СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р5 - 10288

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

О НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССАХ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕННОГО РЕШЕНИЯ

1976

Р5 - 10288

Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский

О НЕПРЕРЫВНЫХ ПРОЦЕССАХ НЬЮТОНОВСКОГО ТИПА В СЛУЧАЕ ВЫРОЖДЕННОГО РЕШЕНИЯ

Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. P5 - 10288

О непрерывных процессах ньютоновского типа в случае вырожденного решения

В работе рассматриваются непрерывные процессы Ньютона и наискорейшего спуска в случае вырожденного решения. Даны некоторые оценки скорости сходимости. Для случая, когда производная Фреше нелинейного оператора плохо обусловлена, даются некоторые оценки скорости сходимости регуляризованных процессов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Zhidkov E.P., Khoromsky B.N. P5 - 10288

On Continuous Analogue of the Newton Type in the Degenerate Case

We consider in this paper the continuous analogue of Newton's method and steepest decent in the degenerate case. There are obtained some estimates of the rate of convergency. Some estimates of the rate of convergency of the regularized processes are given for the case of ill-posed Freshe derivative of nonlineare operator.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу о приближенном решении уравнения

$$P(x) = 0 \,, \tag{1}$$

где нелинейный оператор $P(x)$ отображает комплексное B-пространство X в X. Обозначим через $P'(x)$ производную Фреше оператора $P(x)$. В работе /1/ рассматривались условия локальной сходимости итерационных процессов типа Ньютона и их непрерывных аналогов на основе теории асимптотической устойчивости решений дифференциальных уравнений в B-пространстве. При этом предполагалось, что

$$\| P'(x)^{-1} \| \le L < \infty \tag{2}$$

в некоторой окрестности корня. Это условие гарантирует невырожденность решения.

В настоящей работе исследуются непрерывные процессы решения уравнения (1) в случае нарушения условия (2) и в случае плохой обусловленности оператора $P'(x)$. Рассматриваются следующие процессы: непрерывный аналог метода Ньютона

$$\dot{x}(t) = -P'(x)^{-1} P(x) \,, \quad x(0) = x_0 \,, \tag{3}$$

метод установления

$$\dot{x}(t) = -P(x) \quad , \quad x(0) = x_0. \tag{4}$$

Для случая,когда P отображает гильбертово пространство H в H, рассматривается процесс Гаусса-Ньютона

$$\dot{x}(t) = -(P'(x)P'(x)^*)^{-1} P'(x)^* P(x) \ , \quad x(0) = x_0. \tag{5}$$

(здесь $P'(x)^*$ – оператор, сопряженный к $P'(x)$) и метод наискорейшего спуска

$$\dot{x}(t) = -P'(x)^* P(x) \quad , \quad x(0) = x_0. \tag{6}$$

Рассматриваются также регуляризованные процессы

$$\dot{x}(t) = -(P'(x) + w(x)E)^{-1} P(x) \ , \quad x(0) = x_0 \ , \tag{7}$$

$$\dot{x}(t) = -(P'(x)P'(x)^* + wE)^{-1} P'(x)^* P(x) \ , \quad x(0) = x_0. \tag{8}$$

Здесь w – положительное число, а E – тождественный оператор в X .

Условимся обозначать решение уравнений (3)-(8) с начальным условием $X|_{t=0} = X_0$ через $x(t, x_0)$ и для краткости - через $x(t)$.

Известно, что при условии (2) все траектории процесса (3) локально сходятся к решению. Если при этом $\|P'(x)\| \le M$, то сходятся и траектории процесса (6). В работе показано, что при условии осуществимости (3) и (6) траектории этих процессов сходятся и в случаях, когда оператор $P'(x)$ не имеет обратного в точке x^*, являющейся решением уравнения (I), либо обратный оператор не ограничен в ней. Даны некоторые оценки для скорости сходимости процесса (3).

