

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-42

P4-98-42

В.С.Рихвицкий, А.Г.Гальперин, В.М.Дубовик

ПОЛНАЯ КЛАССИФИКАЦИЯ (АТЛАС) РЕШЕНИЙ
НЕКОТОРОГО 3D-УРАВНЕНИЯ
ЛОТКА—ВОЛЬТЕРРА С КОСОСИММЕТРИЧНОЙ
МАТРИЦЕЙ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в журнал «Physics Letters A»

1998

1. Введение

В известной нам литературе не рассмотрена и, более того, даже не ставилась задача отыскания симметричной классификации решений 3D систем уравнений Лотка–Вольтерра с антисимметричной правой частью при произвольных константах взаимодействий. Однако различные модификации уравнений Лотка–Вольтерра и Вольтерра (хотя они и не всегда распознаются в качестве последних, например, [1],[2]) достаточно часто встречаются во многих областях фундаментальных и прикладных исследований — теории поля и статистической физике, биофизике, физической химии, экономике, социологии и других. Поэтому классификация решений системы (1) представляется нам необходимой и важной задачей.

Проведенный нами качественный анализ выявляет наличие большого числа режимов (классов эквивалентности) решений и устанавливает их связь с симметричными свойствами матрицы взаимодействий. Более того, с установлением новых связей между различными интегрируемыми системами нелинейных уравнений (см., например, [3]), классификация решений системы (1) может оказаться полезной при исследовании и других уравнений.

Настоящей работой мы продолжаем наши исследования ([4, 5, 7, 8]) математической модели (1).

2. Уравнение

Рассматривается обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\dot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}), \quad (1)$$

где

$$\vec{F}(\vec{r}) = \text{diag}(\vec{r})D\vec{r} = \begin{pmatrix} axz - bxy \\ byx - cyz \\ czy - azx \end{pmatrix},$$
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \text{diag}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -b & a \\ b & 0 & -c \\ -a & c & 0 \end{pmatrix},$$

относительно вектор-функции переменных состояния \vec{r} , зависящее от постоянного вектора параметров $\vec{p} = (a, b, c)$, определяющего циклический порядок взаимосвязей компонент вектора \vec{r} (на языках предметных областей – циклический характер взаимодействий между объектами сортов x, y, z , например, биологических видов или цветовых зарядов и т.д.). Для уравнения известны два первых интеграла

$$\begin{aligned} x + y + z &= A, \\ x^c y^a z^b &= C. \end{aligned} \quad (2)$$

3. Векторное поле системы и интегральные кривые

Семейство интегральных кривых в 3D пространстве переменных x, y, z полностью определяется фиксированными значениями параметров a, b, c . В этой работе ставится задача классификации этих семейств с целью дать полный атлас их характерных изображений.

Множество семейств мы разбиваем на классы эквивалентности так, чтобы отождествить те и только те семейства, которые "ведут себя одинаково". Преобразования как пространства переменных, так и пространства параметров, сохраняющие эти классы, образуют группы, называемые внешними симметриями.

В некоторых семействах возможно существование внутренних симметрий (групп преобразований, ведущих к самосовмещению этих семейств, автоморфизмов), которые выделяют данное семейство среди других.

Рассматриваемое уравнение характеризуется в общем положении четырьмя особыми точками. Координаты особых точек уравнения (1) и соответствующих им корней характеристического уравнения

$$\det \left(\frac{dF}{d\vec{r}} - \lambda I \right) = 0$$

в невырожденном случае $A \neq 0$ принимают значения

$$\begin{aligned} \{x = A, y = 0, z = 0\}, \lambda &= \{-a, b\}, \\ \{x = 0, y = A, z = 0\}, \lambda &= \{-b, c\}, \\ \{x = 0, y = 0, z = A\}, \lambda &= \{-c, a\}, \\ \{x = \frac{c}{a+b+c}, y = \frac{a}{a+b+c}, z = \frac{b}{a+b+c}\}, \lambda^2 &= -\frac{abc}{a+b+c}, \end{aligned} \quad (3)$$

