

СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



СЗУ3а

А-941

15/XI-76

P4 - 9892

4572/2-76

Г.Н.Афанасьев, С.Аврамов, М.Б.Добромыслов,  
Ким Ынг Пхунг, В.М.Шилов

ВЛИЯНИЕ

МНИМОЙ ЧАСТИ ОПТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

НА СЕЧЕНИЯ РЕАКЦИИ

**1976**

P4 - 9892

Г.Н.Афанасьев, С.Аврамов, М.Б.Добромыслов,  
Ким Ёнг Пхунг, В.М.Шилов

ВЛИЯНИЕ  
МНИМОЙ ЧАСТИ ОПТИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА  
НА СЕЧЕНИЯ РЕАКЦИИ

В работе<sup>/1/</sup> на примере нескольких простых квантово-механических моделей мы попытались объяснить некоторые качественные закономерности реакций с тяжелыми нонами. Одной из таких моделей была модель комплексной потенциальной ямы. В упомянутой работе отмечалось, что при безграничном увеличении глубины мнимой части потенциала  $W_0$  мы не приходим к полному поглощению, т.е. к модели Томаса<sup>/2/</sup>. В настоящей работе мы остановимся на этом утверждении более детально. Именно, в первой части работы мы показываем на примере комплексной прямоугольной ямы, что при стремлении  $W_0$  к бесконечности мы не только не приходим к полному поглощению, но, напротив, сечение реакции, достигая максимума для некоторой величины  $W_0$ , убывает при дальнейшем возрастании  $W_0$  и обращается в нуль при  $W_0 = \infty$ . При этом  $S$ -матрица стремится к унитарному пределу как при малых, так и при больших  $W_0$ .

Влияние мнимой части потенциала на упругие дифференциальные сечения для случая рассеяния нейтральных частиц на прямоугольной комплексной яме изучалось в работе<sup>/3/</sup>. Отметим также работу<sup>/4/</sup>, в которой подмечена аналогия между рассеянием частиц на бесконечно глубоком мнимом потенциале и тем фактом, что идеальные проводники /которые характеризуются большой мнимой частью показателя преломления/ отражают электромагнитные волны подобно совершенным зеркалам.

Вторая часть данной работы связана с построением нон-ионного потенциала с помощью процедуры свертки, предложенной в <sup>1/5/</sup>. В приближении постоянных плотностей ионов удастся получить реальную часть нон-ионного потенциала в явном виде. Константы потенциала фиксируются подгонкой экспериментальных энергий связи.

1. Будем считать, что вне сферы радиуса  $R$  мы имеем чисто кулоновское взаимодействие, т.е. комбинацию кулоновских функций:

$$(G_\ell - iF_\ell) - S_\ell (G_\ell + iF_\ell) \quad /1.1/$$

Квадрат  $S$ -матрицы определяется выражением

$$|S_\ell|^2 = \frac{X + 2\Psi_{2\ell}}{X - 2\Psi_{2\ell}} \quad /1.2/$$

где

$$X = (G'_\ell - \Psi_{1\ell} G_\ell)^2 + (F'_\ell - \Psi_{1\ell} F_\ell)^2 + \Psi_{2\ell}^2 (F_\ell^2 + G_\ell^2),$$

а  $\Psi_{1\ell}$  и  $\Psi_{2\ell}$  являются реальной и мнимой частями логарифмической производной внутренней волновой функции, взятой в точке сшивания  $r = R$ :

$$\Psi_\ell = \frac{1}{k} \frac{d\Psi_{in}^{(\ell)}}{dr} \Big|_{r=R} \equiv \Psi_{1\ell} + i\Psi_{2\ell},$$

$$k^2 = \frac{2\mu E}{h^2}.$$

При этом та или иная ядерная модель входит в /1.2/ только посредством  $\Psi_{1\ell}$ ,  $\Psi_{2\ell}$ . Сечение реакции равно:

$$\sigma = \pi \lambda^2 \sum (2\ell + 1) T_\ell(E), \quad /1.3/$$

$$T_\ell(E) = 1 - |S_\ell(E)|^2 = - \frac{4\Psi_{2\ell}}{X - 2\Psi_{2\ell}}.$$

Выясним, как ведет себя сечение реакции для некоторых простых потенциальных моделей. Рассмотрим следующий потенциал:

$$V = \begin{cases} -V_0 - iW_0, & r < R; \\ \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r}, & r > R. \end{cases}$$

