

C17r
A-465

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

1468/2-77



25/4-77

P5 - 10365

Л.Александров

УСТОЙЧИВОЕ ПОСТРОЕНИЕ
НОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
ВЫРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1977

P5 - 10365

Л.Александров

УСТОЙЧИВОЕ ПОСТРОЕНИЕ
НОРМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ
ВЫРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Общество с ограниченной ответственностью
"Ядерные исследования"
БИБЛИОТЕКА

Александров Л.

P5 - 10365

Устойчивое построение нормального решения вырожденных линейных систем алгебраических уравнений

Рассматривается вопрос об устойчивом построении нормального решения вырожденных линейных систем алгебраических уравнений в условиях сгущения характеристических чисел около нуля. Приводится численное сравнение различных регуляризованных итерационных процессов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1977

Aleksandrov L.

P5 - 10365

Stable Construction of the Normal Solution of Degenerated Linear Systems of Algebraic Equations

One considers the problem about stable construction of the normal solution of degenerated linear systems of algebraic equations in the case, when their characteristic numbers are suppressed to the zero. One gives a numerical comparison of different regularized iteration processes.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automatization, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1977

© 1977 Объединенный институт ядерных исследований Дубна

§1. Непрерывный, дважды регуляризованный процесс для решения линейной вырожденной задачи

Пусть E - n -мерное вещественное координатное евклидово пространство. Пусть A - некоторый оператор (матрица), ограниченный, симметрический и неотрицательно определенный, который преобразует E в E .

Рассматриваем решения векторного уравнения

$$Ax = y \quad (1)$$

относительно $x \in E$, где $y \in AE$.

Если матрица A несимметрична или симметрична, но отрицательно определена, то вместо уравнения (1) будем рассматривать эквивалентное уравнение

$$A^T A x = A^T y, \quad (2)$$

где A^T - транспонированная матрица A . Отметим, что при решении переопределенных или недоопределенных линейных систем (1) ($A: E \rightarrow E_1$, где E_1 - вещественное координатное пространство другой размерности) в смысле наименьших квадратов, для получения уравнения типа (2) снова используется оператор A^T (см., например, [1]). Излагаемые ниже результаты также будут относиться к этим уравнениям.

В дальнейшем будем предполагать, что матрица A (а в случае уравнения (2) матрица $A^T A$) имеет нулевые собственные значения или собственные значения, близкие к нулю.

Пусть P - оператор проектирования на ядро оператора A и пусть через x_{\perp} обозначено то решение уравнения (I), для которого в силе равенство $Px_{\perp} = 0$. Полная совокупность всех решений уравнения (I) записывается в виде

$$x^* = Pu + x_{\perp}, \text{ где } u \in E. \quad (3)$$

Нормальное решение x_{\perp} всегда существует, единственно и имеет минимальную норму.

Приближенные методы построения решения x_{\perp} приобретают в последнее время практическое значение для вычислительной математики.

Кроме разработанных прямых методов регуляризации (/2,3/ и др.) при построении приближений для решения x_{\perp} применяются регуляризованные итерационные процессы (/4,5/ и др.).

Так, например, для решения уравнения (I) в работе /4/ используется итерационный процесс

$$x_0, x_{k+1} = x_k - (A + \epsilon I)^{-1} (Ax_k - y), \quad (4) \\ (k = 0, 1, \dots),$$

где $\epsilon > 0$ - постоянный параметр регуляризации.

На основе теоремы М.А.Красносельского (/6/, теорема I) показывается /4/, что в зависимости от начального приближения

x_0 процесс (4) сходится к одному из решений уравнения (I), а именно к решению $Px_0 + x_{\perp}$. В частности, для построения решения x_{\perp} необходимо выполнение условия

$$Px_0 = 0. \quad (5)$$

Кроме зависимости от начального приближения для процессов типа (4) характерен и другой недостаток. В случаях, когда матрица A имеет относительно малые, но отличные от нуля собственные значения, методы типа (4) неустойчивы вопреки регуляризации процесса как по отношению к входным данным задачи, так и к ошибкам округления вычислительного процесса. Отметим, что такие матрицы получаются при численном решении непрерывных уравнений с операторами, для которых нуль является точкой сгущения спектра.