В случае, когда константа L велика, вместо (3), (5) можно использовать (7),(8). Оценивается интервал изменения параметра w , в котором скорости сходимости процессов (7),(8) не меньше,чем процессов (4),(6) соответственно.

Отметим, что непрерывные процессы в случае нарушения условия (2) рассматривались, например, в /2/. В /3/ исследовались процессы типа (7),(8).

§ I. Случай вырожденного решения

Предположим, что в некоторой области $D \subset X$ существует единственное решение x^* уравнения (I), а оператор $P(x)$ имеет производную Фреше в D и имеет ограниченную в окрестности каждой точки вторую производную Гато $P''(x)$. Это условие гарантирует осуществимость процесса Ньютона и будет предполагаться в теоремах I-3. Рассмотрим в области D процесс Ньютона (3). Покажем, что если оператор $P'(x)$ обратим в некоторой окрестности x^* и вырождается в самом решении, то, тем не менее, траектории (3) локально сходятся к решению. Обозначим $S_{x_0,r} = \{ x \in X \ : \ \|x - x_0\| < r \}$.

Теорема I. Пусть для всякого $\varepsilon > 0$ существует число $B(\varepsilon) > 0$, такое, что при $\|x - x^*\| \ge \varepsilon$ выполнено $\|P'(x)^{-1}\| \le B(\varepsilon)$, $(x \in D)$.

Тогда существует окрестность решения, из которой все траектории (3) сходятся к x^* .

Доказательство. Докажем сначала, что для всякого, достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\inf\limits_{\|x - x^*\| = \varepsilon} \|P(x)\| > 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ таково, что $S_{x^*, 2\varepsilon} \subset D$. Предположим, что для последовательности $\{x_n\}$, такой,что $\|x^* - x_n\| = \varepsilon$, $\lim\limits_{n\to\infty} \|P(x_n)\| = 0$. Поскольку $\|P'(x)^{-1}\| \le B(\frac{\varepsilon}{2})$ при $\|x - x^*\| \ge \frac{\varepsilon}{2}$, то существует x_n , такое,что $\|P(x_n)\| B(\frac{\varepsilon}{2}) \le \frac{\varepsilon}{2}$. Но поскольку шар $S_{x_n, \frac{\varepsilon}{2}} \subset D$, то из известной теоремы о локальной сходимости процесса Ньютона следует, что в $S_{x_n, \frac{\varepsilon}{2}}$ существует корень уравнения (I), что противоречит условию. Обозначим $m(\varepsilon) = \inf\limits_{\|x - x^*\| = \varepsilon} \|P(x)\|$. Пусть $\varepsilon_0 > 0$. Так как оператор $P(x)$ непрерывен, то найдется ε_1, $\varepsilon_0 > \varepsilon_1 > 0$, такое, что $m(\varepsilon_1) < m(\varepsilon)$. Если $\|x_0 - x^*\| \le \varepsilon_1$, то $x(t, x_0)$ не пересечет сферы $\|x^* - x\| = \varepsilon_0$, так как $P(x(t,x_0)) = P(x_0)e^{-t}$. Но тогда решение $x(t,x_0)$ продолжимо до всякого конечного t, а значит, и до $t = \infty$ по условию теоремы. Далее, для всякого $\delta > 0$ найдется $T(\delta) > 0$, такое, что при $t \geqslant T(\delta)$ будет выполнено неравенство $\|x(t,x_0) - x^*\| < \delta$. Достаточно взять $\|P(x_0)\| e^{-T} < m(\delta)$, тогда выполнено $\|x(T,x_0) - x^*\| < \delta$, так как в противном случает множество $\Omega = \{x : \delta \le \|x - x^*\| \le \varepsilon_0\}$ содержало бы корень уравнения (I). Действительно, поскольку траектория $x(t,x_0)$ при $t \geqslant T$ не пересечет сферы $\|x - x^*\| = \delta$, то, оставаясь в Ω, она должна сойтись к корню уравнения (I), так как при $x \in \Omega$ $\|P'(x)^{-1}\| \le B(\delta)$. Поэтому $\|x(t,x_0) - x^*\| < \delta$, $t \geqslant T(\delta)$. Теорема доказана.

