СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р4 - 9819

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

V. Модифицированное уравнение Фаддеева

1976

Р4 - 9819

В.Н.Ефимов

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВОЛНОВОЙ ФУНКЦИИ ТРЕХ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ЧАСТИЦ В МОДЕЛИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

V. Модифицированное уравнение Фаддеева

Ефимов В.Н.

Р4 - 9819

Интегральное уравнение для волновой функции трех тождественных частиц в модели граничных условий. V. Модифицированное уравнение Фаддеева

Рассмотрено связанное состояние с нулевым полным угловым моментом трех тождественных бозонов, взаимодействующих только в относительных s-состояниях. Для взаимодействий, описываемых моделью граничных условий, в явном виде получено однозначное одномерное уравнение. Это уравнение следует рассматривать как модификацию уравнения Фаддеева, которое в обычной форме в этом случае не имеет однозначного решения. Рассчитана энергия связи трех бозонов.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Efimov V.N.

P4 - 9819

The Integral Equation for the Wave Function of Three Identical Particles in the Boundary Condition Model. IV. The Modified Faddeev Equation

The bound state with zero total anguler momentum of three identical bosons interacting only in s-states has been considered. It is obtained in a visible way the unique one-dimensional integral equation in the case of pair s-interaction described by the boundary condition model. This equation is the modified form of the Faddeev's equations which themselves have no unique solution in this case. The binding energy of a system of three bosons is calculated.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. Введение

В предыдущих сообщениях [1,2] была рассмотрена простейшая трехчастичная система - связанное состояние с нулевым полным угловым моментом трех бесспиновых тождественных частиц, взаимодействующих только в относительных s-состояниях. В этом случае трехчастичная волновая функция $\Psi(\vec r_1, \vec\rho_1)$ зависит от r_1, ρ_1 и угла между $\vec r_1$ и $\vec\rho_1$ и следующим образом выражается через функцию канала $\psi(r,\rho)$ [3]:

$$\Psi(\vec r_1, \vec\rho_1) = \psi(r_1,\rho_1) + \psi(r_2,\rho_2) + \psi(r_3,\rho_3), \qquad /1/$$

где $\vec r_i$, $\vec\rho_i$ - координаты Якоби ($i = 1,2,3$).

В работах [1,2] предполагалось, что парные s-взаимодействия частиц описываются моделью граничных условий /М.Г.У./ без внешнего потенциала, которую формально можно выразить в виде условий для s-компонент внемассовых двухчастичных волновых функций $\psi_k(r,Z)$ [4]:

$$\psi_k(r,Z) = 0, \quad r < c, \qquad /2/$$

$$c\,\frac{d}{dr}[r\,\psi_k(r,Z)]_{r=c_+} = f[r\,\psi_k(r,Z)]_{r=c_+}, \qquad /3/$$

где радиус граничных условий c и логарифмическая производная f не зависят от энергии Z ($Z \neq k^2$) и являются параметрами модели. Было показано [1], что в этом случае трехчастичное уравнение Шредингера точным образом сводится к одномерному интегральному уравнению /уравнение /28/ работы [1] /, метод получения которого основан только на использовании условий /2/, /3/. В работе [5] это уравнение было решено для значений c и f, соответствующих триплетному s -взаимодействию нейтрона и протона. Для энергии связи трех тождественных бозонов было получено значение $E_0 = 7{,}70$ *МэВ*, которое существенно отличается от значения $E_0 = 12{,}69$ *МэВ*, найденного в работе [6] для той же модельной задачи и для тех же значений параметров c и f непосредственно из уравнения Фаддеева [3] для функции канала $\psi(k,q)$ в импульсном представлении. Это большое расхождение никак нельзя объяснить различием в методах решения соответствующих уравнений, и необходимо дополнительное рассмотрение задачи для подтверждения того или иного результата. Такая возможность возникает, на наш взгляд, если применить метод, развитый в работе [1], к двумерному уравнению Фаддеева, что также позволяет, как это показано в [2], точным образом свести его к одномерному интегральному уравнению иного вида, чем уравнение /28/, полученное в [1] непосредственно из трехчастичного уравнения Шредингера.

