

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



П-563

6/11-76

P4 - 9960

4804/2-76

Л.И. Пономарев, М.П. Файфман

РЕШЕНИЕ ДВУХКАНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
МЕТОДОМ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

1976

P4 - 9960

Л.И.Пономарев, М.П.Файфман

РЕШЕНИЕ ДВУХКАНАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЙЯНИЯ
МЕТОДОМ ФАЗОВЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в ЯФ

1. Теоретическое изучение многочисленных мезоатомных процессов в смеси изотопов водорода: упругое рассеяние мезоатомов, перехват мезона ядрами более тяжелых изотопов, переходы между уровнями сверхтонкой структуры мезоатомов, образование мезомолекул и т.д., в большинстве случаев сводится к решению связанной системы дифференциальных уравнений^{/1, 2/}:

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} + k_1^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right] \chi_1 = K_{11} \chi_1 + K_{12} \chi_2 + 2Q_{12} \frac{d}{dR} \chi_2,$$

/1/

$$\left[\frac{d^2}{dR^2} + k_2^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right] \chi_2 = K_{21} \chi_1 + K_{22} \chi_2 + 2Q_{21} \frac{d}{dR} \chi_1,$$

или в матричном виде:

$$\mathcal{L} \chi = K \chi + 2Q \frac{d}{dR} \chi. \quad /2/$$

Здесь $K_{ij}(R)$ и $Q_{ij}(R)$ - эффективные потенциалы, которые выражаются через термы $E_g(R)$, $E_u(R)$ задачи двух центров и матричные элементы от операторов \hat{V}_R^+ и $\hat{\Delta}_R^+$ по волновым функциям задачи двух центров^{/3/}; k_1 и k_2 - импульсы в соответствующих каналах реакции, определенные в системе единиц $\epsilon = \hbar = m = 1$, используемой в данной работе, следующими формулами:

$$k_1^2 = 2M\epsilon, \quad k_2^2 = 2M(\epsilon - \Delta E),$$

$$M = \frac{M_0}{m}, \quad \frac{1}{m} = \frac{1}{M_\mu} + \frac{1}{4M_0}, \quad \frac{1}{M_0} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2},$$

/3/

где ΔE - разность уровней энергии основного состояния мезоатомов $M_1 M_\mu$ и $M_2 M_\mu$ в адиабатическом представлении, ϵ - энергия столкновения мезоатома с ядром, отсчитываемая от нижнего уровня, соответствующего более тяжелому мезоатому /рис. 1/, M_μ - масса μ^- -мезона, M_1 и M_2 - массы ядер.

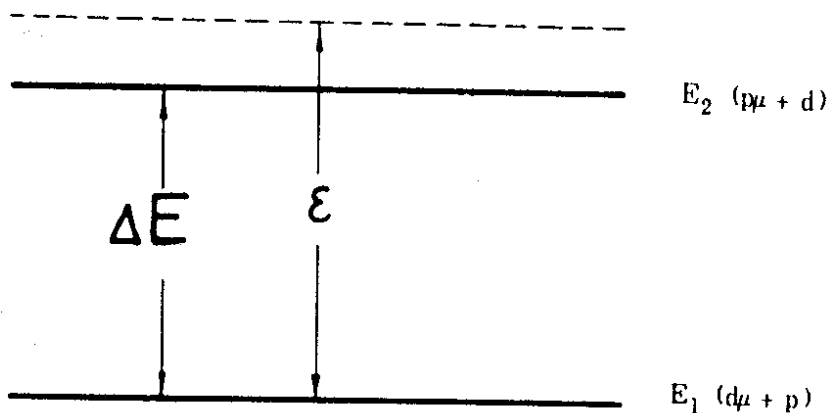


Рис. 1. Схема уровней энергии системы трех тел $d\mu + p$ (E_1) и $p\mu + d$ (E_2) при $R \rightarrow \infty$ в адиабатическом приближении. Энергия столкновения ϵ отсчитывается от нижнего уровня E_1 ($M_1 > M_2$).

В прежних работах ^{2, 5, 6/} система уравнений /1/ решалась методом фазовых функций ^{7/} для получения сечений различных мезоатомных процессов. При этом находились соответствующие фазы рассеяния, а непосредственно волновые функции χ_1 и χ_2 не вычислялись. В данной работе развита схема вычисления волновых функций задачи рассеяния $\chi_1(R)$ и $\chi_2(R)$ соответствующих энергии столкновения ϵ , как превышающей пороговую ($\epsilon > \Delta E$), так и ниже пороговой ($\epsilon < \Delta E$).

