \in (0, \rho)$ - достаточно малое число.

Теперь, из непрерывной зависимости оператора Px от $x \in S(x_0, \rho)$ и единственности решения задачи Коши (4)-(5) $x(t; \bar{x}_0, \tau) \in S(x_0, \rho) (t \in [t_0, t_\tau])$ для любого $\bar{x}_0 \in S(x_0, \bar{\rho})$, следует непрерывность по $\bar{x}_0$ /20, стр.28/ отображения

$$\bar{x}_0 \to x(t_\tau; \bar{x}_0, \tau). \tag{27}$$

Пусть входные данные задачи заданы с искажениями, т.е. предполагаем, что вместо вектора $\bar{y}$ в задаче (I) применяется вектор $\tilde{y} = \bar{y} + \Delta y \in R_\ell$. Таким образом, приходим к рассмотрению задачи (2) с новым свободным вектором $\varphi(x)\bar{y} + \varphi(x)\Delta y$. Было бы естественным истолковать вектор $\Delta x_0 = -[F'(x_0) + \tau(x_0)]^{-1} \varphi(x_0)\Delta y$ как колебание начального условия (5) задачи Коши (4)-(5).

Пусть начальные искажения Δy настолько малы по норме, что вектор $\bar{x}_0 = x_0 + \Delta x_0$ всегда остается в шаре $S(x_0, \bar{\rho})$.

В описанных условиях из непрерывности по $\bar{x}_0$ отображения (27) следует непрерывная зависимость вектора $x(t_\tau; \bar{x}_0, \tau)$ от колебания входных данных задачи (I).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Вектор $x(t_\tau; \bar{x}_0, \tau)$ называется <u>t_τ-псевдорешением задачи (I)</u>.

2. Пусть исходная задача (I) поставлена корректно по Тихонову /9,8/. Если возможно решение задачи Коши (4)-(5) при $t_\tau \to \infty$, то построение кривой $x(t; x_0, \tau) \in S(x_0, \bar{\rho})$ $(t_0 \le t \le t_\tau)$ можно рассматривать как регуляризирующий алгоритм /4, стр.48/.

Важной особенностью RR-процессов типа (4)-(5) (или типа (I8)-(5)) является возможность их применения как для установления факта существования решений уравнения (2) (см. теоремы I и 2), так и для устойчивого построения приближений этих решений.

3. При численном исследовании на ЭВМ новых и неизученных нелинейных задач часто встречается ситуация, когда предварительно существование решения задачи не гарантировано (см., например, работы /22-24/ и др.). Обычно в таких случаях, вместе с

попытками численного решения задачи, вводятся исправления в саму математическую модель, на основе которой поставлена задача. С другой стороны, исследователь-вычислитель часто не имеет достаточно точного представления о возможном "множестве корректности задачи" /4, стр.54/. Еще необходимо отметить, что требование единственности решения не является естественным для нелинейных задач.

В указанной ситуации из вычислительной практики на ЭВМ правдоподобным является рассмотрение поведения некоторых траекторий (которые являются сами по себе методами решения задачи) в окрестностях точек фазового пространства, где наблюдается уменьшение нормы невязки задачи. Если задача (2) обладает решениями, то эти траектории вблизи решений проявляют характерные свойства. Так, например, для траекторий ньютоновского типа характерно сгущение около решения задачи, а также увеличение скорости сходимости вблизи решения. Последнее свойство исключительно важно для вычислительной практики на ЭВМ, оно выгодно выделяет траектории ньютоновского типа среди остальных классов возможных траекторий (градиентные траектории, траектории спуска и т.д.).

4. Пусть задача (I) не имеет решения в обыкновенном смысле слова. Тогда любое t_τ -псевдорешение $x(t_\tau; x_0, \tau)$, построенное на основе RR -процесса (4)-(5) (или процесса (I8)-(5)), будем понимать как псевдорешение вообще некорректно поставленной задачи (I) - некорректно поставленной по Адамару /7,8/ и некорректно поставленной по Тихонову /8,9/.

§5. Дискретные процессы ньютоновского типа для решения регуляризованных уравнений

I. В настоящем параграфе предполагаем E_1, E_2, E_3 конечномерными арифметическими пространствами, имеющими канонические базисы.

Сначала отметим, что путем численного интегрирования задач типа (4)-(5) возможно построение вычислительных процессов, сходящихся к усредненно-регуляризованным решениям уравнения (I).