2. *Модифицированное уравнение Фаддеева в модели граничных условий*

Ниже рассматривается связанное состояние трех тождественных бозонов при условии, что полный угловой момент системы равен нулю и частицы взаимодействуют только в относительных s -состояниях. В работе [2] было показано, что если взаимодействия частиц описываются М.Г.У. /2/, /3/, то из уравнения Фаддеева в координатном представлении [7] следует, что функция канала $\psi(r,\rho)$ в /1/ имеет вид:

$$\psi(r,\rho) = \frac{1}{4\pi r\rho}[\theta(c-r)A(r,\rho) + \theta(r-c)\Phi(r,\rho)], \qquad /4/$$

где $\theta(x)=1,\ x>0,\quad \theta(x)=0,\quad x<0,$

$$\Phi(r,\rho) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty q\,dq\; e^{i\sqrt{E_q}\,r}\,\sin q\rho\, Y(q),$$

$$E_q = E - \frac{3}{4}q^2\ , \qquad /5/$$

E- полная энергия системы.

В области $r<c$ функция $A(r,\rho)$ удовлетворяет интегральному уравнению, которое, согласно [1,2], является следствием условия /2/ и при введении новых переменных $R,\ \alpha$:

$$r = R\sin\alpha\ , \qquad \rho = \frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\alpha$$

при фиксированном R одномерно:

$$\theta(c-r)\Big[A(R,\alpha) + \frac{4}{\sqrt{3}}\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\ \frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\,\theta(c-R\sin\alpha')A(R,\alpha')\Big] =$$

$$= -\theta(c-r)F(R,\alpha), \qquad /6/$$

$$F(R,\alpha) = \frac{4}{\sqrt{3}}\int_{|\frac{\pi}{3}-\alpha|}^{\min(\frac{\pi}{3}+\alpha,\ \frac{2\pi}{3}-\alpha)} d\alpha'\,\theta(R\sin\alpha'-c)\,\Phi(R,\alpha'). \qquad /7/$$

Второе уравнение для функций $A(R,\alpha)$ в /4/ и Y(q) в /5/ вытекает из соотношений /11/ и /12/ работы [2]:

$$Y(q) = \frac{2}{\pi}e^{-ic\sqrt{E_q}}\int_0^\infty q'^2 dq'\; T(q,q')e^{ic\sqrt{E_{q'}}}\,Y(q') -$$

$$-\sqrt{3}\,\frac{e^{-ic\sqrt{E_q}}}{f-ic\sqrt{E_q}}\int_c^{2c} R\,dR\int_0^{\arcsin\frac{c}{R}} d\alpha\, A(R,\alpha)\{F_0(q,R) +$$

$$+\frac{c}{R} j_0(q\rho_0)\delta[\theta(\frac{\pi}{6}-\alpha)\sin(\frac{\pi}{3}+\alpha)+\theta(\alpha-\frac{\pi}{6})\sin(\frac{2\pi}{3}-\alpha)-\frac{c}{R}]-$$

$$-\frac{c}{R} j_0(q\rho_0)\delta(\sin|\frac{\pi}{3}-\alpha|-\frac{c}{R})\}, \qquad /8/$$

где

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2-c^2},$$

$$T(q,q') = \frac{c}{f-ic\sqrt{E_q}} \int_{-1}^{+1} dx \frac{\cos p_2 c - f j_0(p_2 c)}{q^2+q'^2-qq'x-E} \times$$

$$\times[\cos p_1 c - ic\sqrt{E_{q'}}\, j_0(p_1 c)],$$

$$p_1^2 = q^2+\frac{1}{4}q'^2-qq'x, \quad p_2^2 = \frac{1}{4}q^2+q'^2-qq'x. \qquad /9/$$

Функция $F_0(q,R)$ в /8/ отлична от нуля только в области

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{c}{R} < \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha \qquad /10/$$

и имеет вид

$$F_0(q,R) = f j_0(q\rho_0) - \frac{3}{4}\frac{qc^2}{\rho_0} j_1(q\rho_0). \qquad /11/$$

При $R<c$, согласно /7/, $F(R,\alpha)=0$, и уравнение /6/ имеет неоднозначное решение /формула /25/ из работы [2] /, в соответствии с чем функция канала /4/ также будет неоднозначна:

$$\psi(r,\rho) = \chi(R)(R^2-2r^2), \quad R=\sqrt{r^2+\frac{4}{3}\rho^2} < c, \qquad /12/$$