Однако оказывается возможным построение R -процессов другого класса ("дважды-регуляризованные итерационные процессы"), получающихся в результате применения обыкновенных R -процессов к регуляризованной задаче. Такие процессы сходятся к нормальному решению x_{\perp} устойчиво и независимо от начального приближения.

Пусть уравнение (I) решается при помощи непрерывного R -процесса ньютоновского типа /6,7/ (процесс (2)-(3) из /7/). Очевидно, этот процесс содержит в себе непрерывный аналог метода (4). В рассматриваемом теперь случае спектральный радиус оператора $\epsilon(A + \epsilon I)^{-1}$ равен 1 для всех $t \geq t_0$. Отсюда следует, что вся траектория непрерывного процесса

$$\frac{dx}{dt} = -(A + \epsilon I)^{-1} (Ax - y), \quad x(t_0) = x_0 \quad (t_0 \leq t < \infty) \quad (6)$$

является "вырожденным куском" (/7/ стр. 16) и общая теорема 3 /7/ (обеспечивающая сходимость метода (2)-(3) из /7/ в нелинейном случае) неприменима к уравнению (I) с вырожденной матрицей A .

Рассматривая задачу (I) с точки зрения метода (6), можно заключить, что линейному оператору A "не хватает" некоторой зависимости от t , выводящей траекторию приближения из состояния вы-

рожденного куска для любого $t \geq t_0$. Однако такую зависимость в линейном случае можно ввести искусственно.

Пусть метод непрерывных траекторий приближения применяется не к первоначально заданному уравнению (I), а к его асимптотически эквивалентному уравнению

$$\left(A + \frac{d}{t+\delta} I\right) x = y, \quad (7)$$

где $d > 0$ и $\delta \geq 0$ - некоторые постоянные по всему процессу.

Присутствие члена $\frac{d}{t+\delta}$ в уравнении (7) можно рассматривать как регуляризацию /2/ первоначально заданной задачи (I).

Получается следующая дифференциальная задача (дважды регуляризованный непрерывный процесс):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\left(A + \left(\frac{d}{t+\delta} + \varepsilon\right) I\right)^{-1} \left[A + \frac{d}{t+\delta} I\right] x - y, \\ x(t_0) &= x_0 \quad (0 \leq t_0 \leq t < \infty). \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$(9)$$

Эта задача при любом $x_0 \in E$ однозначно интегрируема на всем интервале $[t_0, \infty)$, так как в силу соотношения

$$\sup_{t_0 \leq t < \infty} \left\| \left(A + \left(\frac{d}{t+\delta} + \varepsilon\right) I\right)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{\mu_n(A) + \varepsilon} < \infty,$$

где μ_n означает минимальное собственное значение оператора A .

Пусть $U(t,s)$ ($t, s \in [t_0, \infty)$) обозначает эволюционный оператор решения задачи (8)-(9). Этот оператор определяется равенствами (см., например, /8/, стр. 147):

$$\frac{d}{dt} U(t,s) = -\left[A + \left(\frac{d}{t+\delta} + \varepsilon\right) I\right]^{-1} \left[A + \frac{d}{t+\delta} I\right] U(t,s), \quad U(s,s) = I. \quad (10)$$

При помощи оператора $U(t,s)$ решение задачи (8)-(9) записывается в виде

$$x(t) = U(t, t_0) x_0 + \int_{t_0}^t U(t,s) \left[A + \left(\frac{d}{s+\delta} + \varepsilon\right) I\right]^{-1} ds y. \quad (11)$$

§2. Сходимость дважды-регуляризованного непрерывного процесса

Для обоснования процесса (8)-(9) сделаем переход к координатному рассмотрению его решения $x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$).

Пусть S - ортогональная матрица, преобразующая матрицу A в диагональную

$$\bar{A} = S^T A S = \text{diag} [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n], \quad (12)$$

причем спектральное множество матрицы A имеет следующий порядок: $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_r > \mu_{r+1} = \dots = \mu_n = 0$, где r - некоторое число из множества $\{2, 3, \dots, n\}$.

Преобразование (12) осуществляет переход в пространстве E к новому ортогональному базису, в котором x и y имеют представления \bar{x} и \bar{y} , где $x = S \bar{x}$ и $y = S \bar{y}$.