Функция  $\Psi$  равна в этом случае:

$$\Psi = \frac{k_1}{k} \left[ \frac{\ell+1}{k_1 R} - \frac{j_{\ell+1}(k_1 R)}{j_\ell(k_1 R)} \right],$$

где  $k_1 = \sqrt{\frac{2\mu(E + V_0 + iW_0)}{h^2}}$ , а функция  $j_\ell$  следующим образом

связана с бесселевой функцией:

$$j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{\ell+1/2}(z).$$

Интересно выяснить, как ведет себя сечение реакции при различных значениях мнимой части потенциала  $W_0$ . Интуитивно можно было бы ожидать роста сечения по мере увеличения  $W_0$ , поскольку при этом возрастает поглощение. Вычисления, однако, показывают, что сечение реакции /равное нулю при  $W_0 = 0$ / растет при изменении  $W_0$  в некотором интервале, а затем начинает убывать. На *рис. 1, 2* приведены зависимости сечений реакции от энергии падающей частицы для различных значений  $W_0$  на примере реакции  $(^{16}\text{O}, ^{27}\text{Al})$ .  $V_0 = 2,0627 \text{ МэВ}$ ,  $R = r_0 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3})$ ,  $r_0 = 1,5 \text{ Фм}$ .

Из *рис. 1, 2* следует, что сечение реакции максимально при  $W_0$  порядка  $5 \text{ МэВ}$ . На *рис. 3, 4* приведены парциальные проницаемости  $T_\ell(E)$  как функции углового момента  $\ell$  для энергии  $E_{LAB} = 120 \text{ МэВ}$  и для различных значений мнимой части потенциала  $W_0$ . Из *рис. 3, 4* следует, что парциальные проницаемости также

Рис. 1. Сечения реакции ( $^{16}\text{O}, ^{27}\text{Al}$ ) в модели с комплексной прямоугольной ямой. Цифры у кривых означают глубину /в МэВ ах/ мнимой части потенциала.

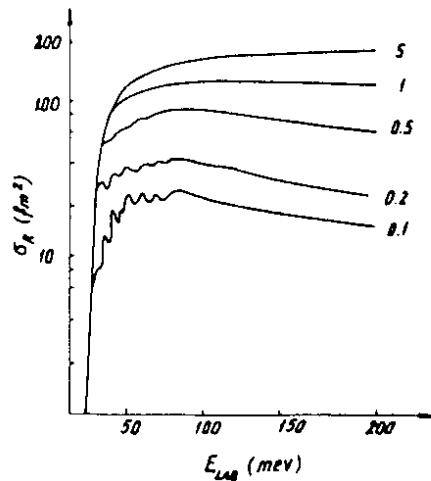
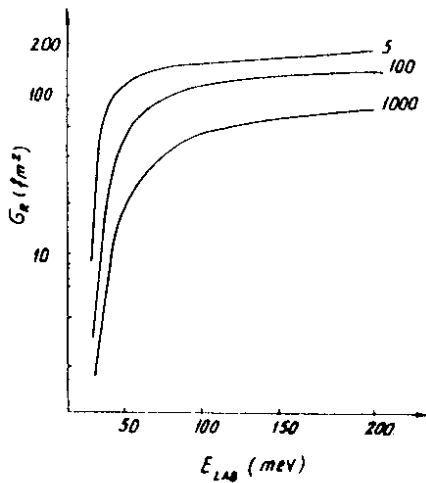


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для других значений глубины мнимой части потенциала.

имеют максимум при  $W_0 \approx 5 \text{ МэВ}$ , т.е. коррелируют с ходом сечений реакции.