2. Систему уравнений /1/ удобно переписать в виде, не содержащем членов $Q_{ij} \frac{d}{dR} \lambda_j$ / $i, j = 1, 2$ /, для чего необходимо осуществить переход от адиабатического к диабатическому базису с помощью матрицы $W(R)$ ^{4-6/}

$$\Psi = W\chi$$

$$W(R) = \begin{pmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{pmatrix}, \quad \rho = \int_R^\infty Q_{12}(R) dR. \quad /4/$$

В диабатическом представлении система уравнений /1/ примет вид:

$$\begin{aligned} \left[\frac{d^2}{dR^2} + k_1^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right] \Psi_1 &= V_{11} \Psi_1 + V_{12} \Psi_2, \\ \left[\frac{d^2}{dR^2} + k_2^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2} \right] \Psi_2 &= V_{21} \Psi_1 + V_{22} \Psi_2, \end{aligned} \quad /5/$$

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) = 0,$$

или в матричном виде

$$\mathcal{L}\Psi = V\Psi$$

$$\Psi(0) = 0,$$

/6/

где

$$V = W \left[K - \frac{dQ}{dR} + Q^2 \right] W^{-1} + P,$$

$$P = \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix} - W \begin{pmatrix} k_1^2 & 0 \\ 0 & k_2^2 \end{pmatrix} W^{-1},$$

причем матрица V симметрична ($V_{12} = V_{21}$).

Система уравнений /5/ имеет два линейно независимых решения: $\Psi_j^{(1)}(R)$ и $\Psi_j^{(2)}(R)$ / $j = 1, 2$ /. Если оба канала открыты, то их асимптотика при $R \rightarrow \infty$ должна иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^{(1)} \\ \Psi_2^{(1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} j_\ell(k_1 R) - t_{11} n_\ell(k_1 R) \\ -t_{21} n_\ell(k_2 R) \end{pmatrix} \quad /7a/$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^{(2)} \\ \Psi_2^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -t_{12} n_\ell(k_1 R) \\ j_\ell(k_2 R) - t_{22} n_\ell(k_2 R) \end{pmatrix} \quad /7b/$$

где $j_\ell(x)$ и $n_\ell(x)$ - функции Риккати-Бесселя^{/7/}, t_{ij} - элементы матрицы реакции T , которая связана с матрицей рассеяния S известным соотношением^{/8/}

$$S = (1 + iT)(1 - iT)^{-1} \quad /8/$$

Если один из каналов закрыт ($k_2^2 = -\kappa^2 < 0$, $k_1 = k$), то асимптотика решений системы /5/ должна иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^{(1)} \\ \Psi_2^{(1)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} j_\ell(kR) - t_{11} n_\ell(kR) \\ t_{21} e^{-\kappa R} \end{pmatrix} \quad /9a/$$

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^{(2)} \\ \Psi_2^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -t_{12} n_\ell(kR) \\ e^{\kappa R} + t_{22} e^{-\kappa R} \end{pmatrix} \quad /9b/$$

причем процессу упругого рассеяния соответствует решение /9a/.

3. Общее решение системы уравнений /5/, согласно методу фазовых функций^{/2,6/}, ищем в виде

$$\Psi(R) = [u + vT(R)]A(R) \quad /10/$$

при дополнительном условии для первой производной по R :

$$\Psi'(R) = [u' + v'T(R)]A(R). \quad /11/$$

Здесь $\Psi(R)$ - матрица, столбцами которой являются два линейно независимых решения системы уравнений /5/; $T(R)$ и $A(R)$ - матрицы, зависящие от выбора граничных условий и нормировки волновой функции, u и v - диагональные матрицы, составленные из двух линейно независимых решений дифференциального уравнения

$$\mathcal{L}\Psi = 0. \quad /12/$$

Для открытого канала функции u_i и v_i выбраны следующим образом:

$$u_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} j_\ell(k_i R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k_i}} \sin(k_i R - \frac{\pi \ell}{2}), \quad /13/$$

$$v_i = -\frac{1}{\sqrt{k_i}} n_\ell(k_i R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{k_i}} \cos(k_i R - \frac{\pi \ell}{2}).$$

Для закрытого канала функции u_i и v_i имеют вид:

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{k}} j_\ell(kR), \quad v_1 = -\frac{1}{\sqrt{k}} n_\ell(kR),$$

$$u_2 = (-i)^{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} [j_\ell(i\kappa R) - i n_\ell(i\kappa R)] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{\kappa R}, \quad /14/$$

$$v_2 = i^{\ell+1} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} [j_\ell(i\kappa R) + i n_\ell(i\kappa R)] \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{-\kappa R}.$$