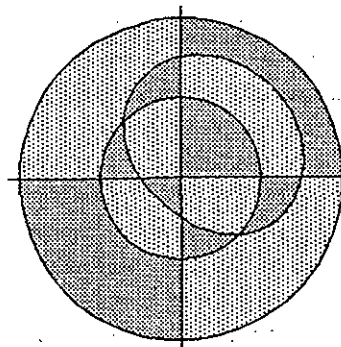


Рис. 1. Развертка сферы в пространстве параметров. Северный полюс в центре, южный - внешняя граница, средний круг - экватор, смещенный овал - сечение сферы наклонной плоскостью.

определяющие поведение интегральных кривых в их окрестностях.

Тип особой точки в первых трех случаях - сходящийся узел, расходящийся узел или седло в зависимости от знаков коэффициентов a, b, c . Тип четвертой точки - седло или центр, что зависит от знаков величин a, b, c и $a + b + c$. В случае $a + b + c = 0$ имеем несобственную особую точку.

Таким образом, последние четыре величины наиболее полно характеризуют векторное поле $\vec{F}(\vec{r})$ и, соответственно, поведение интегральных кривых во всем пространстве состояний в зависимости от выбора вектора параметров. Поэтому следует рассмотреть разбиение пространства параметров плоскостями $a = 0, b = 0, c = 0, a + b + c = 0$ на 14 областей и учесть границы, разделяющие эти области, и точки пересечения границ областей.

4. Центральные симметрии пространства состояний и пространства параметров

Легко видеть, что умножение на число α вектора параметров \vec{p} приводит к умножению на α скорости движения $\dot{\vec{r}}$ при сохранении интегральных кривых. Это позволяет в рамках задачи исследования интегральных кривых ограничиться рассмотрением в пространстве параметров (в качестве

многообразия параметров) поверхности единичной сферы. В дальнейшем мы увидим, что это сфера Пуанкаре.

Почти так же обнаруживается группа гомотетий пространства состояний. Именно, умножение на число α вектора состояния \vec{r} приводит к умножению на α^2 скорости движения $\dot{\vec{r}}$ при сохранении подобия интегральных кривых. После центрального проектирования из центра $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$ плоскости интегральных кривых $x + y + z = \alpha A$ на прежнюю плоскость $x + y + z = A$ (т.е. обратной гомотетии) остается умножение на то же число α в первой степени скорости движения проекции \vec{r} (при сохранении самих интегральных кривых).

Эти масштабные преобразования, действующие в соответствующих пространствах и сохраняющие интегральные кривые, образуют группы симметрий. Центральные симметрии обоих пространств содержатся в них как подгруппы.

Все эти симметрии являются непрерывными, за исключением случая $x + y + z = 0$, выпадающего из гомотетий пространства состояний.

5. Дискретные симметрии пространства состояний и пространства параметров

Пространства состояний и параметров обладают также дискретными симметриями - не в смысле сохранения интегральных кривых, а в смысле отождествления разных фазовых портретов с точностью до поворотов и зеркальных отражений. Это позволяет сократить число вариантов, которые следует рассматривать отдельно.

Пространство параметров, кроме центральной симметрии относительно точки $\{x = 0, y = 0, z = 0\}$, обладает группой симметрий S_3 равнобедренного треугольника относительно перестановки координатных осей. Каждая перестановка значений компонент вектора параметров (a, b, c) соответствует перестановке осей координат (x, y, z) в пространстве состояний

$$\begin{aligned} (c, a, b) &\rightarrow (z, x, y), \\ (b, c, a) &\rightarrow (y, z, x), \\ (b, a, c) &\rightarrow (x, z, y), \\ (a, c, b) &\rightarrow (z, y, x), \\ (c, b, a) &\rightarrow (y, x, z). \end{aligned}$$

Внутренние дискретные симметрии пространства состояний появляются при определенных значениях параметров, что оправдывает выделенность этих значений, ничем другим не отличающихся.