Из предположения о разрешимости системы (I) следует разрешимость преобразованной системы

$$\bar{A} \bar{x} = \bar{y}, \quad (13)$$

а это означает выполнение равенств

$$\bar{y}_{r+1} = \bar{y}_{r+2} = \dots = \bar{y}_n = 0. \quad (14)$$

Теперь рассмотрим процесс (8)-(9) в новом базисе. Из определяющих равенств (10) следует, что эволюционный оператор $U(t,s)$ имеет диагональный вид и в новом базисе:

$$\bar{U}(t,s) = \text{diag} [\bar{u}_1(t,s), \dots, \bar{u}_n(t,s)],$$

где

$$\bar{u}_i(t,s) = \left(\frac{(\mu_i + \epsilon)(s+\delta) + \alpha}{(\mu_i + \epsilon)(t+\delta) + \alpha} \right)^{\frac{\epsilon \alpha}{(\mu_i + \epsilon)^2}} e^{-(1 - \frac{\epsilon}{\mu_i + \epsilon})(t-s)} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (I5)$$

Используя (II) и (I4) для преобразованного решения задачи (8)-(9), находим

$$\bar{x}_i(t) = \bar{u}_i(t, t_0) \bar{x}_{0i} + \int_{t_0}^t \frac{\bar{u}_i(t,s)(s+\delta) ds}{(\mu_i + \epsilon)(s+\delta) + \alpha} \bar{y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (I6)$$

Относительно сходимости процесса (8)-(9) имеет место следующая теорема:

Траектория $x(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) дважды регуляризованного процесса (8)-(9) сходится к нормальному решению x_1 уравнения (I), независимо от начального приближения x_0 .

Доказательство.

Из формул (I5)-(I6) следует, что координатные траектории $\bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), соответствующие нулевым собственным значениям, имеют вид

$$\bar{x}_i(t) = \left(\frac{\epsilon(t+\delta) + \alpha}{\epsilon(t_0 + \delta) + \alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \bar{x}_{0i} + \left[\frac{\epsilon(t+\delta) + \alpha}{\epsilon + \alpha} - \frac{\epsilon(t_0 + \delta) - 1}{\epsilon + \alpha} \left(\frac{\epsilon(t+\delta) + \alpha}{\epsilon(t_0 + \delta) + \alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\epsilon}} \right] \bar{y}_i \quad (i = 1, 2, \dots, n; t_0 \leq t < \infty). \quad (I7)$$

Принимая во внимание условия (I4) о разрешимости преобразованной системы (I3), находим из формул (I7) предельные соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i(t) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (I8)$$

С другой стороны, как легко можно установить при помощи правила Лопиталья, в силе предельные соотношения

$$\frac{\int_{t_0}^t [(\mu_i + \epsilon)(s+\delta) + \alpha]^{\frac{\epsilon \alpha}{(\mu_i + \epsilon)^2} - 1} e^{(1 - \frac{\epsilon}{\mu_i + \epsilon})s} (s+\delta) ds}{[(\mu_i + \epsilon)(t+\delta) + \alpha]^{\frac{\epsilon \alpha}{(\mu_i + \epsilon)^2}} e^{(1 - \frac{\epsilon}{\mu_i + \epsilon})t}} \rightarrow \frac{1}{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (I9)$$

Используя пределы (I9), из формул (I5) находим, что в силе соотношения

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}_i(t) = \frac{\bar{y}_i}{\mu_i} \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (20)$$

Из найденных соотношений (I8) и (20) заключаем, что предел преобразованной траектории $\bar{x}(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) существует и имеет вид

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{x}(t) = \left[\frac{\bar{y}_1}{\mu_1}, \frac{\bar{y}_2}{\mu_2}, \dots, \frac{\bar{y}_r}{\mu_r}, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-r} \right]^T = \bar{y}e_1.$$

Очевидно, что предел \bar{x}_1 не зависит от начального приближения x_0 .

Для завершения доказательства теоремы остается только отметить, что при обратном переходе к первоначальному базису имеет место преобразование $x_1 = S \bar{x}_1$.

Замечание 1. Доказанная теорема без труда переносится на случай, когда E - бесконечномерное гильбертово пространство.