Матрица решений /10/ при $R \rightarrow \infty$, удовлетворяющая граничным условиям /7a,б/ и /9a,б/, должна иметь вид:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1^{(1)} & \Psi_1^{(2)} \\ \Psi_2^{(1)} & \Psi_2^{(2)} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u_1 + v_1 t_{11} & v_1 t_{12} \\ v_2 t_{21} & u_2 + v_2 t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix} \quad /15/$$

Тогда матрица $T(\infty)$ совпадет с матрицей T в формуле /8/, а постоянные b_{11} и b_{22} определятся из нормировки волновой функции.

Из выражений /5/, /10/ и /11/ получим уравнения для матриц $T(R)$ и $A(R)$, соответственно:

$$T'(R) = -[u + T(R)v]V[u + vT(R)], \quad /16/$$

$$A'(R) = vV[u + vT(R)]A(R). \quad /17/$$

Начальные условия для интегрирования уравнений /16/ и /17/ в случае открытых каналов следующие:

$$t_{ij}(0) = 0, \quad a_{ij}(0) = 0. \quad /18a/$$

Если один канал закрыт, то

$$t_{11}(0) = t_{12}(0) = 0, \quad t_{22}(0) = -1, \quad a_{ij}(0) = 0. \quad /18б/$$

Интегрирование уравнений /15/ и /17/ в практических расчетах, ввиду сингулярного поведения потенциалов $V_{ij}^{(3)}$, следует начинать от точки $R=R_p > 0$. Асимптотика параметров $t_{ij}(R)$ при $R \rightarrow 0$ приведена в работах /2,6/, уравнение /17/ интегрируется при произвольных начальных значениях $a_{ij}(R_p) = \text{const}$ /см. Приложение/.

В результате интегрирования уравнений /16/ и /17/ получим решение системы уравнений /6/ в виде /10/, которое, вообще говоря, не совпадает с асимптотическим условием /15/ при $R \rightarrow \infty$. Для того, чтобы удовлетворить условию /15/, в формуле /10/ вместо матрицы $A(R)$ используется матрица $B(R)$, столбцы которой представлены в виде линейных комбинаций столбцов матрицы $A(R)$:

$$B(R) = \begin{pmatrix} b_{11}(R) & b_{12}(R) \\ b_{21}(R) & b_{22}(R) \end{pmatrix} = \quad /19/$$

$$\begin{pmatrix} a_{22}(\infty)a_{11}(R) - a_{21}(\infty)a_{12}(R) & a_{12}(\infty)a_{11}(R) - a_{11}(\infty)a_{12}(R) \\ a_{22}(\infty)a_{21}(R) - a_{21}(\infty)a_{22}(R) & a_{12}(\infty)a_{21}(R) - a_{11}(\infty)a_{22}(R) \end{pmatrix}.$$

где $a_{ij}(\infty) = \text{const}$ /см. Приложение/. Получение искомой функции $\Psi(R)$ /10/ в случае, когда оба канала открыты, обычно не вызывает затруднений. Если один из каналов закрыт, то решение в закрытом канале, согласно выражению /15/, имеет асимптотический вид:

$$\Psi_2^{(1)} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} b_{11}t_{21} e^{-\kappa R} + b_{21}e^{\kappa R} = b_{11}t_{21} e^{-\kappa R} (1+f), \quad /20/$$

где при $R \rightarrow \infty$ $b_{11}(R) \rightarrow \text{const}$, $f(R) = b_{21}(b_{11}t_{21})^{-1} e^{2\kappa R} \rightarrow 0$, согласно /19/. Однако точность численного интегрирования в некоторых случаях оказывается недостаточной, чтобы обеспечить выполнение неравенства $\kappa R \ll 1$ при больших зна-

чениях R . В связи с этим при $R > \frac{1}{2\kappa}$ величина $f(R)$ вна-

чале уменьшается, а затем, начиная с некоторой точки R_f , возрастает. Практический рецепт состоит в том, чтобы полагать $f(R) = 0$ при всех $R > R_f$. Как показывает опыт вычислений, в этом случае точность определения волновых функций $\Psi^{(i)}(R)$ составляет $\sim 10^{-4}$, что вполне достаточно в рамках двухуровневого приближения метода ВСС /1,2/.

При численных расчетах с указанной выше точностью область интегрирования уравнений /16/ и /17/ достаточно ограничить интервалом $0 \leq R \leq R_0$, а вклад от области $R_0 \leq R < \infty$ оценить по аналитическим формулам, приведенным в Приложении.