6. Бариецентрическая система координат пространства состояний

Пространство состояний на инвариантной плоскости $x + y + z = 1$ удобно изображать в бариецентрической системе координат (рис.2). Оси x, y и z исходной системы проектируются на нее тремя пересекающимися в трех точках прямыми. Точки пересечения соответствуют координатам $\{x = 0, y = 0, z = 1\}$, $\{x = 0, y = 1, z = 0\}$ и $\{x = 1, y = 0, z = 0\}$. Направление возрастания каждой координаты в этой системе — внутрь образовавшегося треугольника Δ (рис.2).

Пространство разбивается прямыми $x = 0, y = 0$ и $z = 0$ на 7 областей. Первые три особые точки уравнения (1) размещаются в вершинах треугольника Δ , четвертая — на плоскости в какой-либо области или на границе двух областей, в зависимости от выбора вектора параметров. Возможные положения четвертой особой точки и ее тип, определяемые знаками коэффициентов a, b, c (см.(3)), показаны на рис.2. Для определенности, мы положили $a + b + c > 0$. Когда какой-нибудь коэффициент принимает значение ноль, особая точка попадает на соответствующую координатную ось — сторону треугольника Δ . В этом случае вся ось состоит из особых точек, т.е. особой становится вся ось. На рис.2 особые оси отмечены наклонными к осям x, y, z стрелочками.

Формулы значений координат четвертой особой точки (3) показывают, что ее положение в пространстве состояний взаимно однозначно соответствует положению вектора параметров в пространстве коэффициентов (где координаты определяются с точностью до пропорциональности, т.е. положение определяется отношением $a : b : c$, что является моделью проективной плоскости):

$$x : y : z = c : a : b.$$

Как уже отмечалось выше, сфера в пространстве параметров разбивается на 14 областей, внутри которых сохраняются типы всех особых точек. Если перейти к проективному пространству параметров, отождествляя

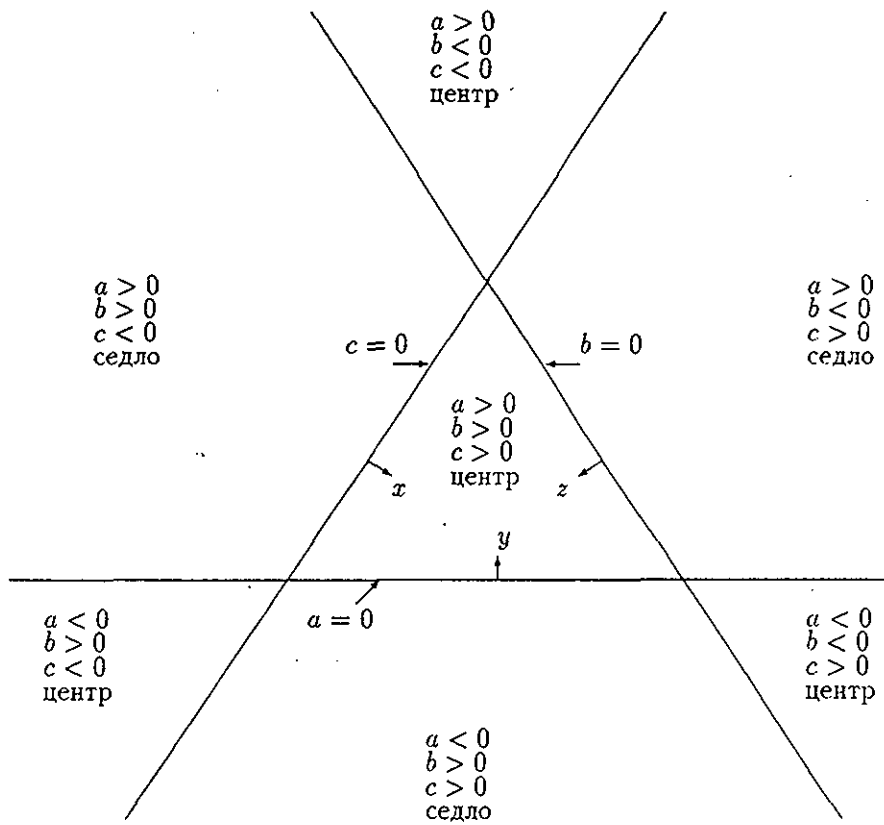


Рис. 2. Барицентрическая система координат системы. Стороны треугольника и их продолжения образуют оси барицентрических координат и разбиение на сектора плоскости состояний системы. В секторах приведены условия попадания в них четвертой особой точки и ее тип (для определенности, $a + b + c > 0$). При неортогональных к осям стрелочках указаны условия попадания особой точки на оси — условия особой оси