где $\chi(R)$ - произвольная функция от R. Заметим, что неоднозначность решения уравнения /6/ в области $R<c$ никак не влияет на вид уравнения /8/ и несущественна при определении полной трехчастичной волновой функции, так как, согласно /1/ и /12/, при $R<c$ будем иметь $\Psi(\vec{r},\vec{\rho})=0$, т.е. вполне определенное значение волновой функции /1/. В области $R>c$ $F(R,\alpha)\neq 0$, и уравнение /6/ имеет однозначное решение. В работе [2] это уравнение решено аналитически и приведены явные выражения для $A(R,\alpha)$ /формулы /19/ - /24//, содержащие функцию $\Phi(r,\rho)$ /5/. Подстановка этих выражений в уравнение /8/ приводит его, согласно /5/, к одномерному интегральному уравнению для одной функции, которое можно записать в виде:

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty qq'dq'[T(q,q')+V(q,q')]\psi(q'), \qquad /13/$$

где

$$\psi(q) = q e^{ic\sqrt{E_q}}\, Y(q),$$

$$V(q,q') = \frac{1}{q'[f-ic\sqrt{E_q}]}[U_1(q,q')+U_2(q,q')], \qquad /14/$$

$$U_1(q,q') = -\frac{3}{2}\int_c^{\frac{2}{\sqrt{3}}c} R\,dR\Big[\frac{4c}{R\cos\alpha_0}\frac{\cos 4\kappa_0}{Q(R)} j_0(q\rho_0) +$$

$$+\frac{\sin 4\kappa_0}{Q(R)} F_0(q,R)\Big] F_1(R,q'), \qquad /15/$$

$$U_2(q,q') = \int_{\frac{2}{\sqrt{3}}c}^{2c} R\,dR\Big\{\sqrt{6}\frac{F_0(q,R)}{\sin(\gamma_0+\frac{\pi}{4})} F_2(R,q') +$$

$$+\left[\sqrt{6}\,\frac{F_0(q,R)\sin\gamma_0}{\sin(\gamma_0+\frac{\pi}{4})}-\frac{4c}{R\cos\alpha_0}\,j_0(q\rho_0)\right]F_3(R,q')\},$$

$$\alpha_0=\arcsin\frac{c}{R},\qquad \kappa_0=\frac{\pi}{2}-\alpha_0,\quad \gamma_0=\frac{4}{\sqrt{3}}(\alpha_0-\frac{\pi}{6}),$$

$$Q(R)=\frac{\sin(4+\frac{4}{\sqrt{3}})\kappa_0}{4+\frac{4}{\sqrt{3}}}-\frac{\sin(4-\frac{4}{\sqrt{3}})\kappa_0}{4-\frac{4}{\sqrt{3}}},$$

$$F_1(R,q)=\int_{\alpha_0}^{\pi/2}d\alpha\, G(R,q,\alpha)\sin\frac{4}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\alpha),$$

$$F_2(R,q)=\int_{\frac{2\pi}{3}-\alpha_0}^{\pi/2}d\alpha\, G(R,q,\alpha)\sin\frac{4}{\sqrt{3}}(\frac{\pi}{2}-\alpha),$$

$$F_3(R,q)=\int_{\alpha_0}^{\frac{2\pi}{3}-\alpha_0}d\alpha\, G(R,q,\alpha),$$

$$G(R,q,\alpha)=e^{i\sqrt{E}\,q(R\sin\alpha-c)}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}qR\cos\alpha). \qquad /16/$$

Уравнение /13/ следует рассматривать как модифицированное уравнение Фаддеева для случая, когда взаимодействия частиц описываются М.Г.У. без внешнего потенциала. Его вывод основан на использовании только двухчастичных граничных условий /2/, /3/ и в этом отношении оно существенным образом отличается от уравнений работ [/8,9/], при получении которых оказалось необходимым ввести дополнительные граничные условия для функций каналов и произвольный трехчастичный параметр. Как видно, корректный учет условий /2/, /3/ позволил получить точным образом уравнение /13/, которое безмодельно на трехчастичном уровне и одномерно в отличие от использованного в работе [/6/] двумерного уравнения Фаддеева[/3/] в импульсном представлении для трех тождественных бозонов с учетом только s -компоненты двухчастичной t -матрицы, соответствующей М.Г.У. Заметим, что из выражений /9/ и /14/ - /16/ следует:

$$T(q,q')=T_2(q',q),\qquad V(q,q')=V_2(q',q),$$

где $T_2(q,q')+V_2(q,q')$ - ядро альтернативного одномерного уравнения /3.16/ работы [/5/], полученного для случая М.Г.У. /2/, /3/ из двумерного трехчастичного уравнения Шредингера и отличающегося от уравнения /3.15/, вытекающего из уравнения /28/ работы [/1/].