4. В качестве примера использования изложенного метода приведем расчет процесса рассеяния мезоатомов $d\mu$ на протонах. Численные значения масс /3/ в этом случае следующие: $M_1 = M_d = 3670, 398$; $M_2 = M_p = 1836, 109$; $M_\mu = 206, 769$; $M = 6, 169$. Энергия изотопического расщепления в адиабатическом представлении /2,6/ равна $\Delta E = 145, 75$ эВ. Вид потенциалов $V_{ij}(R)$, входящих в систему уравнений /5/, представлен на рис. 2.

Искомые волновые функции /1/ находятся из соотношения /4/:

$$\chi(R) = W^{-1} \Psi(R). \quad /21/$$

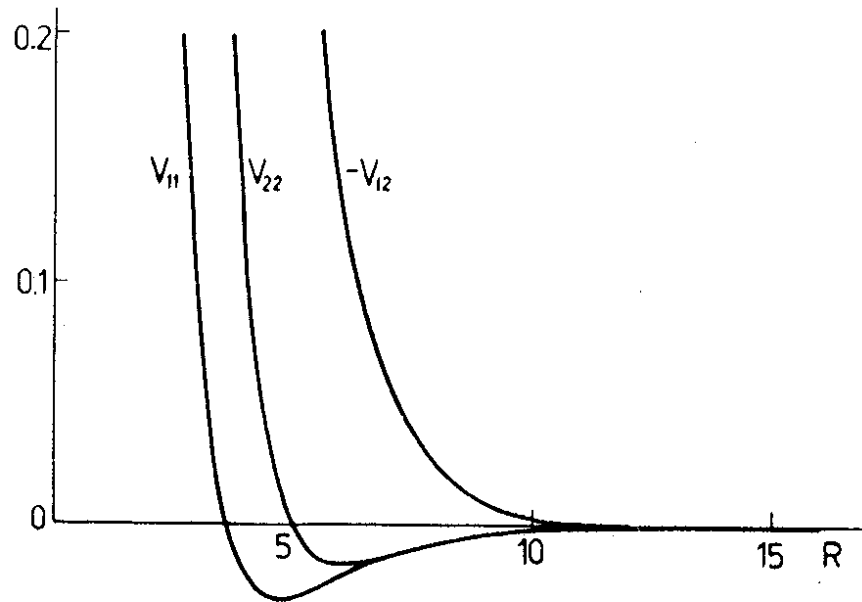


Рис. 2. Адиабатические эффективные потенциалы /6/ в задаче рассеяния мезоатомов водорода.

На рис. 3 изображены графики волновых функций $\chi_1^{(1)}(R)$ и $\chi_2^{(1)}(R)$ при энергии столкновения $\epsilon = 165,75$ эВ, $l = 0$ ($\epsilon > \Delta E$), нормированных условием при $R \rightarrow \infty$:

$$\chi_1^{(1)}(R) \rightarrow \frac{1}{k_1} \sin(k_1 R + \delta_1), \quad /22/$$

где $\delta_1 = \text{arctg} t_{11}$. Графики фазовых параметров, связанных с матричными элементами $t_{ij}(R)$ /16/ соотношениями

$$\delta_1 = \text{arctg} t_{11}(R), \quad \delta_2 = \text{arctg} t_{22}(R), \quad \gamma = \text{arctg} t_{12}(R), \quad /23/$$