диаметрально противоположные точки сферы, областей будет 7, как и в пространстве состояний.

Для того, чтобы в этом сопоставлении не было исключений, рассмотрим плоскость пространства состояний $x + y + z = 1$ как пополненную плоскость — тоже модель проективного пространства. К собственным ее точкам добавляются несобственные точки, соответствующие направлениям (в одной несобственной точке пересекаются все параллельные прямые, имеющие соответствующее ей направление). Множество несобственных точек образует несобственную прямую.

Заметим еще раз, что координаты точек в пространстве состояний x, y, z имеют значения с точностью до пропорциональности, т.е. с точностью до сохранения отношений $x : y : z$. В пространстве (x, y, z) при условии $x + y + z \neq 0$ отношение определяет прямую линию, пересекающую плоскость $x + y + z = 1$ с введенной на ней барицентрической системой координат в собственных точках. Исключенное множество $x + y + z = 0$ на пополненной плоскости попадает на несобственную прямую.

Несобственная прямая разделяет области, на которых четвертая особая точка имеет различный тип. При этом тип каждой из первых трех особых точек при переходе через эту прямую не меняется.

Изменение параметров в пределах одной из 7 областей проективного пространства параметров (и соответствующее ему изменение положения 4-й особой точки в пределах одной области проективного пространства состояний) влечет непрерывную деформацию (дiffeоморфизм) семейства интегральных кривых. Непрерывная группа диффеоморфизмов является внешней симметрией, оправдывающей выбор любого вектора параметров внутри области (любой точки) как достаточно представительного.

Выход на границу области ($a = 0$, либо $b = 0$, либо $c = 0$) дает уже необратимую деформацию семейства интегральных кривых, поэтому на каждом отрезке границы также следует выбрать представительную точку. Также поступаем и на пересечении границ областей.

7. Атлас интегральных кривых и решений

Атлас интегральных кривых — диаграмм состояний — и решений (в функции времени) системы (1) составлен из рисунков, на которых изобра-

жены характерные представители классов эквивалентности решений в смысле раздела 3 настоящей работы.

В атлас включено восемнадцать рисунков, отображающих поведение решений для двенадцати классов эквивалентности, порожденных непрерывными по параметрам a, b, c системы группами диффеоморфизмов.

Каждый из рисунков соответствует определенной конфигурации особых точек системы и составлен из двух подрисунков – левого и правого, содержащих, соответственно, фазовые портреты и решения (значения функций даны в относительных единицах). Семейства интегральных кривых даны на рисунках в плоскостях инвариантов $x + y + z = A$ в барицентрических координатах. В каждой из семи областей разбиения плоскости кривые, принадлежащие классам эквивалентности представленным на рисунках кривым, проходят подобно им, непрерывно отличаясь от соседних и непрерывно заполняя область, причем через каждую точку проходит единственная интегральная кривая. На правом подрисунке каждой вариации изображены зависимости от времени решений x, y, z для одной ветви интегральной кривой, отмеченной значком \circ . Для случаев конечного, т.е. неравного нулю, значения инварианта ($A \neq 0$) выбрана ветвь, проходящая внутри треугольника Δ , если таковая имеется.