Замечание 2. Построение нормального решения задачи (I) при помощи R -процессов типа (8)-(9) с более быстро убывающими регуляризаторами задачи, чем $\frac{1}{t}$, невозможно. В этом можно убедиться из рассмотрения процесса

$$\frac{dx}{dt} = -[A + \frac{\alpha}{t^\nu + \delta} + \epsilon]I - [(A + \frac{\alpha}{t^\nu + \delta}I)x - y], \quad x(t_0) = x_0,$$

при $\nu \geq 2$.

Действительно, если $\nu = 2$, то элементы оператора $U(t, s)$ в пространстве \bar{E} выражаются как

$$\bar{u}_i(t, s) = \exp\left\{-\left[1 - \frac{\epsilon}{\mu_i + \epsilon}\right](t - t_0) + \epsilon \alpha \mu_i \left(\arctg \frac{t}{\mu_i} - \arctg \frac{t_0}{\mu_i}\right)\right\},$$

где $\mu_i = \sqrt{\frac{\alpha + \delta(\mu_i + \epsilon)}{\mu_i + \epsilon}}$.

Так как при $t \rightarrow \infty$ $\arctg \frac{t}{\mu_i} \leq \frac{\pi}{2}$, рассмотрение координат решения $\bar{x}_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n; t_0 \leq t < \infty$) приводит к $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}_i(t, t_0) \bar{x}_{0i} \neq 0$. Аналогично, при $\nu \geq 3$ указанный предел тоже отличен от нуля.

§3. Сравнение дискретных R -процессов для решения вырожденных линейных систем на основе численных примеров

Численное сравнение будем проводить на основе специально построенного множества вырожденных линейных систем. Характерным для этого множества задач является имитация (на конечномерных задачах) явления сгущения спектра к нулю, имеющего место при некоторых линейных непрерывных операторах.

Относительно вектора $x = [x_1, \dots, x_4]^T$ рассматриваем линейную систему уравнений

$$A(\mu_2, \mu_3)x = y(\mu_2, \mu_3), \tag{21}$$

где для матрицы A имеем

$$A(\mu_2, \mu_3) = \begin{bmatrix} 1 + \mu_2 & \mu_2 & 0 & \mu_2 \\ \mu_2 & \mu_2 + \mu_3 & \mu_3 & \mu_2 \\ 0 & \mu_3 & \mu_3 & 0 \\ \mu_2 & \mu_2 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix},$$

а для свободного вектора y имеем

$$y(\mu_2, \mu_3) = [1 + 3\mu_2, 3\mu_2 + 2\mu_3, 2\mu_3, 3\mu_3]^T.$$

Матрица A имеет собственные значения $\mu_1 = 1$, $\mu_2 \in \mu_2$, $\mu_3 \in \mu_3$ и $\mu_4 = 0$. Таким образом, система уравнений (21) является заведомо вырожденной.

Замечание 3. При диагонализации матрицы $A (\bar{A} = S^T A S, \bar{A} = \text{diag}[1, \mu_2, \mu_3, 0])$ используется ортогональная матрица

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассматривая систему (2I) для всех пар $(\mu_2, \mu_3) \in (0, 1] \times (0, 1]$, получаем упомянутое множество линейных задач, для которого ненулевая часть спектра $\{\mu_2, \mu_3\}$ может имитировать сгущение к нулю. Это множество линейных систем будем в дальнейшем обозначать через $[\mu_2, \mu_3]$.

Таким образом, в множестве задач $[\mu_2, \mu_3], (\mu_2, \mu_3) \in (0, 1] \times (0, 1]$ содержатся задачи, которые кроме вырожденности обладают в разной степени "дополнительной плохой обусловленностью" в зависимости от приближения μ_2 и μ_3 к нулю.

Все задачи из множества $[\mu_2, \mu_3]$ имеют одно и то же бесконечное множество решений

$$x^* = \{x_1^* = 1, x_2^* = 2 - \alpha, x_3^* = \alpha, x_4^* = \alpha / -\infty < \alpha < \infty\}$$

(которое не зависит от параметров μ_2 и μ_3 !).

