

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



P5 - 10292

С.И.Сердюкова

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

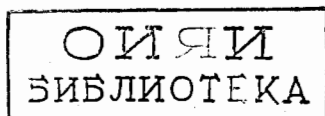
1976

P5 - 10292

С.И.Сердюкова

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ОДНОЙ РАЗНОСТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

Направлено в "Журнал вычислительной математики
и математической физики"



Сердюкова С.И.

P5 - 10292

Об асимптотической устойчивости одной разностной
краевой задачи

Исследуется асимптотическая устойчивость разностного аналога
краевой задачи:

$$u_t = u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u^{(k)}(0, t) = u^{(\ell)}(1, t) = 0.$$

Получены точные по порядку оценки степеней оператора перехода
от слоя к слою $\|G^n\|$ при $t \rightarrow \infty$. Порядок роста $\|G^n\|$ зависит от соотношений четности между k и ℓ .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники
и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Serdyukova S.I.

P5 - 10292

On Asymptotic Stability of One Initial
Boundary Value Problem

There is investigated the asymptotic stability of
difference analogue of one initial boundary value problem:

$$u_t = u_{xx}, \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$
$$u(x, 0) = f(x), \quad u^{(k)}(0, t) = u^{(\ell)}(1, t) = 0.$$

Exact in order estimates of powers of operator of
transition from one layer to another are obtained. The
rate of growth depends on relation of evenness between
 k and ℓ .

The investigation has been performed at the
Laboratory of Computing Techniques and Automatizations.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

Рассматривается разностный аналог краевой задачи:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(x, 0) = f(x), & u_x^{(k)}(0, t) = u_x^{(\ell)}(1, t) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Без ограничения общности можно считать, что $k \geq \ell$. Область интегрирования покрыта сеткой с шагами τ, h ; τ - шаг по t , h - шаг по x . Во внутренних узлах сетки используется явная разностная аппроксимация:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad n \geq 0, \quad 1 \leq j \leq N-1. \quad (2)$$

На границе счет ведется по формулам:

$$u_0^n = \sum_{j=1}^k C_{jk} u_j^n, \quad u_N^n = \sum_{j=1}^{\ell} C_{j\ell} u_{N-j}^n. \quad (3)$$

C_{jk} - коэффициенты k -ой разделенной разности:

$$(1-t)^k = \sum_{j=0}^k C_{jk} t^j.$$

Исследуется устойчивость в L_2 . Обозначим через \mathcal{H} гильбертово пространство векторов $u = (u_0, \dots, u_N)$, удовлетворяющих краевым условиям (3). Норма в \mathcal{H} дается соотношением:

$\|u\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} |u_j|^2$. Разностная краевая задача с двумя границами устойчива, если существует положительная постоянная c , не зависящая от n, N , такая, что неравенство $\|u^n\| \leq c \|u^0\|$ справедливо для всех $n \geq 0, N \geq 0$ и всех начальных данных из \mathcal{H} . Обозначим через G оператор перехода от слоя к слою. Устойчивость эквивалентна равномерной по n ограниченности $\|G^n\|, n \geq 0$. Комплексное число z_0 назовем точкой спектра оператора G , если существует $u^0 \in \mathcal{H}, \|u^0\| \neq 0$, такой, что $G u^0 = z_0 u^0$. Для устойчивости краевой задачи с двумя границами необходимо, чтобы спектр G лежал в единичном круге и чтобы были устойчивы соответствующие задачи Коши и полубесконечные краевые задачи. Задача Коши устойчива в L_2 при $\lambda = \frac{\pi}{k_2} \leq \frac{1}{2}$. При $\lambda < \frac{1}{2}$ характеристическая функция задачи Коши имеет единственную определяющую точку $\varphi = 0$. При $\lambda = \frac{1}{2}$ есть две определяющие точки, $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Это не вносит никаких принципиальных трудностей, но приводит к более громоздким выкладкам. Ограничимся рассмотрением $\lambda < \frac{1}{2}$. Начнем с обсуждения устойчивости полубесконечных краевых задач.