При этом, если используется алгоритм (программа) интегрирования с автоматическим выбором шага и регуляризаторы процесса убывают по норме к нулю вместе с убыванием к нулю нормы невязки задачи (2), то можно добиться увеличения шага интегрирования вблизи решения до значения I.

При решении преобразованного уравнения (2) на ЭВМ большое значение для вычислительной практики имеют дискретные R -процессы ньютоновского типа. Среди них основное место занимает R -процесс типа Ньютона-Канторовича /I4,25/:

$$x_0,\ x_{k+1} = x_k - [F'(x_k) + \tau(x_k)]^{-1} F x_k,$$
$$x_k \in D_F,\ \tau(x) \in \mathcal{R}(F')\ (k = 0, 1, \dots). \tag{28}$$

Если выполнены некоторые типичные для ньютоновских методов достаточные условия (см. /25/), а также условие, наложенное на регуляризаторы процесса

$$\|\tau(x_k)\| \le \frac{1}{2}\left(\sqrt{\|F(x_k)\|^2 + N\|F x_k\|} - \|F'(x_k)\|\right), \tag{29}$$

где $N > 0$ – некоторая постоянная, то процесс (28) обладает квадратической скоростью приближения к решению (/25/, теорема 4).

Пусть $E_1 = E_3$ и пусть в D_f существует ограниченная вторая производная Фреше $f''(x)$.

В практической работе на ЭВМ часто используется следующее уравнение типа (2)

$$f'^{T}_{(x)}(fx-\bar{y}) + \alpha x = 0 . \qquad (30)$$

Решение уравнения (30) можно осуществить при помощи процесса (28). В этом случае имеем

$$F'(x) = f'^{T}_{(x)} f'(x) + f''(x)(fx-\bar{y}) + \alpha'(x) \qquad (31)$$

и $\qquad \tau(x) \in \hat{\mathcal{R}}(f'^{T} f')$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Пусть E_1 и E_2 – евклидовы пространства. Вектор $f'^{T}_{(x)}(fx-\bar{y})$ является градиентом локально выпуклого функционала $\frac{1}{2}\|fx-\bar{y}\|^2_{E_2}$. Пусть $S(\bar{x}_0, \bar{\rho}), \bar{\rho} > 0$ – окрестность некоторой точки $\bar{x}_0$ выпуклости этого функционала. Вторая производная указанного функционала $f'^{T}_{(x)} f'(x) + f''(x)(fx-\bar{y})$ является в $S(\bar{x}_0, \bar{\rho})$ самосопряженным и неотрицательно определенным оператором. В этом случае в окрестности $S(\bar{x}_0, \bar{\rho})$ в качестве регуляризаторов задачи естественно использовать самосопряженные положительно определенные операторы. В частности, возможно использование операторов вида

$$\alpha = \mu I_1 \;, \mu = const > 0 . \qquad (32)$$

R -процессы типа Гаусса-Ньютона(/26-31,14/ и др.)

Для решения уравнения (30) на ЭВМ чаще всего применяют итерационный процесс

$$x_0 \,,\; x_{k+1} = x_k - [f'^{T}_{(x_k)} f'(x_k) + \alpha(x_k) + \tau(x_k)]^{-1} [f'^{T}(x_k)(fx_k-\bar{y}) + \alpha x_k],$$
$$x_k \in D_f \,,\; \tau(x_k) \in \hat{\mathcal{R}}(f'^{T} f') \; (k = 0, 1, \ldots) . \qquad (33)$$

При $\alpha = 0$ R – процесс (33) ранее изучался в работах /25–29/ и др. Однако в этих работах процесс (33) не причисляется к процессам ньютоновского типа по причине отсутствия теоретических результатов по согласованию поведения регуляризаторов $\tau(x_k)$ при $k \to \infty$ с быстрой сходимостью около решения. До работы /30/ в литературе отсутствовали утверждения о сходимости и притяжении типа Л.В.Канторовича /21/, относящихся к процессам (33). Это относится также к случаю $\tau(x_k) = 0 (k = 0, 1, \ldots)$.