Непосредственное решение уравнения /13/ дает возможность определить энергию связи $E_0=-E$ трех бозонов и в соответствии с выражениями /5/, /12/ и формулами /19/ - /24/ работы [/2/] будет однозначным образом определять функцию канала $\psi(r,\rho)$ /4/ в области $R>c$. Однако численное решение уравнения /13/ связано с определенными математическими трудностями, обусловленными медленным затуханием ядра этого уравнения. Последнее обстоятельство не позволяет применить для его решения прямой способ трансформации бесконечного интервала интегрирования в конечный с последующим использованием гауссовских узлов для конечного интервала. Для решения уравнения /13/ был использован метод, описанный в работе [/5/] и заключающийся в разбиении интервала интегрирования в /13/ на два участка:

$$\psi(q)=\frac{2}{\pi}\int_0^{q_0}qq'dq'[T(q,q')+V(q,q')]\psi(q')+$$

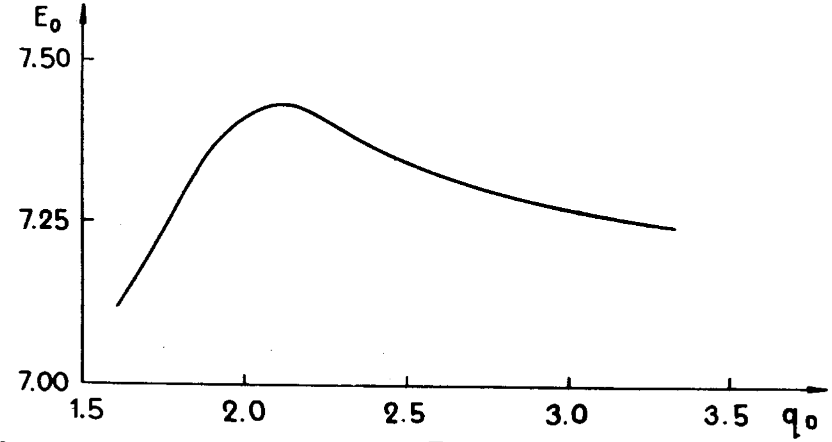
$$+\frac{1}{\pi}\int_{q_0}^{\infty}q\,d(q'^2)[T(q,q')+V(q,q')]\psi(q').$$

Если во втором интеграле ввести новую переменную $x = q'^2 - q_0^2$ и формальный вес $e^{-\alpha x}$, то получим уравнение следующего вида:

$$\psi(q) = \frac{2}{\pi}\int_0^{q_0} qq'dq'[T(q,q')+V(q,q')]\psi(q') + \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} q\, e^{-\alpha x}\, dx[T(q,q')+V(q,q')]\psi(q'). \quad /17/$$

Для $\alpha \neq 0$ решения уравнения /17/ можно получить с помощью стандартного метода использования гауссовских узлов /в первом интеграле - узлов для конечного интервала, во втором - узлов с весом $e^{-\alpha x}$ /. Тогда решение уравнения /13/ можно рассматривать как предел при $\alpha \to 0$ решений уравнения /17/ с $\alpha \neq 0$, определяемый приближенно по нескольким конечным значениям α.

Для определения энергии связи E_0 трех бозонов из уравнения /17/ при f = -0,253 и c=1,095 *ферми*, что соответствует триплетному s -взаимодействию нейтрона и протона, находились значения $E_0(\alpha)$ для α = 0,025, 0,050 и 0,075, с помощью которых определялось предельное значение $E_0 = E_0(0)$. Была исследована зависимость E_0 от параметра q_0 в уравнении /17/, который определяет расположение гауссовских узлов и который можно считать в некотором смысле вариационным параметром. Эта зависимость изображена на *рис. 1*, откуда видно, что при q_0= 2,1 *ферми*$^{-1}$ E_0 имеет максимальное значение E_0 = = 7,43 *МэВ*, которое должно быть сопоставлено со значением E_0 = 7,70 *МэВ*, полученным в работе [5] при решении указанным выше методом одномерного уравнения /3.15/, получающегося из уравнения /28/ работы [1]. При сопоставлении результатов неизбежно возникает вопрос об ошибке, связанной с экстраполяцией в точку α =0 значений $E_0(\alpha)$, получаемых из уравнения /17/ при конечных α. В работе [5] с этой целью было решено совершенно другим методом альтернативное уравнение /3.16/, что привело опять к значению E_0 = 7,70 *МэВ* и позволило дать оценку возможных ошибок используемых методов $\Delta E = \pm$ 0,15 *МэВ*. С учетом этой ошибки полученный выше результат E_0=7,43 *МэВ* очень хорошо согласу-



Зависимость энергии связи E_0 */МэВ/ трех бозонов от параметра* q_0 */ферми*$^{-1}$ */ в уравнении /17/.*

ется с результатом работы [5] и противоречит значению E_0= 12,69 *МэВ*, полученному в [6] на основе решения непосредственно двумерного уравнения Фаддеева.