Отметим, что случаю вырождения оператора $P'(x^*)$ соответствует равенство $\lim_{\varepsilon \to 0} B(\varepsilon) = \infty$.

Заметим также, что если $X = R^n$, то есть в случае системы n нелинейных скалярных уравнений, условия теоремы выполнены, когда матрица $P'(x^*)$ необратима, однако $P'(x)^{-1}$ существует в каждой точке x некоторой окрестности $S_{x^*,r}$. Это следует из компактности в R^n множества $\Omega = \{x : \varepsilon \le \|x - x^*\| \le \delta\}$ и непрерывности функционала $\|P'(x)^{-1}\|$.

Известно, что в случае невырожденного решения скорость сходимости процесса (3) определяется экспонентой e^{-t}, $\|x(t,x_0) - x^*\| \le \|P(x_0)\| L e^{-t}$. А длина кривой $x(t,x_0)$, определяемая величиной $\int_0^\infty \|\frac{dx}{dt}\| dt$, конечна. В случае вырожденного решения сходимость может быть сколько

угодно медленной, а длина кривой не обязана быть конечной. Приведем некоторые оценки.

Теорема 2. Пусть при условии теоремы I имеет место неравенство

$$\|P(x)\| \geqslant M \exp(-f(\|x - x^*\|)),\quad (M > 0,\ x \in S_{x^*,r} \subset D),$$

где $f(y)$ – положительная, монотонно убывающая функция, подчиненная условию $\lim_{u \to 0} f(u) = \infty$. Тогда при $x_0 \in S_{x^*,r}$, таком, что $\|P(x_0)\| \exp(f(r)) \le M$, справедлива оценка

$$\|x(t,x_0) - x^*\| \le f^{-1}(t + b),\quad \left(b = \ln \frac{M}{\|P(x_0)\|}\right),$$

где f^{-1} –функция, обратная к f.

Если при этом $\|P'(x)^{-1} P(x)\| \le L(\|x - x^*\|)$, где $L(y)$ – положительная, монотонно возрастающая функция, такая, что $\int_A^\infty L(f^{-1}(y))dy < \infty$, то кривая $x(t,x_0)$ конечной длины.

Доказательство. Пусть $x_0 \in S_{x^*,r}$. Тогда решение $x(t,x_0)$ существует для достаточно малых $t > 0$. Если $\|P(x_0)\| \le M$, то $\|P(x_0)\| e^{-t} = \|P(x(t,x_0))\| \geqslant M \exp(-f(\|x - x^*\|))$ и $f(\|x(t,x_0) - x^*\|) \geqslant t + b$. Поэтому $\|x(t,x_0) - x^*\| \le f^{-1}(t + b) \le r$. Значит, кривая $x(t,x_0)$ продолжима до $t = \infty$ и сходится к x^* ввиду последнего неравенства. Далее,

$$\int_0^\infty \left\|\frac{dx}{dt}\right\| dt \le \int_0^\infty L(\|x - x^*\|)dt \le \int_0^\infty L(f^{-1}(t + b))dt = \int_b^\infty L(f^{-1}(y))dy < \infty.$$

Теорема доказана.

Например, для скалярного уравнения $\exp(-\frac{1}{x^2}) = 0$, $f(u) = \frac{1}{u^2}$. Поэтому процесс Ньютона сходится со скоростью $|x(t)| \le (t + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}$, $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь $P: H \to H$.

Теорема 3. Пусть в условиях теоремы I выполнено неравенство

$$(P'(x)^{-1}P(x),\ x-x^*) \geqslant g(\|x-x^*\|)\ ,\ (x\in S_{x^*,r}\subset D)\ ,$$

а функция $g(u)$ такова, что для решения уравнения $\frac{du}{dt}=-\frac{g(u)}{u}$, $u(0)=\|x_0-x^*\|$, имеют место соотношения $|u(t)|\leq r$, $t>0$; $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)=0$. Тогда $x(t,x_0)$ сходится к x^* со скоростью $\|x(t,x_0)-x^*\|\leq u(t)$.