Решения для случая $x + y + z \neq 0$ представлены на рисунках 3 ÷ 15. Пяти вариантам расположения и типа собственной четвертой особой точки соответствуют десять рисунков 3 ÷ 12, по два рисунка на каждый вариант, выделяющие случаи с внутренней симметрией, отличающиеся симметрией коэффициентов и соответствующей симметрией векторного поля. При этом случаи особых осей, состоящих из расходящихся и сходящихся узлов, представлены на рисунках 9 ÷ 12. Варианты решений с несобственными особыми точками представлены на рисунках 13 ÷ 15, причем в последнем случае имеются также и две особые оси, что приводит к появлению на плоскости плоскопараллельного поля, имеющего чередующиеся направления в смежных областях разбиения, образованных особыми осями.

Решения для случая вырожденного инварианта $A = 0$ представлены на рисунках 16 ÷ 20. Максимальной центральной симметрией (без учета направлений движения по интегральным прямым) отличается случай, представленный на рис.19, что обусловлено его высокой вырожденностью. Причины возникновения вырожденности отображены в подписи к рисунку. Более подробный анализ дискретных симметрий и других особенностей, связанный с учетом законов движения, здесь не представлен.

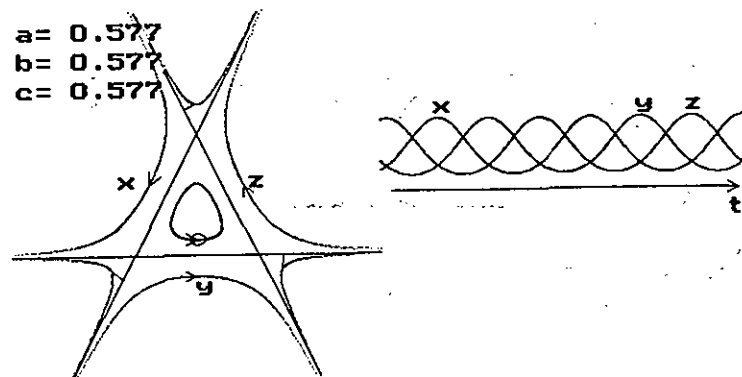


Рис. 3. Симметричный цикл внутри треугольника

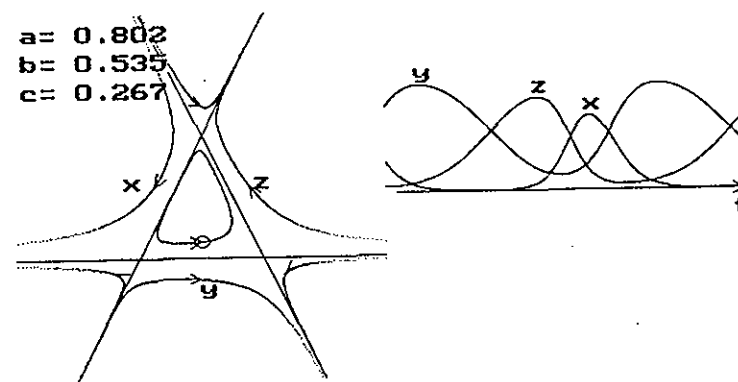


Рис. 4. Асимметричный цикл внутри треугольника

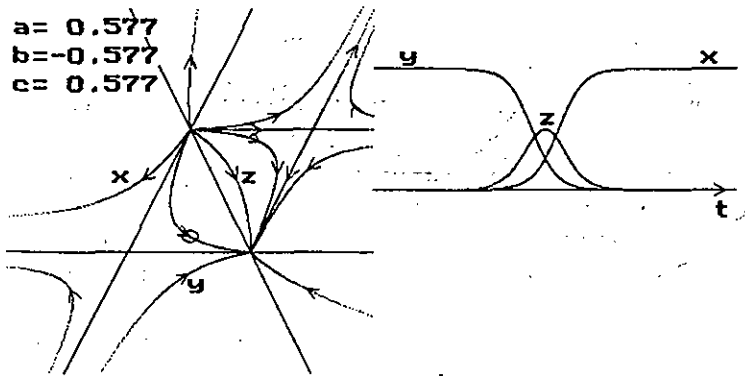


Рис. 5. Симметричное седло в четырехугольнике