Таким образом, все задачи из $[\mu_2, \mu_3]$ имеют одно и то же нормальное решение

$$x_{\perp} = [1, 1.(3), 0.(6), 0.(6)]^T.$$

Однако, как убедимся ниже, с вычислительной точки зрения, отдельные представители множества $[\mu_2, \mu_3]$ являются весьма разными задачами.

Для решения задач из множества $[\mu_2, \mu_3]$ будем использовать следующие итерационные процессы:

авторегуляризованный процесс типа Гаусса-Ньютона /9, 10/

$$R_{\epsilon_k}(x_0, \epsilon_0): x_{k+1} = x_k - (A^T A + \epsilon_k I)^{-1} A^T (A x_k - y) \quad (k = 0, 1, \dots), \text{ где}$$

"авторегуляризатор" ϵ_k определяется по формуле, данной в /9, 10/

$$\epsilon_k = \frac{1}{2} \left[\|A^T A\|_{\infty}^2 + 4M \|A^T (A x_k - y)\|_{\infty} \right]^{\frac{1}{2}} - \|A^T A\|_{\infty}, \quad (22)$$

$$N = \epsilon_0 (\epsilon_0 + \|A^T A\|_{\infty}) / \|A^T (A x_0 - y)\|_{\infty};$$

стационарно регуляризованный процесс (4), который будем обозначать как $R_{\epsilon}(x_0, \epsilon)$;

дважды регуляризованный процесс типа Гаусса-Ньютона

$$R_{\epsilon + \frac{\delta}{k+1}}(x_0, \epsilon, \delta): x_{k+1} = x_k - [A^T + \frac{\delta}{k+1} I + \epsilon I]^{-1} [(A^T + \frac{\delta}{k+1} I) x_k - A^T y] \quad (k = 0, 1, \dots).$$

Замечание 4. Пусть непрерывный процесс (8)-(9) применяется для решения преобразованной задачи (2). Тогда итерационный процесс $R_{\epsilon + \frac{\delta}{k+1}}$ получается из процесса (8)-(9) ($t_0 = 1, \delta = 1$) при помощи простейшей дискретизации с единичным шагом (производная $\frac{dx}{dt}$ заменяется на разность $x_{k+1} - x_k$).

На практике рассматривалось решение задач из множества $\mathcal{D} = [\mu_2, \mu_3]$, где $(\mu_2, \mu_3) \in \{(\frac{m}{m}, \frac{m}{m}) / m = 1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, 0.00001, 0.000001\}$.

Применялись следующие авторегуляризованные процессы:

$$R_{\epsilon_k}(0, 2^r), R_{\epsilon_k}(0, \frac{\tau}{10}), R_{\epsilon_k}(0, \frac{\tau}{100}) \text{ и } R_{\epsilon_k}(0, \frac{\tau}{1000}), \text{ где } \tau = \|A^T A\|_{\infty}$$

Результаты применения процесса $R_{\epsilon_k}(0, 2^r)$ при решении задач из подмножества \mathcal{D}_0 , получаемого из \mathcal{D} для $m = 1, 0.01, 0.0001, 0.000001$, представлены в таблице I. При решении задач

из \mathcal{D} на основе процессов $R_{\epsilon_k}(0, \frac{\epsilon}{10})$, $R_{\epsilon_k}(0, \frac{\epsilon}{100})$ и $R_{\epsilon_k}(0, \frac{\epsilon}{1000})$ наблюдалось ухудшение необходимого приближения нормального решения с уменьшением начального значения ϵ_0 . Это происходило в тех частях \mathcal{D} , которые соответствуют минимальным (но различным!) значениям параметров μ_2 и μ_3 . Так, например, для задач $[I, 0.000001]$ и $[0.000001, I]$ процесс $R_{\epsilon_k}(0, \frac{\epsilon}{1000})$ "ошибался" уже в первых знаках компонент решения x_1 .

При решении задач из множества \mathcal{D} на основе авторегуляризованного процесса R_{ϵ_k} выявилось его важное свойство, состоящее в том, что этим методом можно относительно хорошо охватить все части множества (см. таблицу I). Отметим в этой связи, что такая гибкость применяемого метода желательна при автоматизации решения "потоков линейных задач", в частности, получаемых при декомпозиции больших линейных и нелинейных алгебраических систем.