Если же $\|P'(x)^{-1}P(x)\|\leq L(\|x-x^*\|)$, где $L(y)$ - монотонно возрастающая функция, такая,что $\int_0^A \frac{L(y)y}{g(y)}dy<\infty$, то кривая $x(t,x_0)$ ограниченной длины.

Доказательство. Домножим обе части уравнения (3) скалярно на $x(t,x_0)-x^*$, тогда получим:

$$\frac{d}{dt}\|x-x^*\|^2=-2(P'(x)^{-1}P(x),x-x^*)\leq -2g(\|x-x^*\|)\ ,$$

$$\frac{d}{dt}\|x-x^*\|\leq -\frac{g(\|x-x^*\|)}{\|x-x^*\|}\ ,$$

откуда $\|x(t,x_0)-x^*\|\leq u(t)$. Поэтому $x(t,x_0)\in S_{x^*,r}$ при $t\geqslant 0$, а значит,траектория $x(t,x_0)$ продолжима до $t=\infty$ и сходится к x^*. Далее, учитывая, что $du=-\frac{g(u)}{u}dt$, получим

$$\int_0^\infty\left\|\frac{dx}{dt}\right\|dt\leq\int_0^\infty L(\|x-x^*\|)dt\leq\int_0^\infty L(u(t))dt=\int_0^A\frac{L(u)u}{g(u)}du<\infty\ .$$

Теорема доказана.

Отметим, что для $g(u)=u^2$ первая часть теоремы 3 была доказана в /2/.

Заметим также, что условия теорем 2,3 относятся к числу неэффективных, так как значение x^*, вообще говоря, неизвестно. Но эти теоремы характеризуют поведение траекторий непрерывных процессов в зависимости от скорости убывания оператора $P(x)$ или $P'(x)^{-1}P(x)$ в окрестности решения.

Рассмотрим далее процесс (6). Для этого процесса также имеет место локальная сходимость траекторий к вырожденному изолированному решению.

Теорема 4. Пусть в некоторой окрестности $S_{x^*,r}\subset H$ нет других решений уравнения (I) и $\|P'(x)\|\leq M$. Если справедлива теорема I,то существует окрестность точки x^*, из которой все траектории (6) сходятся к x^*.

Доказательство. Согласно теореме I существует $m(\varepsilon)=\inf\limits_{\|x-x^*\|=\varepsilon}\|P(x)\|>0$. Согласно /4/ в области, где $\|P'(x)^{-1}\|\leq B$, для траектории (6) имеет место оценка

$$\|P(x(t,x_0))\|\leq\|P(x_0)\|\,e^{-\frac{1}{2B^2}t}\ ,$$

которая показывает, что $\|P(x(t))\|$ монотонно убывает. Поэтому для некоторого $\varepsilon_0>0$ существует $\varepsilon_1>0$, такое, что если $x_0\in S_{x^*,\varepsilon_1}$, то $x(t,x_0)\in S_{x^*,\varepsilon_0}$ при $t\geqslant 0$. Значит, $x(t,x_0)$ продолжимо до $t=\infty$ ввиду ограничения $\|P'(x)^*P(x)\|\leq M\|P(x_0)\|$. Далее, существует последовательность $t_n\to\infty$, такая,что $\|x(t_n,x_0)-x^*\|\to 0$, $n\to\infty$. Если это не так, то для некоторого $\delta>0$ выполнено $\|x(t,x_0)-x^*\|\geqslant\delta$, $t\geqslant 0$. А это приводит к существованию корня в области $\Omega=\{x:\ \delta\leq\|x-x^*\|\leq\varepsilon_0\}$, что невозможно. Теперь для всякого $\varepsilon>0$ выберем t_n так, чтобы $\|P(x(t_n,x_0))\|<m(\varepsilon)$. Тогда траектория $x(t,x_0)\in S_{x^*,\varepsilon}$ при $t\geqslant t_n$. Это доказывает теорему.