В работах /30,14/ доказывается, что при выполнении условий, типичных для ньютоновских процессов, а также выполнении в области D_f нового условия

$$\|(f'^{T}_{(x)} - f'^{T}_{(x^*)})(fx-\bar{y})\| \le Q\|f'^{T}_{(x)}(fx-\bar{y}) + \alpha x\| \qquad (34)$$
$$(\forall x, x^* \in D_f) ,$$

где $Q \in [0, 1)$ – постоянная, и задании регуляризаторов процесса – в виде

$$\tau(x_k) = \varepsilon_k I_1 , \qquad (35)$$

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\|f'^{T}_{(x_k)} f'(x_k)\|^2 + N\|f'^{T}_{(x_k)}(fx_k-\bar{y}) + \alpha x_k\|} - \|f'^{T}_{(x_k)} f'(x_k)\|\right), \qquad (36)$$

где $N > 0$ – постоянная, процессу (33) обеспечена квадратическая скорость сходимости вблизи решения, а уравнению (30) – существование решения.

Если условие (34) не выполнено, то процесс обладает только линейной скоростью сходимости вблизи решения (см. /I4, стр.87/).

R-процесс типа Гаусса-Ньютона с компенсированной регуляризацией /3I,I4/.

Рассматриваем итерационный процесс

$$x_0,\ x_{k+1} = x_k - \left[f'^T_{(x_k)} f'(x_k) + \alpha'(x_k) + \tau(x_k)\right]^{-1}\left(\varphi_c(x_k)(f x_k - \bar{y}) + \alpha x_k\right),$$

$$x_k \in D_f,\ \tau(x_k) \in \hat{R}(f'^T f')\ (k = 0, 1, \ldots), \tag{37}$$

где

$$\varphi_c(x_k) = \left(I_1 + \tau(x_k)\left[f'^T_{(x_k)} f'(x_k) + \alpha(x_k) + \tau(x_k)\right]^{-1}\right) f'^T_{(x_k)}. \tag{38}$$

В работе /I4/ (см. §3.4, стр.94) доказана сходимость процесса (37) к решению преобразованного уравнения

$$\varphi_c(x)(f x - \bar{y}) + \alpha x = 0. \tag{3.9}$$

Для процесса (37), как и для процесса (33), возможна квадратическая скорость приближения к решению задачи (3.9).

Относительно выбора регуляризаторов задачи остается в силе замечание 3. В частности, возможно использование регуляризаторов вида (32).

Член $\tau(x_k)\left[f'^T_{(x_k)} f(x_k) + \alpha(x_k) + \tau(x_k)\right]^{-1} f'^T_{(x_k)}$ в формуле (38) вводится для компенсации регуляризаторов при рассмотрении линейных шагов ньютоновского метода (/I4, стр.95/).

Очевидно, этот член "исчезает" вместе с уменьшением нормы невязки задачи (30) при $K \to \infty$, если в качестве регуляризаторов процесса используются регуляризаторы типа (35)-(36).

Процесс (37) обладает преимуществом при работе на ЭВМ перед процессом (33) в случаях решения задачи с плохо обусловленными операторами $f'^T_{(x_k)} f'(x_k) + \alpha(x_k)$ (см. /I4/, глава 8).

2. В работе /I4/ представлена единая теория сходимости и притяжения процессов типа (28), (33) и (37). При доказательстве основных утверждений (являющихся утверждениями типа Л.В.Канторовича /2I/) используется метод, разработанный Л.Коллатцем для обоснования "усиленного метода Ньютона" (/I8/, стр.30I).

В работе /I4/ (см. §I.3) приводится общая теория устойчивости R-процессов ньютоновского типа. В частности, из этих результатов следует, что необходимая устойчивость процессов (28), (33) и (37) обеспечивается регуляризаторами задачи и регуляризаторами процесса.

3. R-процессы (33) и (37) использованы как основа для разработки составного алгоритма подпрограммы REGN /3I,I4/, созданной для решения широкого класса нелинейных систем уравнений типа (30) и (39). В качестве главного вида регуляризаторов процесса программа REGN реализует регуляризаторы (35)-(36). (В формуле (36) используется равномерная норма $\|\cdot\|_\infty$ с весами).

На основе программы REGN разработаны две специализированные подпрограммы: SILC /32,I4/ и COMPIL /33,I4/.

Подпрограмма SILC предназначена для устойчивого построения A^T-усредненно-регуляризованных решений линейных систем с прямоугольными матрицами A . Программа успешно применяется в случаях плохой обусловленности или вырожденности матрицы $A^T A$.

В подпрограмме COMPIL реализовано несколько композиционных алгоритмов для решения нелинейных систем уравнений. Основным из этих алгоритмов является последовательная реализация " R -процесса с наилучшей поправкой" /31,14/ и авторегуляризованного процесса типа (33) или (37) с авторегуляризаторами (35)-(36).