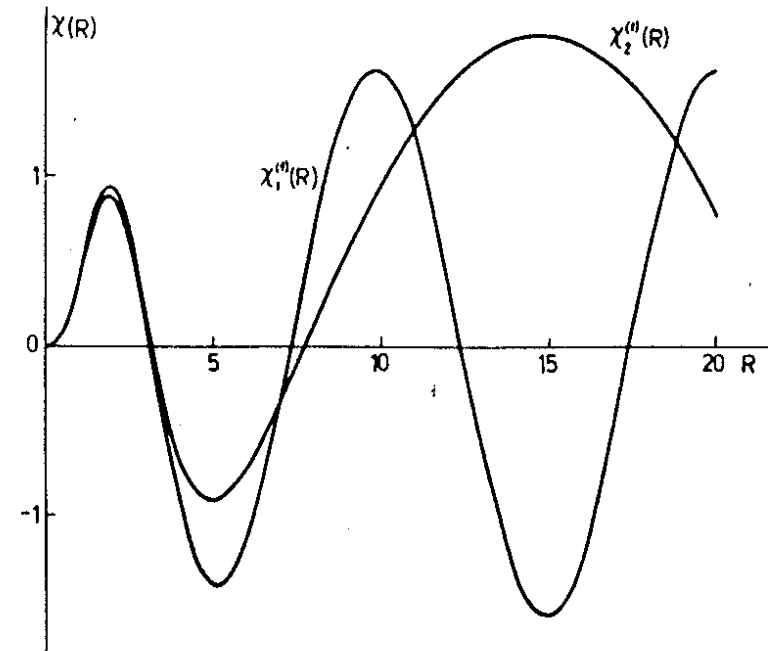


Рис. 3. Волновые функции процесса рассеяния в случае двух открытых каналов, нормированные условием /22/. $\chi_1^{(1)}(R)$ - решение в нижнем канале, $\chi_2^{(1)}(R)$ - в верхнем канале.

приведены на рис. 4а. Параметры $b_{11}(R)$ и $b_{21}(R)$, /19/, соответствующие нормировке волновой функции /22/, представлены на рис. 4б. Аналогичные графики для случая закрытого канала при энергии столкновения $\epsilon = 20$ эВ ($\epsilon < \Delta E$) приведены на рис. 5, ба,б, где волновые функции $\chi_1^{(1)}(R)$ и $\chi_2^{(1)}(R)$ нормированы условием

$$\chi_1^{(1)}(R) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sin(kR + \delta), \quad /24/$$

а фазовые параметры связаны соотношениями

$$\delta(R) = \text{arctg} t_{11}(R), \quad \gamma(R) = \text{arctg} t_{12}(R). \quad /25/$$

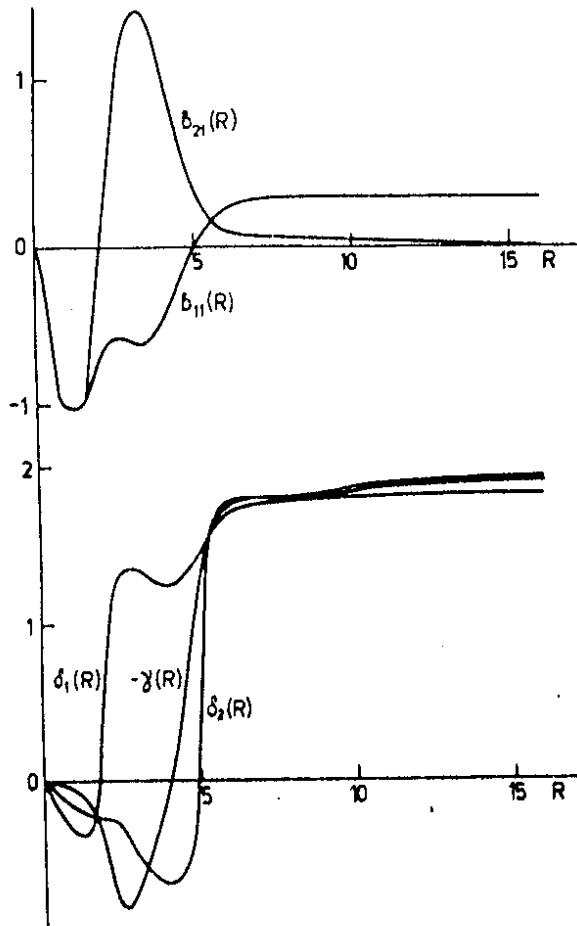


Рис. 4. Рассеяние в случае двух открытых каналов. а/ Графики параметров $b_{11}(R)$ и $b_{21}(R)$, определяющих нормировку /22/ волновых функций, б/ графики фазовых параметров, определенных формулами /23/.

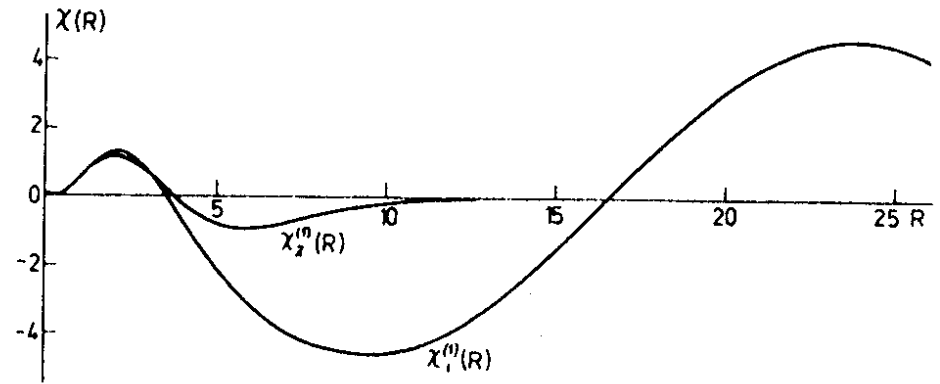


Рис. 5. Волновые функции процесса рассеяния с учетом закрытого канала, нормированные условием /24/. $\chi_1^{(0)}(R)$ - решение в открытом канале, $\chi_2^{(0)}(R)$ - в закрытом канале.