Рассмотрим, например, левую краевую задачу. Чтобы оценить скорость роста $\|G^n\|$ при $n \rightarrow \infty$, построим резольвенту. Для этого решаем систему обыкновенных разностных уравнений с параметром $z: (G-zI)v = f; v, f \in \mathcal{H}, f$ - заданная, v - искомая последовательности. Используя явный вид G , перепишем резольвентное уравнение в таком виде:

$$v_{j+1} = -\frac{1-2\lambda-z}{\lambda} v_j - v_{j-1} + \frac{1}{\lambda} f_j.$$

После замены $y_j^* = (v_j, v_{j-1})$ получаем одношаговую формулу:

$$y_{j+1} = M(z) y_j + g_j,$$

где

$$M(z) = \begin{pmatrix} -\frac{1-2\lambda-z}{\lambda} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad g_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} f_j \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения резольвентной матрицы $M(z)$ имеют вид:

$$x_{1,2} = -\frac{1-2\lambda-z}{2\lambda} \pm \sqrt{\left(1 - \frac{1-z}{2\lambda}\right)^2 - 1}.$$

При $|z| \geq 1, z \neq 1, \lambda < \frac{1}{2}$ $|x_1| < 1, |x_2| < 1$, резольвентная матрица M диагонализуема:

$$T M T^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

При $z=1$ M недиагонализуема. $z=1$ является точкой ветвления x_1, x_2 . Положим далее $z = e^{i\varphi}$. Функции $x_1(\varphi), x_2(\varphi)$ определены на плоскости с разрезом, как показано на рис. I:

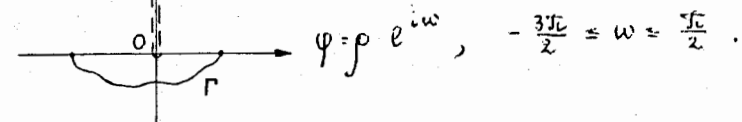


Рис. I

$$x_1 = \exp\{-e^{i\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\varphi} + o(\varphi)\}, \quad x_2 = \exp\{e^{i\frac{\varphi}{2}} \sqrt{\varphi} + o(\varphi)\}.$$

В окрестности $\varphi = 0$ резольвентная матрица приводится к треугольному виду:

$$T M T^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 0 & x_2 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

При $|z| \geq 1$, $|x_1| \leq 1$, $|x_2| \geq 1$. После замены $w_j = T y_j$, система $y_{j+1} = M y_j + g_j$ переходит в систему, которая решается в явном виде. При $|z| \geq 1$, $z \neq 1$, резольвента имеет такую структуру

($x = x_1$):

$$w_j^I = \sum_{j=1}^{j-1} x^{j-1} (T g_j)^I + x^{j-1} w_1^I, \quad j \geq 2;$$

$$w_j^II = - \sum_{j=j}^{\infty} x^{j-j+1} (T g_j)^II, \quad j \geq 1;$$

$$K_1 w_1^I = K_2 w_1^II + \sum_{j=1}^k B_j^I (T g_j)^I + B_j^II (T g_j)^II,$$

$$K_1 = (1-x)^k, \quad K_2 = -(1-x^{-1})^k.$$

Так как $x_1 \neq 1$ при $|z| \geq 1$, $z \neq 1$, $K_1 \neq 0$. Тем самым доказано, что левая краевая задача не имеет точек спектра вне единичного круга, грубой неустойчивости экспоненциального типа нет. На единичной окружности дополнительному исследованию подлежит определяющая точка $z = 1$. В окрестности $z = 1$ резольвента имеет более сложную структуру:

$$w_j^I = \sum_{j=1}^{j-1} (x^{j-1} (T g_j)^I - x^{j-1} \frac{1-x^{-j}}{x^2-1}) - \sum_{j=1}^{\infty} x^{j-1} \frac{x^{-2}-x^{-2j}}{1-x^{-2}} (T g_j)^II +$$

$$+ x^{j-1} w_1^I, \quad j \geq 2; \quad w_j^II = - \sum_{j=j}^{\infty} x^{j-j+1} (T g_j)^II, \quad j \geq 1;$$

$$K_1 w_1^I = K_2 w_1^II + \sum_{j=1}^k B_j^I (T g_j)^I + B_j^II (T g_j)^II.$$

Здесь

$$K_1 = (1-x_1)^k, \quad K_2 = \frac{(1-x_2)^k - (1-x_1)^k}{x_1 - x_2}.$$

$K_1(z)$ вырождается при $z = 1$; $z = 1$ является обобщенной точкой спектра [2]. Из структуры резольвенты следует, что исследование устойчивости сводится к оценке таких интегралов:

$$J_j^n = \int_{\Gamma} \varphi^{-\frac{k}{2}} x_1^j(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi, \quad j \geq 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Контур Γ представлен на рис. 1. После замены $x_1 = \exp\{-e^{i\frac{\pi}{4}} t\}$ получаем:

$$J_j^n = \int_{\Gamma} t^{-k+1} \exp\{-e^{i\frac{\pi}{4}} t + in(t^2 + o(t^2))\} \rho(t) dt, \quad \rho(0) \neq 0.$$