Для решения задач из множества \mathcal{D} применялись стационарно-регуляризованные процессы ^{5,6/} R_{ϵ} , где параметр регуляризации принимал значения $\epsilon = 10^{-p}$, $p=0,1,\dots,8$. Оказывается, что процессами $R_{\epsilon}(0, \epsilon)$ невозможно удовлетворительно охватить все части множества \mathcal{D} . При больших значениях регуляризатора ϵ хорошо решаются только задачи с μ_2 и μ_3 , близкими к I, а задачи с относительно малыми значениями μ_2 или μ_3 решаются плохо. Так, например, при решении задач $[1, 10^{-2}]$, $[1, 10^{-3}]$ и т.д. на основе процесса $R_{\epsilon}(0, 1)$ не находится ни одного верного знака ни у одной из компонент нормального решения. При уменьшении значения стационарного регуляризатора ϵ проявляется обратное явление.

Таблица I

$\mu_3 =$	$\mu_2 = I$				$\mu_2 = 0.01$				$\mu_2 = 0.0001$				$\mu_2 = 0.000001$				
	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	
$10^{-3} = 1$	24	0	19.00000	52	0.1887379	E-I4	I00	0.3307439	E-I0	I00	0.4381915	E-7	I00	0.4381915	E-7	I4.00000	
	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	
	0	19.00000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000
	0.3333333	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666
$10^{-3} = 0.01$	72	0.4884381	E-I4	57	0.5511115	E-I5	I00	0.1018600	E-I0	I00	0.5148026	E-7	I00	0.5148026	E-7	I.040900	
	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	
	0.4060900	I.0000000	I.3333333	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000
	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666
$10^{-3} = 0.0001$	I00	0.4313737	E-I3	I00	0.1154623	E-I0	I00	0.1740594	E-II	I00	0.4654539	E-7	I00	0.4654539	E-7	I.000400	
	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	
	4.000600	I.0000000	I.3333334	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000
	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666	0.6666666
$10^{-3} = 0.000001$	I00	0.5109672	E-7	I00	0.5163212	E-7	I00	0.4650489	E-07	I00	0.6896595	E-8	I00	0.6896595	E-8	I.000004	
	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	K^*	M,D	μ_1	μ_2	
	4.000006	I.0000000	I.3166223	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000	I.0000000
	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376	0.6833376

$\tau = \|A^T A\|_{\infty}$, $M,D = \|A^T(x_k^* - y)\|_{\infty}$, K^* - номер итерации, на котором прерывается процесс.

Указанные явления иллюстрируются таблицей 2, где приведены результаты применения процессов $R_{\epsilon}(0, 10^{-3})$ и $R_{\epsilon}(0, 10^{-8})$ в решении задач $[1, 1], [1, 10^{-2}], [1, 10^{-4}]$ и $[1, 10^{-6}]$.

В таблице 3 приведены результаты решения указанных задач из таблицы 2 на основе процессов $R_{\epsilon}(\bar{x}_0, \epsilon)$ и $R_{\epsilon+\frac{\alpha}{k+1}}(\bar{x}_0; \epsilon, \alpha)$, где $\bar{x}_0 = [0.9, 1.3, 0, 0.6]^T$, $\epsilon = 10^{-8}$ и $\alpha = 5 \cdot 10^{-8}$. Начальное приближение \bar{x}_0 таково, что для него условие (5) не выполняется и стационарно регуляризованный процесс $R_{\epsilon}(\bar{x}_0, 10^{-8})$ сходится не к нормальному решению x_{\perp} , а к решению $x^* = [1, 1.9(6), 0.4(3), 0.4(3)]^T$ (см. первую колонку таблицы 3). В то же самое время сказывается, что итерационные процессы $R_{\epsilon+\frac{\alpha}{k+1}}$ обладают свойством своего непрерывного аналога (8)-(9) и сходятся к нормальному решению x_{\perp} , независимо от начального приближения x_0 . Это иллюстрируется процессом $R_{\epsilon+\frac{\alpha}{k+1}}(x_0; 10^{-8}, 5 \cdot 10^{-8})$, представленным во второй колонке таблицы 3.