Легко видеть, что причина подобного поведения сечений и проницаемостей состоит в том, что  $S$ -матрица стремится к унитарному пределу как при  $W_0 \rightarrow 0$ , так и при  $W_0 \rightarrow \infty$ . Первое очевидно, поэтому докажем второе утверждение. Выпишем парциальную  $S$ -матрицу:

$$S_{\ell} = \frac{k f_{\ell}^{(2)}(kR) j_{\ell}(k_1 R) - k_1 j_{\ell}'(kR) f_{\ell}^{(2)}(kR)}{k f_{\ell}^{(1)}(kR) j_{\ell}(k_1 R) - k_1 j_{\ell}'(k_1 R) f_{\ell}^{(1)}(kR)}$$

где  $f_{\ell}^{(1)}, f_{\ell}^{(2)}, j_{\ell}^{(1)}, j_{\ell}^{(2)}$  есть сходящаяся и расходящаяся кулоновские функции и их производные:

$$f_{\ell}^{(1,2)} = G_{\ell}(\eta, kR) \pm i F_{\ell}(\eta, kR),$$

$$j_{\ell}^{(1,2)} = \frac{df_{\ell}^{(1,2)}}{d(kr)} \Big|_{r=R}$$

При  $W_0 \rightarrow \infty$  имеем:

$$k_1 = k_w(1+i),$$

$$j_{\ell} = \exp(k_w R) \exp[-i(k_w R - \frac{\ell+1}{2}\pi)],$$

$$j_{\ell}' = (1-i) \exp(k_w R) \exp[-i(k_w R - \frac{\ell+1}{2}\pi)],$$

$$k_w = \sqrt{\frac{\mu W_0}{\hbar^2}},$$

$$S_{\ell} \approx \frac{f_{\ell}^{(2)}}{f_{\ell}^{(1)}},$$

что и требовалось доказать.

Рис. 3. Проницаемости  $T_l(E)$  как функции углового момента для различных глубин мнимой части потенциала. Реакция  $(^{16}\text{O}, ^{27}\text{Al})$ , энергия  $E_{\text{лаб}} = 120 \text{ МэВ}$ .

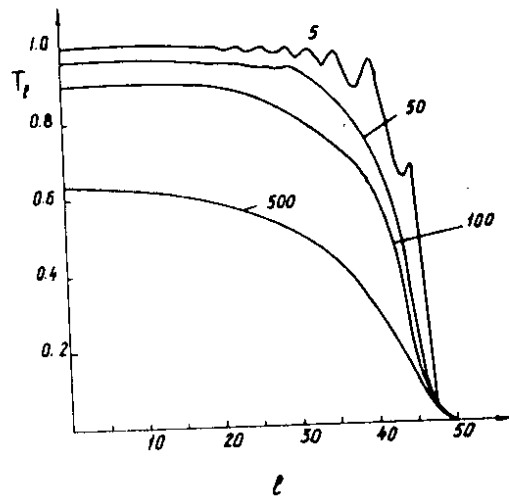
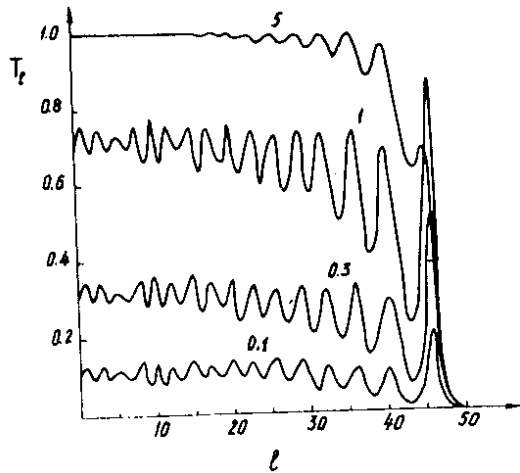


Рис. 4. То же, что на рис. 3, но для других значений мнимой части потенциала.

Итак,  $S$ -матрица стремится к унитарному пределу как при малых  $W_0$ , так и при больших  $W_0$ . Физическая причина этого состоит в следующем. При малых  $W_0$  падающая волна, проходя через область действия мнимого потенциала, почти не ослабляется и сумма коэффициентов отражения и прохождения по абсолютной величине незначительно отличается от единицы. При больших  $W_0$  восстановление унитарности связано с тем, что большая величина комплексного потенциального барьера препятствует проникновению частиц в область  $r < R$ , т.е. практически все, что падает, отражается.