5. Решения системы /1/, найденные излагаемым способом /рис. 3,5/, сравнивались с решениями системы уравнений /1/, полученными с помощью непрерывного аналога метода Ньютона /9/. Достигнутое согласие результатов составляет 10^{-4} - 10^{-5} на всем интервале интегрирования.

Развитый в данной работе метод решения системы двух связанных уравнений обладает достаточной общностью и применим к целому ряду задач рассеяния, в которых необходимо находить волновые функции различных квантовых систем. Изложенная схема реализована в виде алгоритма и соответствующей программы на языке FORTRAN и была эффективно использована для вычисления вероятностей образования μ -мезомолекул водорода /10/.

Авторы выражают глубокую признательность С.И.Виницкому, И.В.Пузынину, Т.Н.Пузыниной и Л.Н.Сомову за помощь и многочисленные обсуждения в ходе работы.

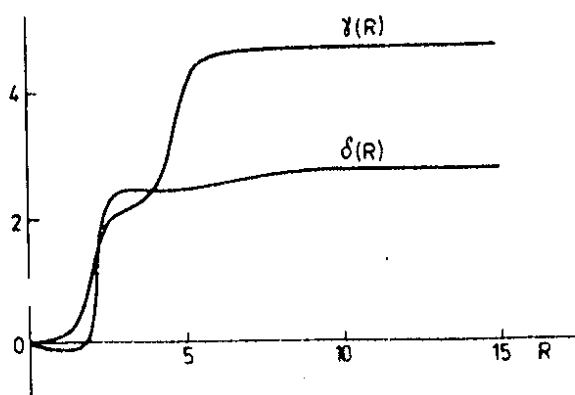
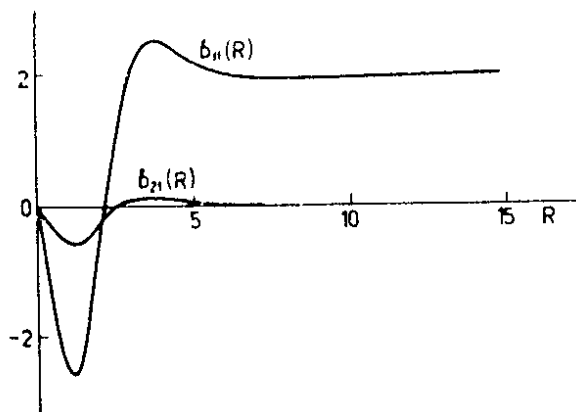


Рис. 6. Рассеяние с учетом закрытого канала. а/ Графики параметров $b_{11}(R)$ и $b_{21}(R)$, определяющих нормировку /24/ волновых функций, б/ графики фазовых параметров, определенных формулами /25/.

ПРИЛОЖЕНИЕ

При численном интегрировании уравнений /16/ и /17/ удобно центробежный член из оператора \mathcal{L} /5/ отнести к эффективным потенциалам $V^{/2,6,7/}$. В этом случае базисные функции упрощаются и имеют вид:

для открытых каналов

$$\tilde{u}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \sin k_i R, \quad \tilde{v}_i = \frac{1}{\sqrt{k_i}} \cos k_i R; \quad /П.1/$$

для закрытого канала

$$\tilde{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{\kappa R}, \quad \tilde{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\kappa}} e^{-\kappa R}. \quad /П.2/$$

Такому выбору базисных функций соответствует свое решение

$$\Psi = (\tilde{u} + \tilde{v}^T) \tilde{A}, \quad /П.3/$$

которое находится из систем уравнений типа /16/ и /17/ после замен

$$V(R) \rightarrow V(R) + \frac{\ell(\ell+1)}{R^2}, \quad u \rightarrow \tilde{u}, \quad v \rightarrow \tilde{v}, \quad T \rightarrow \tilde{T}$$