Замечание 5. Все вычислительные процессы, описанные выше, осуществлены на СДС-6500 при помощи стандартной подпрограммы **SILLC** /II, стр. 270/, которая разработана для общего случая решения преобразованного уравнения (2). Напомним, что собственными значениями матрицы $A^T A$ являются числа $1, \mu_2^2, \mu_3^2, 0$. Этим, а также точностью округления ЭВМ объясняется невозможность решения задач $[\mu_2, \mu_3]$ при относительно малых μ_2 и μ_3 (см. конец таблиц 1, 2 и 3).

Решение задач из множества Ω показывает, что процесс со стационарной регуляризацией R_{ϵ} сходится относительно медленно по сравнению с авторегуляризованным процессом $R_{\epsilon k}$. Нередки случаи, когда число необходимых итераций превосходит 1000.

Таблица 2

	$x_{01} = x_{02} = x_{03} = x_{04} = 0$	
	Метод R_{ϵ} $\epsilon = 0.001$	Метод R_{ϵ} $\epsilon = 0.00000001$
$\mu_2 = 1$	k^* 7	II
	M 0	0
	C 19032	I 900000000
$\mu_3 = 1$	x_1 I. 000000000	I. 000000000
	x_2 I. 333333333	I. 333327076
	x_3 0.666666667	0.6666730245
	x_4 0.666666667	0.6666730245
$\mu_2 = 1$	k^* 176	II
	M 0	0
	C 14080	I 402001000
$\mu_3 = 1$	x_1 I. 000000000	I. 000000000
	x_2 I. 333333333	I. 33331426
	x_3 0.666666667	0.666685740
	x_4 0.666666667	0.666685740
$\mu_2 = 1$	k^* 500	35
	M 0	0
	C 14014	I 400042000
$\mu_3 = 1$	x_1 0.999505506	I. 000000000
	x_2 I. 003802745	I. 33334030
	x_3 0.007505582	0.666659701
	x_4 0.9962661465	0.666659701
$\mu_2 = 1$	k^* 500	500
	M 0	0
	C 14015	I 40002000
$\mu_3 = 1$	x_1 0.999995000	0.999995532
	x_2 I. 00001125	I. 035459973
	x_3 0.12499995	0.0070928078
	x_4 0.9999998750	0.9645409206

Таблица 3

	$x_{01} = 0.9, x_{02} = 1.3, x_{03} = 0, x_{04} = 0.6$		
	Метод R_{ϵ} $\epsilon = 0.00000001$	Метод $R_{\epsilon+\frac{\alpha}{k+1}}$ $\epsilon = 0.1 \text{ E-}6; \alpha = 0.5 \text{ E-}7$	Метод $R_{\epsilon+\frac{\alpha}{k+1}}$ $\epsilon = 0.1 \text{ E-}6; \alpha = 0.5 \text{ E-}7$
$\mu_2 = 1$	22	I 00	I 0
	0	0.1666933 E-9	0.1666848 E-8
	I 900000000	I 819150000	I 315320000
$\mu_3 = 1$	I. 000000000	0.999999999	0.999999999
	I. 566666190	I. 33333332	I. 33305053
	0.4333338102	0.666666673	0.66694946
	0.43333338102	0.666666674	0.66654946
$\mu_2 = 1$	I 2	I 00	I 0
	0	I 342342000	0.2216662 E-7
	I 402001000		970638800
$\mu_3 = 1$	I. 000000000	0.999999988	0.999999988
	I. 566666468	I. 3333260	I. 33341595
	0.433333320	0.666665179	0.666561882
	0.4333333320	0.666667418	0.666584269
$\mu_2 = 1$	334	I 00	I 0
	0	0.2183163 E-05	0.1870504 E-4
	I 400042000	I 345537000	I 029364000
$\mu_3 = 1$	I. 000000000	0.999999908	0.999990647
	I. 566666706	I. 32602848	I. 26841249
	0.4333332938	0.652139887	0.544536098
	0.4333332938	0.673973701	0.731605211
$\mu_2 = 1$	500	I	I
	0	0.6672047 E-6	0.7663976 E-6
	I 400002000	I 398038000	I 397984000
$\mu_3 = 1$	0.999997096	0.99999666	0.99999918
	I. 373051317	I. 33269525	I. 23348741
	0.046102779	0.9996554 E-4	0.11500872 E-3
	0.6269452640	0.667305326	0.766513323

$$C = \|A^T A + (\epsilon I + \frac{\alpha}{k+1} A^T A + \frac{\alpha}{k+1} A A^T + \epsilon I)\|^{-1/2}$$

В то же время, для авторегуляризованного процесса $R_{\epsilon k}$ обеспечена квадратическая скорость сходимости около решения /10/.