2. Хорошо известно, что кулоновские энергии ядер неплохо описываются формулой

$$E_c = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{a}, \quad /2.1/$$

где

$$a = r_0 A^{1/3}.$$

При получении /2.1/ делаются следующие предположения: 1/ заряд равномерно размазан по сфере радиуса  $a$ ; 2/ потенциальная энергия получается интегрированием кулоновского взаимодействия по объему равномерно заряженного ядра:

$$E_c = \frac{1}{2} \int \rho(r) \rho(r') \frac{1}{|r-r'|} d\vec{r} d\vec{r}', \quad /2.2/$$

причем

$$\rho(r) = \frac{Ze}{\frac{4}{3}\pi a^3} \theta(a-r).$$

Возникает вопрос: нельзя ли при тех же предположениях получить полные энергии связи ядер? В качестве примера рассмотрим все известные альфа-частичные ядра от  $^8\text{Be}$  до  $^{60}\text{Zn}$ . Такие ядра взяты нами исключительно ради удобства, чтобы исключить из рассмотрения члены нуклон-нуклонного потенциала, зависящие от спина и изоспина. Предполагаем далее, что энергии ядер могут быть описаны формулами типа /2.2/, где, однако, вместо ку-

лоновского взаимодействия взято взаимодействие между альфа-частицами. В качестве такого взаимодействия мы использовали два варианта: суперпозицию притягивающего и отталкивающего потенциалов Юкавы и такую же суперпозицию экспоненциальных потенциалов:

$$V_{ю} = V_1 \frac{e^{-\mu_1 r}}{r} - V_2 \frac{e^{-\mu_2 r}}{r} + \frac{4e^2}{r}, \quad /2.3/$$

$$V_{э} = V_1 e^{-\mu_1 r} - V_2 e^{-\mu_2 r} + \frac{4e^2}{r}.$$

Последний член в этих формулах описывает кулоновское расталкивание альфа-частиц. Полная энергия выглядит в этом случае следующим образом:

$$\xi_{ю} = \frac{9}{4} A^2 [V_1 \mu_1 \phi(\mu_1 a) - V_2 \mu_2 \phi(\mu_2 a)] + \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{a}, \quad /2.4/$$

$$\xi_{э} = \frac{9}{4} A^2 [V_1 \psi(\mu_1 a) - V_2 \psi(\mu_2 a)] + \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{a},$$

где через  $\phi(x)$ ,  $\psi(x)$  мы обозначили следующие функции:

$$\phi(x) = \frac{1}{x^6} \left[ 1 - x^2 + \frac{2}{3} x^3 - (x+1)^2 e^{-2x} \right], \quad /2.5/$$

$$\psi(x) = \frac{5}{x^6} + \frac{4}{3} \frac{1}{x^3} - \frac{3}{4} \frac{1}{x^4} - e^{-2x} \left( \frac{5}{x^6} + \frac{10}{x^5} + \frac{7}{x^4} + \frac{2}{x^3} \right).$$

Параметры  $V_1$ ,  $\mu_1$ ,  $V_2$ ,  $\mu_2$  варьировались и подбирались таким образом, чтобы получить наилучшее согласие с экспериментальными энергиями связи. Параметр  $a$  выбран равным

$$a = 1,45 \cdot A^{1/3}.$$

Для  $a$ - $a$  взаимодействия, являющегося комбинацией юкавовских потенциалов, мы отыскивали несколько наборов параметров, которые приводят к локальным минимумам с примерно одинаковыми  $\chi^2$ . Не претендуя на то, что мы отыскивали абсолютный минимум, приведем в табл. 1 экспериментальные и вычисленные по формуле /2.4/ энергии связи известных альфа-частичных ядер, отвечающие наиболее глубокому из полученных минимумов. Параметры, отвечающие этому минимуму, равны:

$$V_1 = 0,774 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}; \quad \mu_1 = 6,861 \text{ Фм}^{-1};$$

$$\mu_2 = 0,91246 \text{ Фм}^{-1}; \quad V_2 = 25,05 \text{ МэВ} \cdot \text{Фм}.$$