и $\Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$. Искомые матрицы T и Λ находятся из условия сшивания логарифмических производных решений /П.3/ и /10/ в точке $R \gg 1$, где потенциалом $V(R)$ можно пренебречь по сравнению с центробежным членом:

$$T = (G\tilde{v} - \tilde{v}')^{-1} (\tilde{u}' - G\tilde{u}) \quad /П.4/$$

$$\Lambda = (u + v^T)^{-1} (u + \tilde{v}^T) \tilde{\Lambda},$$

где

$$G = \tilde{\Psi}' \tilde{\Psi}^{-1} = \Psi' \Psi^{-1}.$$

В процессе численного решения уравнения для матрицы $T(R)$ типа /16/ параметры $t_{ij}(R)$ в некоторых точках R ве-

дуг себя как $\text{tg} \tilde{\delta}_{ij}(R)$, где $\tilde{\delta}_{ij}(R) \rightarrow \frac{\pi}{2}$, т.е. $t_{ij}(R) \rightarrow \infty$.

Вблизи этих точек удобно перейти от функции /П.3/ к функции вида

$$\tilde{\Psi} = (\tilde{v} - \tilde{u}\tilde{T})\tilde{A}. \quad /П.6/$$

При этом матрицы $\tilde{T}(R)$ и $\tilde{T}(R)$, $\tilde{A}(R)$ и $\tilde{A}(R)$ связаны между собой соотношениями:

$$\tilde{T} = -\tilde{T}^{-1}, \quad \tilde{A} = -\tilde{T}\tilde{A}. \quad /П.6/$$

Для параметров $\tilde{t}_{ij}(R)$ эта процедура соответствует переходу $\tilde{T}(\tilde{t}_{ij}) \rightarrow \tilde{T}(\tilde{t}_{ij}^{-1})$. Для контроля процесса численного интегрирования уравнений /16/ и /17/ необходимо знать поведение матричных элементов t_{ij} и a_{ij} при $R \rightarrow 0$, которое определяется асимптотикой матричных элементов V_{ij} при $R \rightarrow 0$ /6/:

$$V_{11} \rightarrow \frac{L - \sin \Delta}{R^2}, \quad V_{22} \rightarrow \frac{L + \sin \Delta}{R^2}, \quad V_{12} = V_{21} \rightarrow -\frac{\cos \Delta}{R^2}, \quad /П.7/$$

$$L = \ell(\ell + 1) + 1, \quad \Delta = 2\rho, \quad \rho = \int_0^\infty Q_{12}(R) dR.$$

Воспользовавшись выражениями /П.7/ из систем уравнений /16/ и /17/, можно найти асимптотические разложения для параметров \tilde{t}_{ij} и \tilde{a}_{ij} . Для открытых каналов эти разложения имеют вид:

$$\tilde{t}_{ij} = \sqrt{k_i k_j} C_{ij} R, \quad /П.8/$$

$$C_{11} = \alpha + \beta \sin \Delta, \quad C_{22} = \alpha - \beta \sin \Delta, \quad C_{12} = \beta \cos \Delta,$$

$$\alpha = \frac{1}{2(L^2 - 1)} \left[-2L^2 - L + 2 + (L+1)\sqrt{L - \frac{3}{4}} + (L-1)\sqrt{L + \frac{5}{4}} \right],$$

$$\beta = \frac{1}{2(L^2 - 1)} \left[-1 + (L+1)\sqrt{L - \frac{3}{4}} - (L-1)\sqrt{L + \frac{5}{4}} \right],$$

$$\tilde{a}_{11} = \frac{1}{\sqrt{k_1}} \left[d_{11} (\sin \Delta + DR)^{-\frac{1}{2} + \sqrt{L - \frac{3}{4}}} + d_{21} (\sin \Delta - DR)^{-\frac{1}{2} + \sqrt{L + \frac{5}{4}}} \right], \quad /П.9/$$

$$\tilde{a}_{21} = \frac{\cos \Delta}{\sqrt{k_2}} \left[d_{11} R^{-\frac{1}{2} + \sqrt{L - \frac{3}{4}}} + d_{21} R^{-\frac{1}{2} + \sqrt{L + \frac{5}{4}}} \right],$$

где d_{ij} - произвольные постоянные /константы интегрирования/. Если один из каналов закрытый, то соответствующие разложения примут вид:

$$\tilde{t}_{11} = k C_{11} R, \quad \tilde{t}_{22} = -1 + 2k C_{22} R, \quad \tilde{t}_{12} = \sqrt{2k} C_{12} R, \quad /П.10/$$

где постоянные C_{ij} определены формулами /П.8/, а в разложениях /П.9/ следует провести замены $k_1 \rightarrow k$, $k_2 \rightarrow 2k$. Учет поведения потенциалов V_{ij} при $R \rightarrow \infty$ /11/

$$V_{11} = V_{22} \rightarrow -\frac{9\mu}{2R^4}, \quad V_{12} = V_{21}, \quad /П.12/$$