§ 2. О регуляризации процессов (3),(5)

Пусть оператор $P'(x)$ не вырождается в окрестности решения x^*, однако константа L в условии (2) велика. Тогда при численных расчетах с помощью процессов (3),(5) возможна большая потеря точности. В этом случае можно воспользоваться либо регуляризованными процессами типа (7),(8), либо процессами, в которых нет обращения оператора $P'(x)$, например (4),(6). Скорость сходимости процессов (4),(6) в этом случае меньше, чем (3),(5). Но скорость сходимости является одним из важных параметров, характерисзующих вычислительный процесс. Поэтому интересно найти интервал изменения параметра $w > 0$, в котором регуляризованные процессы сходятся быстрее, чем (4),(6).

Прежде всего, рассмотрим процесс (4) в B-пространстве. Согласно /I/ этот процесс локально сходится, если $Re\,\sigma(P'(x^*)) > \nu > 0$. Через $\sigma(A)$ обозначаем спектр линейного оператора A. При этом скорость сходимости процесса близка к $e^{-\nu t}$, что является следствием теоремы УП, I.3, из /5/.

Рассмотрим далее процесс (7).

<u>Теорема 5</u>. Пусть в $S_{x_0,r} \subset X$ существует производная Фреше $P'(x)$, а вторая производная Гато $P''(x)$ ограничена в окрестности каждой точки. Если

I) $Re\,\sigma(P'(x)) > \nu > 0$, $x \in S_{x_0,r}$,

2) число $\nu > 0$ таково, что $\frac{1}{\nu}\|P(x_0)\| \le r$,

то в $S_{x_0,r}$ существует корень x^* уравнения (I), к которому процесс (7) сходится со скоростью

$$\|x(t,x_0) - x^*\| \le \frac{1}{\nu}\|P(x_0)\|\, e^{-\frac{\nu}{\nu+w}t}.$$

Доказательство. Из условия (I) следует, что

$$Re\,\sigma(P'(x) + wE) > \nu + w, \quad x \in S_{x_0,r}.$$

Поэтому согласно /5/ $\|(P'(x)+wE)^{-1}\| \le \frac{1}{\nu+w}$, $x \in S_{x_0,r}$.

Напишем дифференицальное уравнение для $P(x(t))$:

$$\frac{d}{dt}P(x(t)) = P'(x(t))\frac{dx}{dt} = -P'(x)(P'(x)+wE)^{-1}P(x) = -P(x) + w(P'(x)+wE)^{-1}P(x) \tag{9}$$

При этом

$$\|w(P'(x)+wE)^{-1}P(x)\| \le \frac{w}{\nu+w}\|P(x)\|. \tag{IO}$$

Согласно теореме УП.2.I из /5/ об устойчивости генерального показателя, учитывая, что эквивалентная норма, определенная оператором -E, совпадает с $\|x\|$,

$$\|x\|_{-E} = \int_0^\infty \|e^{-Et}x\|\,dt = \|x\|,$$

при $x(t,x_0) \in S_{x_0,r}$ из уравнения (9) получаем оценку

$$\|P(x(t))\| \le \|P(x_0)\|\, e^{-\frac{\nu}{\nu+w}t}, \tag{II}$$

в которой учтено (IO). Оценивая длину кривой $x(t,x_0)$, получаем

$$\|x(t,x_0) - x_0\| \le \frac{1}{\nu+w}\|P(x_0)\|\int_0^t e^{-\frac{\nu}{\nu+w}t}\,dt \le \frac{1}{\nu}\|P(x_0)\| \le r.$$

Поэтому оценка (II) имеет место при $t \ge 0$ и, значит, существует $\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = x^*$.

$$\|x(t,x_0) - x^*\| \le \frac{1}{\nu+w}\|P(x_0)\|\int_t^\infty e^{-\frac{\nu}{\nu+w}t}\,dt \le \frac{1}{\nu}\|P(x_0)\|\, e^{-\frac{\nu}{\nu+w}t}.$$

Теорема доказана.