Если абсолютную и относительную невязки определить как

$$\Delta_{\text{абс}} = \sum_i | E_{\text{выч}}^{(i)} - E_{\text{экс}}^{(i)} |,$$

$$\Delta_{\text{отн}} = \left[ \frac{1}{n} \sum_i \left( \frac{E_{\text{выч}}^{(i)} - E_{\text{экс}}^{(i)}}{E_{\text{экс}}^{(i)}} \right)^2 \right]^{1/2},$$

то для рассматриваемого случая они равны:

$$\Delta_{\text{абс}} = 10,34 \text{ МэВ},$$

$$\Delta_{\text{отн}} = 2,73 \cdot 10^{-4}.$$

Еще раз отметим, что для комбинации юкавовских потенциалов можно отыскать целый ряд значений  $V_1$ ,  $\mu_1$ ,  $V_2$ ,  $\mu_2$ , а приводящих к невязкам того же порядка.

С другой стороны, при использовании комбинации экспоненциальных потенциалов мы не наблюдаем ничего похожего. Нам не удалось отыскать параметров  $V_1$ ,  $\mu_1$ ,  $V_2$ ,  $\mu_2$ , приводящих к более или менее правильным энергиям связи для рассматриваемых ядер в случае суперпозиции экспоненциальных потенциалов. Наилучшая невязка, достигаемая для набора экспоненциальных потенциалов, на 2-3 порядка превышает соответствующую невязку для юкавовских потенциалов. Заметим также, что в случае юкавовских потенциалов энергия связи /в минимуме! / практически не зависит от величины первого члена в /2.4/, отвечающего отталкиванию на малых расстояниях.

Таблица 1  
Вычисленные и экспериментальные энергии связи  
альфа-частичных ядер

Ядро	$E_{\text{экс.}}$	$E_{\text{выч.}}$
Be <sup>8</sup>	56,2136	56,3178
C <sup>12</sup>	91,049	91,0036
O <sup>16</sup>	126,829	126,686
Ne <sup>20</sup>	162,997	162,804
Mg <sup>24</sup>	199,26	199,06
Si <sup>28</sup>	235,446	235,276
S <sup>32</sup>	271,447	271,336
Ar <sup>36</sup>	307,187	307,164
Ca <sup>40</sup>	342,617	342,704
Ti <sup>44</sup>	377,699	377,918
Cr <sup>52</sup>	412,407	412,777
Fe <sup>52</sup>	446,721	447,259
Ni <sup>56</sup>	484,010	484,510
Zn <sup>60</sup>	515,020	515,920

Для иллюстрации в табл. 2 приведены значения  $V$ ,  $\mu$  и  $\Delta_{\text{абс}}$  в некоторых локальных  $\chi^2$ -минимумах. Ввиду практической неизменности невязки при вариации глубины потенциала отталкивания в широких пределах мы в дальнейшем ограничимся случаем только притягивающего потенциала с параметрами

$$V = 25,425 \text{ МэВ}; \mu = 0,911 \text{ Фм}^{-1}.$$

По аналогии с кулоновским потенциалом равномерно заряженной сферы можно вычислить потенциал, оперируя взаимодействием типа /2.3/. Ограничиваясь случаем юкавовских потенциалов, находим следующий потенциал, описывающий взаимодействие альфа-частицы с ядром:

$$V_{\alpha, N}(r) = \int \rho(r') V(|\vec{r} - \vec{r}'|) d\vec{r}' =$$

$$\left\{ \begin{aligned} &= \frac{3V_0 A}{a^2} \left[ 1 - \frac{\text{sh} \rho}{\rho} (1+a) e^{-a} \right] + \frac{3}{2} \frac{Z e^2}{a^3} \left( a^2 - \frac{r^2}{3} \right), \quad r < a \\ &= \frac{3V_0 A \mu}{a^2} \left( \text{ch} a - \frac{\text{sh} a}{a} \right) \frac{e^{-\rho}}{\rho} + \frac{Z e^2}{r}, \quad r > a, \end{aligned} \right. \quad /2.6/$$

где мы положили

$$a = \mu a, \quad \rho = \mu r.$$

Первый член в /2.6/ соответствует ядерной части взаимодействия, а второй - кулоновской части. В случае, если ядерная часть ( $a$ ) взаимодействия есть комбинация юкавовских потенциалов, соответствующая комбинация появляется и в /2.6/.