$/\mu = M + 0,75/$ позволяет найти из уравнений /16/ и /17/ асимптотические разложения для параметров $t_{ij}(R)$ и $a_{ij}(R)$ и оценить вклад от области $R_0 \leq R < \infty$. Если оба канала открыты, то получим следующие выражения:

$$t_{11} = t_{11}(R_0) + \frac{3\mu}{4R_0^3} [1 + t_{11}^2(R_0)] \left[\frac{1}{k_1} + \frac{t_{12}^2(R_0)}{k_2} \right], \quad /П.13/$$

$$t_{22} = t_{22}(R_0) + \frac{3\mu}{4R_0^3} [1 + t_{22}^2(R_0)] \left[\frac{1}{k_2} + \frac{t_{12}^2(R_0)}{k_1} \right],$$

$$t_{12} = t_{12}(R_0) \left\{ 1 + \frac{3\mu}{4R_0^3} \left[\frac{t_{11}(R_0)}{k_1} + \frac{t_{22}(R_0)}{k_2} \right] \right\},$$

$$a_{1i} = a_{1i}(R_0) - \frac{3\mu}{4k_1 R_0^3} [t_{11}(R_0)a_{1i}(R_0) + t_{12}(R_0)a_{2i}(R_0)],$$

$$a_{2i} = a_{2i}(R_0) - \frac{3\mu}{4k_2 R_0^3} [t_{22}(R_0)a_{2i}(R_0) + t_{12}(R_0)a_{1i}(R_0)].$$

Аналогичные выражения для случая, когда один из каналов закрыт, имеют вид:

$$t_{11} = t_{11}(R_0) + \frac{3\mu}{4k R_0^3} [1 + t_{11}^2(R_0)],$$

$$t_{22} \rightarrow \frac{9\mu}{8\kappa^2 R^4} e^{2\kappa R},$$

$$t_{12} = t_{12}(R_0) \left\{ 1 + \frac{3\mu}{4R_0^3} \left[\frac{1}{\epsilon} + \frac{t_{11}(R_0)}{k} \right] \right\}, \quad /П.14/$$

$$a_{1i} = a_{1i}(R_0) - \frac{3\mu}{4k R_0^3} [t_{11}(R_0)a_{1i}(R_0) + t_{12}(R_0)a_{2i}(R_0)],$$

$$a_{2i} = a_{2i}(R_0) - \frac{3\mu}{4\kappa R_0^3} a_{2i}(R_0).$$

Точка R_0 определяется из условий $2k_1 R_0 > 1$, $2k_2 R_0 > 1$ или $2\kappa R > 1$, $2\kappa R > 1$.

Литература

1. S.S.Gerstein, L.I.Ponomarev. "Mesomolecular Processes Induced by μ^- and π^- Mesons", in "Muon Physics" ed. W.Hughes and C.S.Wu, v. III, 143, Academic Press, New York, 1975.
2. А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев. ТМФ, 12, 64 /1972/; ЖЭТФ, 59, 1953 /1970/.

3. G.Hunter, B.F.Gray, H.O.Prichard. J.Chem. Phys., 45, 3806, 1966. Л.И.Пономарев, Т.П.Пузынина. ЖВМ и МФ, 8, 1256 /1968/; Препринт ОИЯИ, Р4-5040, Дубна, 1970.
4. F.T.Smith. Phys. Rev., 179, 111, 1969.
5. А.В.Матвеевко. ЖЭТФ, 65, 2167 /1973/.
6. А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев, М.П.Файфман. ЖЭТФ, 68, 437 /1975/; Препринт ОИЯИ, Р4-8232, Дубна, 1974.
7. В.В.Бабилов. Метод фазовых функций в квантовой механике. М., Наука, 1968; Ф.Калоджеро. Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния. М., Мир, 1972.
8. А.И.Базь, Я.Б.Зельдович, А.М.Переломов. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике. М., Наука, 1971.
9. L.I.Ponomarev, I.V.Puzynin and T.P.Puzynina. J. Comput. Phys., 13, 1, 1973; Л.И.Пономарев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина, Л.Н.Сомов. Препринт ОИЯИ, Р4-9915, Дубна, 1976.
10. Л.И.Пономарев, П.М.Файфман. Препринт ОИЯИ, Р4-9736, Дубна, 1976.
11. С.И.Виницкий, Л.И.Пономарев, М.П.Файфман. Препринт ОИЯИ, Р4-9312, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 июля 1976 года.