По причине присутствия стационарного регуляризатора ϵ в дважды регуляризованном процессе $R_{\epsilon + \frac{\epsilon}{k+1}}$ он, так же как и процесс R_{ϵ} , проявляет медленную сходимость. Более эффективным для вычислительной практики может оказаться процесс $R_{\epsilon_k + \frac{\epsilon}{k+1}}$, полученный из процесса $R_{\epsilon + \frac{\epsilon}{k+1}}$, в котором стационарный регуляризатор ϵ заменен на авторегуляризатор ϵ_k , определенный по формуле (22).

Замечание 6. Процесс $R_{\epsilon + \frac{\epsilon}{k+1}}$ можно использовать для решения некорректных линейных задач. В этом случае достаточно только нескольких итераций, так как точность искомого нормального решения необходимо согласовать с неточностью применяемых входных данных, вследствие чего она оказывается практически невысокой. Так, например, 10 итераций процесса $R_{\epsilon + \frac{\epsilon}{k+1}}$ обеспечивают нахождение нормального решения задач $[1, 1]$ и $[1, 0.01]$ с точностью не меньше 3 верных знаков (см. третью колонку таблицы 3). В случае решения задачи $[1, 0.0001]$ процессом $R_{\epsilon + \frac{\epsilon}{k+1}}$, который прерывается на 10-й, 100-й и 500-й итерациях, нормальные решения находятся с ошибками (по компонентам), соответственно, 20%, 1,5% и 0,15%. Этот результат нельзя расценивать как пессимистический, так как речь идет о решении вырожденной задачи типа (2), которая обладает еще и "дополнительной вырожденностью" (имеем: $\mu_1^2 = \mu_2^2 = 1$, $\mu_3^2 = 0.000001$ и $\mu_4 = 0$). Таким образом, дважды регуляризованные процессы типа $R_{\epsilon + \frac{\epsilon}{k+1}}$ вполне способны конкурировать с прямыми методами решения некорректных линейных задач (2, 3/ и др.).

Литература

1. Д.К.Фаддеев, В.Н.Фаддеева. К вопросу о решении линейных алгебраических систем. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, том 14, №3, стр.539-557.
2. А.Н.Тихонов. Об устойчивости алгоритмов для решения вырожденных систем линейных алгебраических уравнений. Ж. вычисл. мат. и матем. физ., 1965, том 5, №4, стр.718-722.
3. В.И.Гордонова, В.А.Морозов. Численные алгоритмы выбора параметра в методе регуляризации. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1973, том 13, №3, стр.57.
4. М.А.Красносельский. О решении методом последовательных приближений уравнений с самосопряженными операторами. Успехи матем. наук, 1960, том 25, выпуск 3 (93), стр.161-165.
5. B.Martinet. Regularization d'inequations variationnelles par approximations successives, Rev. franc. inform. rech. operat., 1970, No.3, pp.154-158.
6. А.В.Крянев. Итерационный метод решения некорректных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1974, том 14, №1, стр.26-33.
7. Л.Александров. Регуляризованные траектории приближения ньютоновского типа для решения нелинейных уравнений. Препринт ОИАИ, Р5-8178, Дубна, 1974.
8. Ю.Л.Долецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М., Физматгиз, 1970.
9. Л.Александров. Регуляризованные вычислительные процессы Ньютона-Канторовича. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1971, том 11, стр.1.

- Ю. Л. Александров. Авторегуляризованные итерационные процессы типа Ньютона-Канторовича . Сообщение СИНТИ Р-5515, Дубна, 1970.
- И. Л. Александров. Регуляризованные вычислительные процессы ньютоновского типа и их применение на ЭВМ для решения нелинейных систем уравнений . СИНТИ, ИИ-5-9969, Дубна, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 января 1977 года.