Чтобы получить потенциал взаимодействия между двумя ядрами /тяжелыми ионами/ следует, зафиксировав расстояние между центрами ионов, проинтегрировать по всем остальным переменным. Для случая суперпозиции юкавовских потенциалов результат выражается в аналитическом виде. Приведем результат вычислений только для потенциала, состоящего из юкавовского притягивающего и кулоновского отталкивательного



Таблица 2  
Положение некоторых  $\chi^2$ -минимумов

No	$V_1$	$\mu_1$	$\mu_2$	$V_2$	$\Delta_{abc}$
1	199,25	8,7	33,7	1,01	11,13
2	24,97	10,02	26,2	0,92	10,63
3	0	0	25,425	0,911	10,57

Примечание: Для третьего минимума варьировались только параметры  $V_2, \mu_2$ .

взаимодействий. Потенциал определяется различными аналитическими выражениями в следующих трех областях изменения переменной  $R$ .

При  $R > a_1 + a_2$

$$V(R) = \frac{9A_1A_2\mu}{a_1^2a_2^2} \left( \text{ch}a_1 - \frac{\text{sh}a_1}{a_1} \right) \left( \text{ch}a_2 - \frac{\text{sh}a_2}{a_2} \right) V_0 \frac{e^{-\rho}}{\rho} + \frac{Z_1Z_2e^2}{R},$$

где  $a_1 = \mu a_1$ ,  $a_2 = \mu a_2$ ,  $\rho = \mu R$ ,  $a_1, a_2$  - радиусы ионов,  $A_1, Z_1, A_2, Z_2$  - зарядовые и массовые числа ионов. При  $a_1 + a_2 > R > a_2 - a_1$

$$V(R) = \frac{9}{2} \frac{A_1A_2}{a_1^3a_2^3} V_0 \mu \left\{ \frac{\rho^3}{24} + \frac{\rho}{2} \left( 1 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \right) + \frac{a_1^3 + a_2^3}{3} + \frac{1}{\rho} \left[ 1 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} - \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{8} \right] - (1 + a_1)(1 + a_2) e^{-\frac{(a_1 + a_2)\text{sh}\rho}{\rho}} + \frac{e^{-\rho}}{\rho} \left[ (1 - a_1a_2) \text{ch}(a_2 - a_1) - (a_2 - a_1) \text{sh}(a_2 - a_1) \right] \right\} + \frac{9}{2} \frac{Z_1Z_2e^2}{a_1^3a_2^3} \left\{ 1 - \frac{R^5}{720} + R^3 \frac{a_1^2 + a_2^2}{48} - R^2 \frac{a_1^3 + a_2^3}{18} + R \frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{16} - \frac{a_1^5 + a_2^5}{30} + \frac{a_1 + a_2}{6} a_1^2 a_2^2 + \left( \frac{a_1^6 + a_2^6}{144} + \frac{a_1^3 a_2^3}{9} - \frac{a_1^2 + a_2^2}{16} a_1^2 a_2^2 \right) \frac{1}{R} \right\}.$$

Рис. 5. Сечения реакции ( $^{12}\text{C}, ^{12}\text{C}$ ) в рамках оптической модели. Выбор реальной части потенциала обсуждается в тексте, мнимая часть потенциала пропорциональна реальной. Цифры у кривых означают коэффициент пропорциональности между мнимой и реальной частями.