При реализации подпрограмм REGN ,SILC и COMPIL широко используется принцип умолчания. На этой основе достигнуто упрощенное управление подпрограмм SILC и COMPIL , которое делает их доступными рядовому пользователю ЭВМ.

Пакет подпрограмм „REGN" (содержит REGN ,SILC , COMPIL и ряд других вспомогательных подпрограмм) написан на Фортране и непосредственно применяется на следующих ЭВМ: БЭСМ-6 (оснащенный мониторной системой "Дубна"), CDC-6600, IBM-360, IBM-370 и ЕС-ЭВМ.

В работе /14/ приводится полное описание алгоритмов и способов использования пакета подпрограмм „REGN" . Приведены также полные тексты подпрограмм, входящих в пакет „REGN" (см. главы 6-8).

Литература

1. А.Н.Тихонов. Докл. АН СССР, 1964, 156, №6, 1296-1299.
2. А.Н.Тихонов. Докл. АН СССР, 1965, 161, №5, 1023-1026.
3. А.Н.Тихонов. В.Б.Гласко. Ж. вычисл.мат. и мат.физ., 1965, 5, №3, 463-473.
4. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач, "Наука", М., 1974.
5. В.Б.Гласко, Г.В.Гущин, В.И.Старостенко. Ж. вычисл.мат. и мат. физ., 1976, 16, №2, 283-292.

6. Г.В.Гущин, Л.Г.Гущина. Ж. вычисл. мат. и мат.физ., 1976, 16, №4, 932-942.
7. S.Hadamar. Le probleme de Cauchy et les equations aux derivées partielles lineores hyperboliques,Paris,Hermann,1932.
8. М.М.Лаврентьев. О некоторых некорректных задачах математической физики, Новосибирск, 1962.
9. А.Н.Тихонов. Докл. АН СССР, 1943, 39, №5, 195-198.
10. В.А.Морозов. Методы решения неустойчивых задач, М., Издательство МГУ, 1967.
11. А.В.Гончарский, А.С.Леонов, А.Г.Ягола. Докл. АН СССР, 1974, 214, №3, 499-501.
12. В.А.Винокуров, А.К.Шатов. Ж. вычисл. мат. и мат. физ.,1974, 14, №6, 1386-1392.
13. Л.Александров. Препринт ОИЯИ, Р5-8178, Дубна, 1974.
14. Л.Александров. Регуляризованные вычислительные процессы ньютоновского типа и их применение на ЭВМ для решения нелинейных систем уравнений. ОИЯИ,Дубна, Б1-5-9969, 1976.
15. Ю.Л.Далецкий, М.П.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве . М.,"Наука", 1970.
16. Г.И.Марчук. Методы вычислительной математики . Новосибирск, "Наука", 1973.
17. Р.Варга. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. М., "Мир", 1974.
18. Л.Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. М., "Мир", 1969.
19. М.А.Красносельский, С.Г.Крейн. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах , Труды семинара по функц. анализу, т.2.Воронеж.1956.
20. Л.Шварц. Анализ (т.2), М., "Мир", 1972.

21. Л.В.Канторович. Труды мат. института им. В.А.Стеклова. 1949, том XXVIII, 104-144.

22. Л.Александров, Т.Ангелеску, Ф.Никитиу, И.В.Фаломкин, Ю.А.Щербаков. Препринт ОИЯИ, Р1-8328, Дубна, 1974.

23. Л.Александров, В.А.Загребнов, Ж.А.Козлов, В.А.Парфенов, В.Б.Приезжев. Ж. эксперимент. и теор. физ., 1975, т.68, №5, стр. 1825-1833.

24. L.Aleksandrov, S.Sht.Mavrodiev. Preprint JINR, E2-9936, Dubna, 1976.

25. Л.Александров. Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1971, 11, №1, 36-43.

26. K.Levenberg. Quart.Appl.Math., 1944, 2, 164-168.

27. D.Marquardt. SIAM J.Appl.Math., 1963, 11, 431-441.

28. Y.Bard. SIAM J.Numer.Anal., v.7, No.1, 1970, 157-186.

29. Дж.Ортега, В.Рейнболт. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М., "Мир", 1975.

30. Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-5515, Дубна, 1970.

31. Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, Р5-7259, Дубна, 1973.

32. Л.Александров. ОИЯИ, Библиотека программ,F-421,Дубна, 1973.

33. Л.Александров. ОИЯИ, Дубна, Библиотека программ,С-401, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 января 1977 года.