3. Заключение

Выше было показано, что уравнение Фаддеева в координатном представлении для связанного состояния трех тождественных бозонов при нулевом полном угловом моменте и при условии, что частицы взаимодействуют только в относительных s -состояниях, не имеет однозначного решения, если взаимодействие частиц описывается М.Г.У. /2/, /3/. В работе [2] показано, что из факта неоднозначности /12/ функции канала в этом случае следует неоднозначность решения уравнения Фаддеева [3] в импульсном представлении при учете только s -компоненты двухчастичной t -матрицы, соответствующей М.Г.У. Последнее обстоятельство непосредственно связано с тем, что ядро соответствующего двумерного уравнения Фаддеева имеет бесконечную норму[10], что ставит под сомнение результат E_0 = 12,69 *МэВ*, полученный в работе[6] при решении двумерного уравнения Фаддеева матричным методом. Этот результат оправдывается ссылкой на работу[10], в которой рассчитывается энергия связи трития E_T для потенциала прямоугольной формы с конечным отталкивательным кором V_0 и рассматривается предел E_T при $V_0 \to \infty$, который оказывается совпадающим со значением E_T , получающимся непосредственно при решении уравнений Фаддеева с тем же потенциалом прямоугольной формы и бесконечным отталкивательным кором[11]. Такое оправдание кажется неубедительным, так как модель твердого кора является частным случаем М.Г.У. при $f \to \infty$ в /3/, что приводит, в частности, к исчезновению в $F_0(q,R)$ /11/ наиболее медленно затухающего члена с $q j_1(q\rho_0)$. Это обстоятельство существенным образом меняет вид ядра уравнения /13/, и представляется более логичным использовать модель, предельный вариант которой соответствует М.Г.У. с конечным f в /3/. В работе[12] была рассмотрена модель, соответствующая зависящей от энергии логарифмической производной f в условии /3/ для массовых волновых функций ($Z = E = k^2$):

$$f(E) = f_0 - \gamma c^2 E .$$

При этом оказалось, что в случае $\gamma \neq 0$ для выполнения условия ортогональности массовых волновых функций необходимо отказаться от условия /2/. Такой модели соответствует некоторый зависящий от энергии потенциал, действующий в области $r \leq c$, предельная форма которого при $\gamma \to 0$ соответствует М.Г.У. /2/ и /3/ с $f = \mathrm{const}$. Для значений $\gamma \neq 0$ решались уравнения Фаддеева для трех бозонов и затем отыскивался предел E_0 для $\gamma = 0$. Таким путем в[12] было получено значение $E_0 = 9{,}1$ *МэВ*, что при учете ошибки экстраполяции в точку $\gamma = 0$, оцениваемую в[12] как $\Delta E = \pm 1{,}2$ *МэВ*, в большей степени подтверждает вышеприведенный результат $E_0 = 7{,}43$ *МэВ* и результат[5], чем результат работы[6].

В заключение автор выражает глубокую благодарность И.И.Шелонцеву и Н.Ю.Шириковой за ценные консультации при выполнении численных расчетов.

Литература

1. *В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-8707, Дубна, 1975.*
2. *В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Е4-9745, Дубна, 1976.*
3. *Л.Д.Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 /1960/.*
4. *V.N.Efimov, H.Schulz. Nucl.Phys., A235, 436 /1974/.*
5. *В.Н.Ефимов, Г.Шульц. ОИЯИ, Р4-8895, Дубна, 1975.*
6. *Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Lett., 38B, 354 /1972/.*
7. *H.P.Noyes. Phys.Rev.Lett., 23, 1202 /1969/.*
8. *D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D7, 1835 /1973/.*
9. *D.D.Brayshaw. Phys.Rev., D8, 2572 /1973/.*
10. *Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C4, 693 /1971/.*
11. *Y.E.Kim, A.Tubis. Phys.Rev., C1, 1627 /1970/.*
12. *В.Н.Ефимов. ОИЯИ, Р4-9213, Дубна, 1975.*

Рукопись поступила в издательский отдел
25 мая 1976 года.