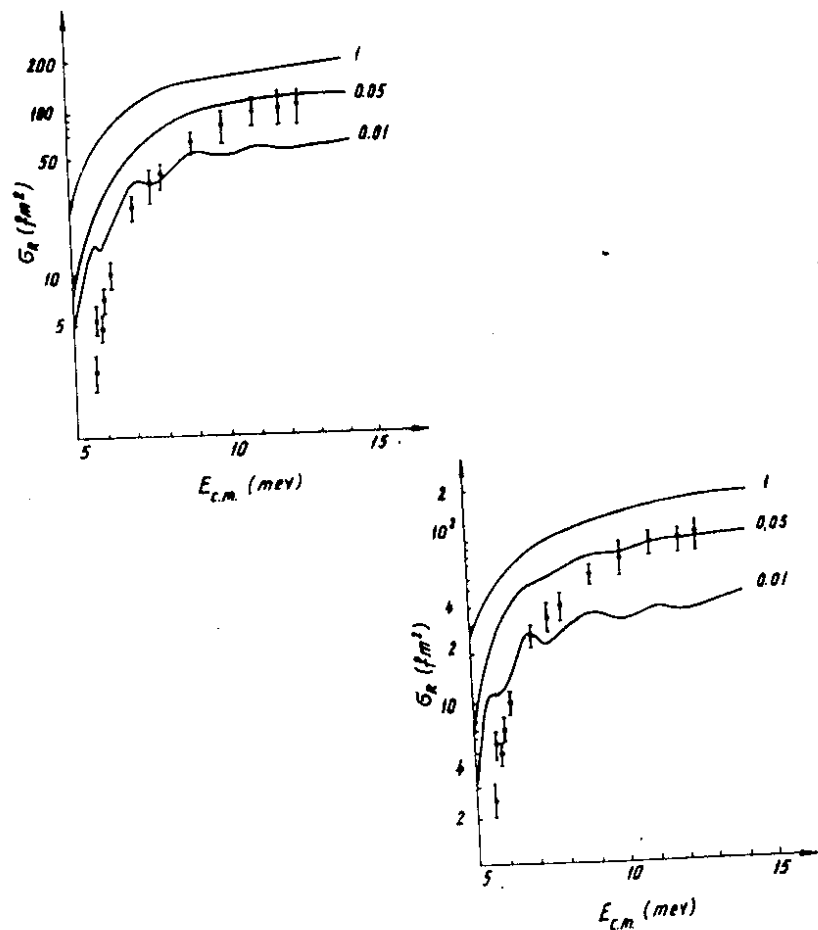


Рис. 6. То же, что на рис. 5, для случая, когда мнимая часть потенциала пропорциональна производной от вещественной части.

Наконец, при  $0 < R < a_2 - a_1$  имеем:

$$V(R) = \frac{3V_0 A_1 A_2 \mu}{a_1^3 a_2^3} \left[ a_1^3 - 3e^{-a_2} \frac{1+a_2}{\rho} \operatorname{sh} \rho (a_1 \operatorname{ch} a_1 - \operatorname{sh} a_1) \right] + \frac{3}{a_2^3} Z_1 Z_2 e^2 \left( \frac{a_2^2}{2} - \frac{a_1^2}{10} - \frac{R^2}{6} \right).$$

Этот потенциал напоминает широко используемый в описании упругого рассеяния тяжелых ионов потенциал типа Вудса-Саксона. Мнимая часть потенциала выбиралась пропорциональной либо самой вещественной части потенциала ( $W = W_0 \cdot V$ ), либо ее производной. В качестве иллюстрации на рис. 5, 6 приведены сечения возбуждения реакции ( $^{12}\text{C}, ^{12}\text{C}$ ) для нескольких значений  $w_0$ . Экспериментальные данные взяты из работы [6]. Констатируем возможность удовлетворительного фитирования с помощью только одной константы  $w_0$ .

Окончательное суждение о пригодности построенного потенциала можно вынести только после обработки более широкого опытного материала с использованием данных по упругому рассеянию.

#### Литература

1. Г.Н.Афанасьев, М.Б.Добромыслов, Ким Ынг Пхунг. Сообщение ОИЯИ, Р4-9564, Дубна, 1976.
2. T.D.Thomas. Phys.Rev., 116, 703, 1976.
3. R. Anni, L.Taffara. Nuovo Cim., 31A, 321, 1976.
4. H.L. Harney, P.Braun-Munzinger, G.K.Gelbke. Z.Phys., 269, 339 (1974).

5. J.P. Vary, C.B.Dover. Invited paper for the Second High Energy Heavy Ion Summer Study, Lawrence Berkeley Lab. (July, 15-26, 1974). Preprint BNL-19360, Sept. 1974.
6. E.Almqvist, J.A.Kuehner, D.Mc Pherson and E.W.Vogt. Phys. Rev., 136, B84 (1964); E.W.Vogt, D.Mc Pherson, J.Kuehner and E.Almqvist. Phys.Rev., 136, B99 (1964).

*Рукопись поступила в издательский отдел  
21 июня 1976 года.*