Поскольку при условии I) теоремы 5 процесс (4) сходится со скоростью $e^{-(\nu-\varepsilon)t}$, где $\varepsilon > 0$ –достаточно малое число, то при $w < 1-\nu$ процесс (7) будет сходиться быстрее, чем процесс (4). Однако при $w \ge 1-\nu$ уже не имеет смысла рассматривать процесс (7), так как будет выполнена оценка

$$\|(P'(x)+wE)^{-1}\| \le \frac{1}{\nu+w} \le 1.$$

Таким образом, в естественной области изменения параметра $w > 0$ процесс (7) сходится быстрее, чем процесс (4).

Рассмотрим тот случай, когда не выполняется условие I) отделимости спектра. Пусть $P: H \to H$. Исследуем регуляризованный процесс (8).

<u>Теорема 6.</u> Пусть в $S'_{x_0,r} \subset H$ выполнены условия:

I) $\|P'(x)\| \le M$,

2) $\|P'(x)^{-1}\| \le L$,

3) $\alpha\|P(x_0)\| \le r$, где $\alpha = \frac{L^5 M(M^2+w)}{(wL^2+1)^2}$.

Тогда в $S'_{x_0,r}$ существует корень x^* уравнения (I) и процесс (8) сходится к нему со скоростью

$$\|x(t,x_0) - x^*\| \le \alpha\|P(x_0)\|\, e^{-\beta t},$$

где $\beta = \frac{L^2 w + 1}{L^3(M^2+w)}$.

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме имеет место оценка

$$\|(P'(x)P'^*(x)+wE)^{-1}\| \le \frac{L^2}{1+wL^2}, \quad x \in S_{x_0,r},$$

поскольку $(P'(x)P'^*(x)y,\ y) \ge \frac{1}{L^2}\|y\|^2, \quad y \in H$. Решение уравнения (8) существует для малых t. Для этих t имеем

$$(P'(x)P'^*(x)+wE)\frac{dx}{dt} = -P'^*(x)P(x).$$

Поэтому для $P(x(t))$ получаем неравенство

$$\frac{d}{dt}(P(x),P(x)) = 2\left(P'\frac{dx}{dt}, P(x)\right) = 2\left(\frac{dx}{dt}, P'^*(x)P(x)\right) =$$

$$= -2\left(\frac{dx}{dt}, (P'(x)P'^*(x)+wE)\frac{dx}{dt}\right) \le -2\left(\frac{1+wL^2}{L^2}\right)\left\|\frac{dx}{dt}\right\|^2.$$

Кроме того,

$$(M^2+w)\left\|\frac{dx}{dt}\right\| \ge \left\|(P'(x)P'^*(x)+wE)\frac{dx}{dt}\right\| = \|P'^*(x)P(x)\| \ge \frac{1}{L}\|P(x)\|,$$

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\| \ge \frac{1}{L(M^2+w)}\|P(x)\|.$$

В итоге получаем

$$\frac{d}{dt}\|P(x)\|^2 \le -\frac{2(wL^2+1)}{L^3(M^2+w)}\|P(x)\|^2,$$

$$\|P(x)\| \le e^{-\beta t}\|P(x_0)\|.$$

С другой стороны,

$$\left\|\frac{dx}{dt}\right\| \le \frac{ML^2}{wL^2+1}\|P(x)\| \le \frac{ML^2}{wL^2+1}\|P(x_0)\|e^{-\beta t}.$$

$$\|x(t,x_0)-x_0\| \le \alpha\|P(x_0)\|(1-e^{-\beta t}) \le r.$$

Поэтому существует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t,x_0) = x^*$, для которого

$$\|x(t,x_0)-x^*\| \le \alpha\|P(x_0)\|e^{-\beta t} \quad \text{и} \quad P(x^*) = 0.$$

Теорема доказана.