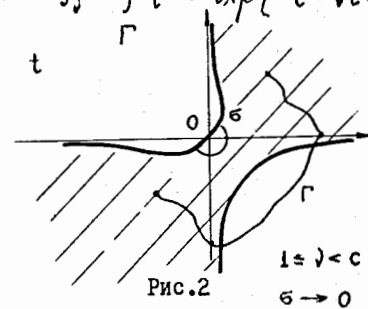


Рис. 2 $1 < j < c\sqrt{n}$
 $\sigma \rightarrow 0$

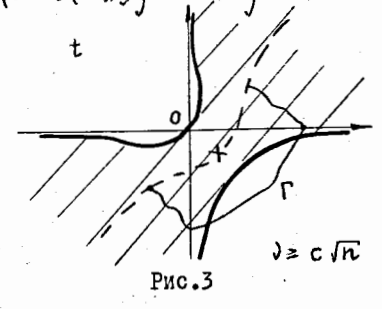


Рис. 3 $j \geq c\sqrt{n}$

При нечетных k интегрированием по частям избавляемся от особенностей под знаком интеграла. При этом для $j < c n^{\frac{1}{2}}$ внеинтегральные члены есть $O(e^{-b_j})$. Далее контур Γ перетягиваем в прямую $t = x \cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$, $-\infty < x < +\infty$:

$$J_j^n = n^{\frac{k-2}{2}} \rho(0) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt + O(e^{-b_j} + \frac{j}{\sqrt{n}}) \right). \quad (4)$$

При четных k главный член асимптотики определяется полувывчетом $t^k e^{it^2}$ относительно $t = 0$:

$$J_j^n = n^{\frac{k-2}{2}} \rho(0) \cdot \left(\pm i + O(e^{-b_j} + \frac{j}{\sqrt{n}}) \right). \quad (5)$$

При $\nu \geq cn^{\frac{1}{2}}$ контур Γ деформируется в линию наискорейшего спуска, как показано на рис.3; звездочкой отмечена точка перевала. Справедливо неравенство

$$|y_j^*| < e^{-\frac{\nu^2}{n}} \left(\frac{n}{\nu}\right)^{\frac{\nu-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{n}} < cn^{\frac{\nu-1}{2}} \nu^{-1} \quad (6)$$

Из (4)-(6) суммированием по j получаем такую оценку:

$$\|G^*\| \times \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} |y_j^*|^2} \times n^{\frac{\nu-1}{2}} \sqrt{n}.$$

Таким образом, если порядок производной в граничном условии ниже порядка производной в основном уравнении, то соответствующая полубесконечная разностная краевая задача устойчива. В противном случае имеет место степенная неустойчивость. При этом порядок неустойчивости пропорционален порядку производной в краевом условии.

Переходим к обсуждению краевой задачи с двумя границами. При исследовании явлений неустойчивости, связанных с взаимодействием левых и правых краевых условий, следует рассмотреть определяющие точки и точки вырождения краевых матриц. В данном случае это множество состоит из одной точки $z=1$. В окрестности $z=1$ резольвента краевой задачи с двумя границами имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} w_j^I &= \sum_{j=1}^{j-1} x^{j-1} (Tg_j)^I - x^{j-1} \frac{x^2 - x^{2j-2}}{1-x^2} (Tg_j)^I - \\ &- \sum_{j=1}^{N-1} x^{j-1} \frac{x^2 - x^{2j}}{1-x^2} (Tg_j)^I + x^{j-1} w_1^I + \\ &+ x^{N+j-1} \frac{x^2 - x^{2j}}{1-x^2} w_N^I, \end{aligned}$$

здесь $x = x_1$, $2 \leq j \leq N$.