Отметим, что при $w=0$ получаются условия сходимости для процесса (5).

Известно /4/, что при условиях I), 2) процесс (6) сходится со скоростью $\|x(t,x_0)-x^*\| = \frac{M\|P(x_0)\|}{2L^2}e^{-\frac{1}{2L^3}t}$. Предположим, что процесс (5) сходится быстрее, чем (6), то есть $\frac{1}{2L^2} < \frac{1}{L^3M^2}$, $LM^2-2<0$. Тогда при $L>\frac{1}{2}$ при всяком $w>0$ процесс (8) сходится быстрее, чем (6), так как $\frac{1}{2L^2} < \frac{wL^2+1}{L^3(M^2+w)}$ при этих условиях. Предположение $L>\frac{1}{2}$ естественно, поскольку в противном случае не требуется регуляризация. Итак, если процесс (5) сходится быстрее, чем (6), то и регуляризованный процесс сходится быстрее, чем (6), при всех $w>0$. Поэтому в каждом из рассмотренных случаев использование регуляризованных процессов типа (7), (8), в частности, оправдывается тем, что они сходятся быстрее, чем процессы (4), (6), в которых нет обращения плохо обусловленных линейных операторов. Однако при численной реализации процессов (4), (6) требуется значительно меньшее количество операций.

В некоторых случаях вместо ограничения $\|P'(x)\| = M$ легче получить оценку $\|P''(x)\| \le T$ для второй производной Фреше оператора $P(x)$. Например, рассмотрим задачу на собственные значения для самосопряженного линейного оператора A: $H \to H$, например /6/. Эта задача приводится к уравнению (I) следующим образом. Полагаем $H_1 = H \times R$, $z = \{x, \lambda\}$, $\|z\| = \|x\| + |\lambda|$, где $x \in H$, $\lambda \in R$ и $P(z) = \{Ax - \lambda x,\ (x,x)-1\}$, $P: H_1 \to H_1$. Легко получить, что $P''(x_0,\lambda_0)(z_1;z_2) = \{-\lambda_1 x_2 - \lambda_2 x_1,\ 2(x_1,x_2)\}$. Поэтому $\|P''(z)\| \le 2$. По этому поводу см., например, /7/.

Рассмотрим процесс (8) при ограничении на вторую производную. Положим $\Psi(x) = P'^*(x)P(x)$.

<u>Теорема 7</u>. Пусть в $S_{x_0,r} \subset H$ оператор $P(x)$ имеет вторую производную Фреше и $\|P''(x)\| \le T$. Если при этом

1) $\|P'(x)^{-1}\| \le L < \infty$,

2) $b\,\|\Psi(x_0)\| < a$, $\quad \frac{1}{TL} \ln\left(\frac{a}{a - b\|\Psi(x_0)\|}\right) \le r$, где

$$a = \frac{1}{wL^2+1}, \quad b = \frac{TL^3}{wL^2+1},$$

то в $S_{x_0, r}$ существует корень уравнения $P(x^*) = 0$ и процесс (8) сходится к нему при $x(0) = x_0$ со скоростью

$$\|x(t, x_0) - x^*\| \le \frac{1}{TL} \ln\left(1 + \frac{b\|\Psi(x_0)\|}{a - b\|\Psi(x_0)\|} e^{-at}\right).$$

Доказательство. Аналогично предыдущей теореме

$$\|(P'(x) P'^*(x) + wE)^{-1}\| \le \frac{L^2}{wL^2+1}, \quad x \in S_{x_0, r}.$$