$$w_j^I = - \sum_{j=1}^{N-1} x^{j-1} (Tg_j)^I + x^{N-j} w_N^I, \quad 1 \leq j \leq N-1;$$

$$K_1 w_1^I - K_2 w_N^I = -K_2 \sum_{j=1}^{N-1} x^j (Tg_j)^I + \sum_{j=1}^k B_j^I (Tg_j)^I + B_j^I (Tg_j)^I;$$

$$-K_3 x^{N-1} w_1^I + \left(K_2 - \frac{x^{2N-2} - x}{x^2 - 1} K_3\right) w_N^I = \sum_{j=1}^l \mathcal{A}_j^I (Tg_{Nj})^I + \mathcal{A}_j^I (Tg_{Nj})^I +$$

$$+ K_3 \left(\sum_{j=1}^{N-1} x^{N-j-1} (Tg_j)^I - \frac{x^{N-j} - x^{N-j}}{x^2 - 1} (Tg_j)^I \right).$$

Разрешив два последних соотношения относительно w_1^I и w_N^I , получим:

$$\begin{aligned} w_N^I &= (-1)^{k+1} x^{-l+2} \frac{x-x^{-1}}{x^{2N-k-l} - (-1)^{k+2}} \left\{ K_1^{-1} x^{N-1} \sum_{j=1}^k B_j^I (Tg_j)^I + \right. \\ &+ B_j^I (Tg_j)^I + K_3^{-1} \sum_{j=1}^l \mathcal{A}_j^I (Tg_{Nj})^I + \mathcal{A}_j^I (Tg_{Nj})^I \left. \right\}, \end{aligned}$$

$$w_1^I = K_1^{-1} K_2 x^{N-1} w_N^I + K_1^{-1} \sum_{j=1}^k B_j^I (Tg_j)^I + B_j^I (Tg_j)^I +$$

$$- K_1^{-1} K_2 \sum_{j=1}^{N-1} x^j (Tg_j)^I; \quad K_1 = (1-x)^k,$$

$$K_1^{-1} K_2 = \frac{(-x_2)^k - 1}{x_1 - x_2}, \quad K_3 = -x_1 (1-x_2)^l, \quad K_3^{-1} K_2 = \frac{(-x_1)^{l-2} - 1}{x_1 - x_2}.$$

Из соображений симметрии без ограничения общности можно считать, что $k \geq l$. Подставим полученные выражения w_1^I, w_N^I в приведенные выше w_j^I, w_j^I . Из структуры резольвенты следует, что для краевой задачи с двумя границами исследование устойчивости сводится к оценке таких интегралов:

$$J_j^n = \int_{\Gamma} (1-x)^{-k} \frac{x^{2N-l-l+1} (-1)^l x^{j-1}}{x^{2N-k-l} - (-1)^{k+l}} e^{i\eta\varphi} d\varphi,$$

$$K_j^n = \int_{\Gamma} (1-x)^{-k} \frac{x-x^{-1}}{x^{2N-k-l} - (-1)^{k+l}} e^{i\eta\varphi} d\varphi.$$

Построим асимптотику этих интегралов при $n \gg N^2$. Заметим, что при $n < lN$ задача с двумя границами имеет тот же порядок неустойчивости, что и левая краевая задача ($k \geq l$). При $n \gg N^2$ асимптотика J_j^n, K_j^n устроена по-разному в зависимости от соотношения четности k и l . Заметим далее, что при $n \gg N^2$ соотношение $j > cn^{\frac{1}{2}}$ справедливо для всех $j: 1 \leq j \leq N$. Исходный контур интегрирования Γ деформируем в γ , как показано на рис.4:

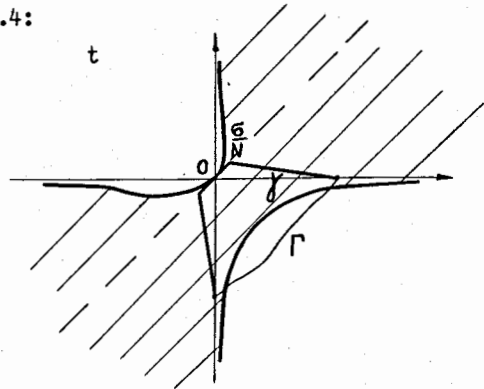


Рис.4

Интегралы по соединяющим отрезкам являются величинами порядка $O(e^{-\eta} + e^{-\frac{k\eta}{N^2}})$. Далее, интегрируя по частям, понижаем порядок особенности до I. После этого либо под знаком интеграла нет особенности, либо остается полюс первого порядка. В первом случае главный член асимптотики дается интегралом по отрезку $[-\frac{\epsilon}{N} e^{i\frac{\pi}{2}}, \frac{\epsilon}{N} e^{i\frac{\pi}{2}}]$. ϵ выбирается столь малым, чтобы уравнение $x^{2N-k-l} = 1$ имело на рассматриваемом отрезке единственное решение $t=0$. Во втором случае главный член асимптотики дается полувыветом относительно $t=0$. Не вдаваясь в дальнейшие детали доказательства, приведем полученные результаты. Если k четное и l четное, то главный член асимптотики J_j^n дается полувыветом относительно $t=0$:

$$J_j^n = 2^k \cdot \pi i \cdot \frac{N-j+1-\frac{l}{2}}{N-\frac{k}{2}-\frac{l}{2}} n^{\frac{k-1}{2}} (1+O(\epsilon)), \quad \epsilon = \frac{N}{\sqrt{n}}.$$

Главный член асимптотики K_j^n также дается полувыветом относительно $t=0$ и есть величина порядка $O(n^{\frac{k-1}{2}} N^{-1})$. Отсюда получаем такую оценку:

$$\|G^n\| \approx n^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{N}.$$

В остальных случаях ситуация аналогичная в том смысле, что порядок неустойчивости определяется J_j^n , для которого главный член асимптотики определяется полувыветом относительно $t=0$.

k четное, l четное

$$J_j^n = 2^k \cdot \pi i \cdot \frac{N-j+1-\frac{l}{2}}{N-\frac{k}{2}-\frac{l}{2}} n^{\frac{k-1}{2}} (1+O(\epsilon)), \quad \|G^n\| \approx n^{\frac{k-1}{2}} \sqrt{N}.$$

к четное, l нечетное

$$J_0^{\sim} = 2^k \cdot \text{ш.и.} \cdot n^{\frac{k-l}{2}} (1 + o(\varepsilon)), \quad \|G^{\sim}\| \approx n^{\frac{k-l}{2}} \cdot \sqrt{N}.$$

к нечетное, l четное

$$J_0^{\sim} = 2^k \cdot \text{ш.и.} \cdot (N - \nu + 1 - \frac{l}{2}) n^{\frac{k-l}{2}} (1 + o(\varepsilon)), \quad \|G^{\sim}\| \approx n^{\frac{k-l}{2}} \cdot N^{\frac{1}{2}}.$$

к нечетное, l нечетное

$$J_0^{\sim} = 2^k \cdot \text{ш.и.} \cdot \frac{1}{N - \frac{k}{2} - \frac{l}{2}} n^{\frac{k-l}{2}} (1 + o(\varepsilon)), \quad \|G^{\sim}\| \approx n^{\frac{k-l}{2}} \cdot \sqrt{\frac{n}{N}}.$$

Тем самым получены точные по порядку оценки асимптотической неустойчивости краевой задачи с двумя границами. Исследование устойчивости сводится к построению асимптотик интегралов с тремя параметрами: ν , N , n . Порядок неустойчивости пропорционален максимальному порядку производных в краевых условиях. Вид главного члена асимптотики зависит от соотношения четности порядков производных в левом и правом граничных условиях.

Для дифференциальных уравнений устойчивость краевых задач с производными порядка, превышающего порядок уравнения, исследовалась А.Н.Тихоновым. [2,3]

Приношу глубокую благодарность академику Андрею Николаевичу Тихонову за постановку задачи и профессору Николаю Сергеевичу Бахвалову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. H.O.Kreiss. Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. I. Math. of Comp., 22, 104 (1968), 703-714.
2. А.Н.Тихонов. Об одной краевой задаче, содержащей производные порядка, превышающего порядок уравнения, УМН, т.1, вып.3-4 (13-14), 1946, 199-201.
3. А.Н.Тихонов. О краевых условиях, содержащих производные порядка, превышающего порядок уравнения, Мат.сб., т.26 (68), № 1, 1950, 35-56.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1976 года.