Поэтому из тождества $P'(x) P'^*(x) \frac{dx}{dt} + w \frac{dx}{dt} + \Psi(x) = 0$ следует

$$\frac{d}{dt}(\Psi(x), \Psi(x)) = 2\left(\Psi'(x) \frac{dx}{dt}, \Psi(x)\right) =$$

$$= 2\left(P'(x) P'^* \frac{dx}{dt}, \Psi(x)\right) + 2\left([P'^*(x)]'\left(P(x); \frac{dx}{dt}\right), \Psi(x)\right) =$$

$$= -2(\Psi(x), \Psi(x)) + 2(w(P'(x)P'^*(x) + wE)^{-1}\Psi(x), \Psi(x)) -$$

$$- 2([P'^*(x)]'(P(x); (P'(x)P'^*(x) + wE)^{-1}\Psi(x)), \Psi(x)) \le -2a(\Psi(x), \Psi(x)) +$$

$$+ 2b\|\Psi(x)\|^3.$$

Последнее неравенство получается, если учесть, что

$$\|P(x)\| \le L\|\Psi(x)\|.$$

В итоге имеем неравенство

$$\frac{d}{dt}\|\Psi(x)\| \le -a\|\Psi(x)\| + b\|\Psi(x)\|^2. \tag{12}$$

Поскольку для уравнения

$$\frac{dz}{dt} = -az + bz^2, \quad z(0) = z_0, \quad a - bz_0 > 0,$$

решением будет функция

$$z(t) = \left(\frac{b}{a} + e^{a(t+c)}\right)^{-1}, \quad c = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{1}{z(0)} - \frac{b}{a}\right),$$

то из неравенства (12) получим следующую оценку для $\|\Psi(x)\|$:

$$\|\Psi(x(t, x_0))\| \le \left(\frac{b}{a} + \left(\frac{1}{\|\Psi(x_0)\|} - \frac{b}{a}\right) e^{at}\right)^{-1} = \gamma(t).$$

Далее имеем

$$\|x(t, x_0) - x_0\| \le \int_0^t \left\|\frac{dx}{dt}\right\| dt \le \frac{L^2}{wL^2+1} \int_0^t \gamma(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{TL} \ln\left(\frac{a - b\|\Psi(x_0)\|}{a} + \frac{b\|\Psi(x_0)\|}{a} e^{-at}\right) \le \frac{1}{TL} \ln\left(\frac{a}{a - b\|\Psi(x_0)\|}\right) \le r.$$

Поэтому существует $\lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = x^* \in S_{x_0, r}$ и $\Psi(x^*) = 0$. Значит, и $P(x^*) = 0$. Для скорости сходимости получим оценку

$$\|x(t, x_0) - x^*\| \le \frac{L^2}{wL^2+1} \int_t^\infty \gamma(t)\, dt = \frac{1}{TL} \ln\left(1 + \frac{b\|\Psi(x_0)\|}{a - b\|\Psi(x_0)\|} e^{-at}\right).$$

Теорема доказана.

Отметим, что теоремы 5–7 являются и теоремами существования, так как наличие решения не предполагается. При этом процессы (7), (8) рассматривались лишь в случае, когда w – постоянное положительное число, так как эти процессы теоретически сходятся и при $w = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский. О локальной сходимости приближенных методов решения операторных уравнений. ОИЯИ, Р5-9598, Дубна, 1976.

2. Я.И.Альбер. Непрерывные процессы ньютоновского типа. Дифференциальные уравнения, том УП, № II, 1971.

3. Л.Александров. О регуляризации итерационных процессов ньютоновского типа. ОИЯИ, Р5-7258, Дубна, 1973.

4. М.К.Гавурин. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных процессов. Известия вузов, математика, № 5, 1958.

5. Ю.А.Далецкий, М.Г.Крейн. Устойчивость решения дифференциальных уравнений в банаховых пространствах . М.,Наука, 1970.

6. Е.П.Жидков, И.В.Пузынин, Б.Н.Хоромский. Об одном итерационном процессе численного решения интегродифференциального уравнения Шредингера . ОИЯИ, Р5-9512, Дубна, 1976.

7. Л.Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика . М.,Мир,1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 декабря 1976 года.