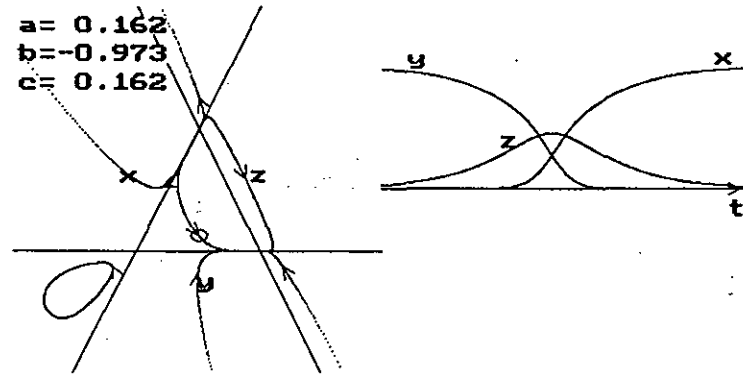


Рис. 7. Симметричный цикл во внешнем треугольнике

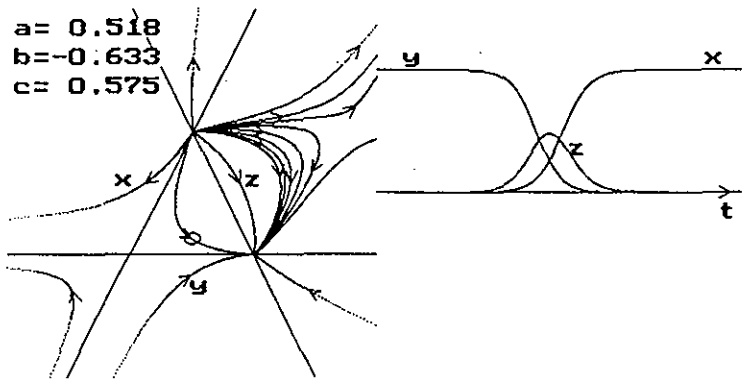


Рис. 6. Асимметричное седло в четырехугольнике

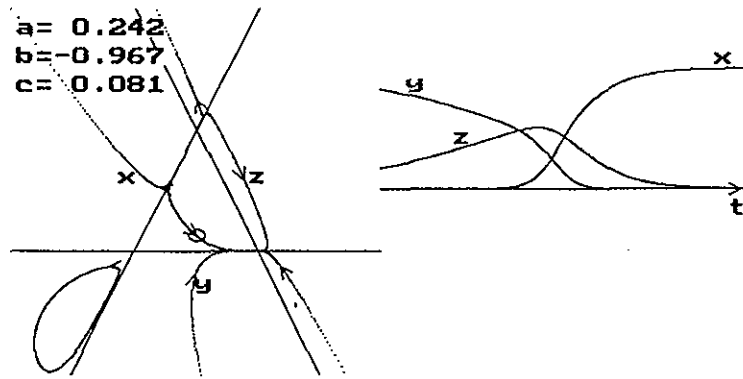


Рис. 8. Асимметричный цикл во внешнем треугольнике

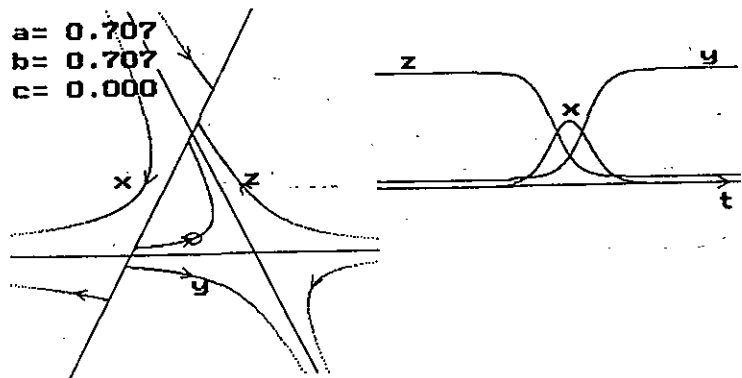


Рис. 9. Симметричное гиперболическое поле

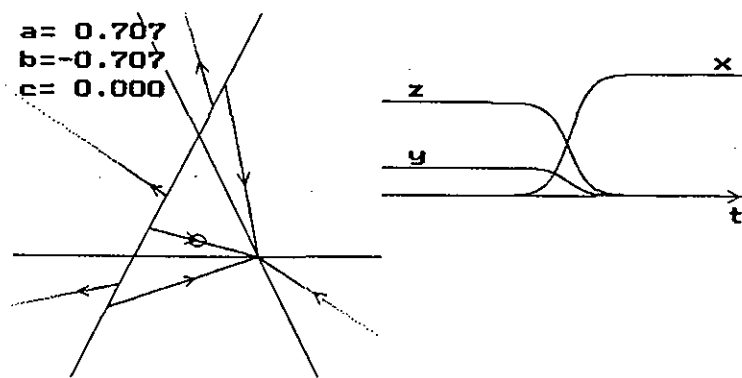


Рис. 11. Симметричное центральное поле

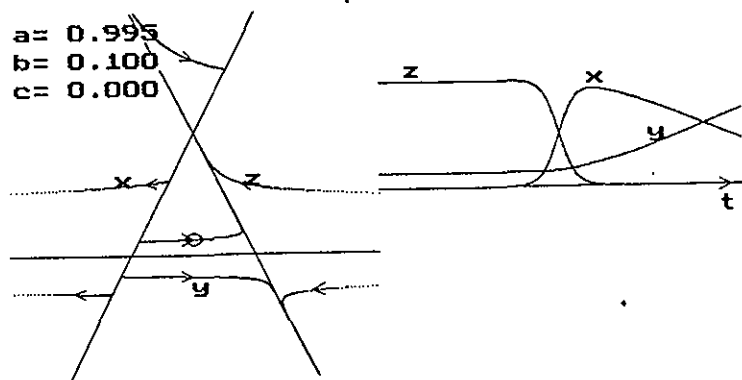


Рис. 10. Асимметричное гиперболическое поле

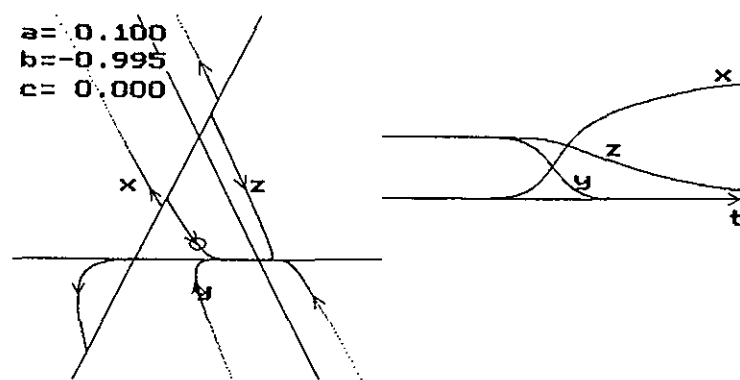


Рис. 12. Асимметричное центральное поле

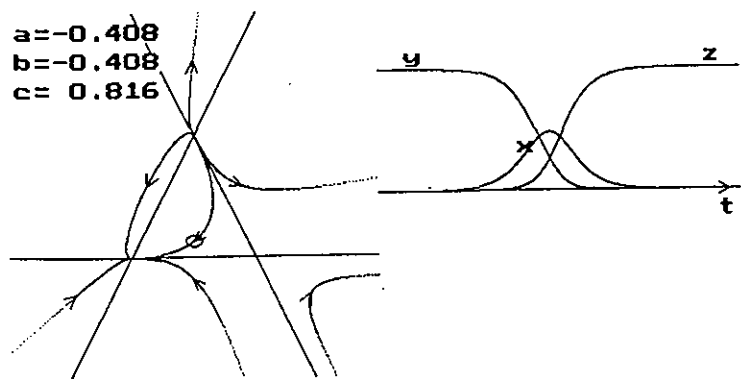


Рис. 13. Несобственная особая точка. Симметричный случай.

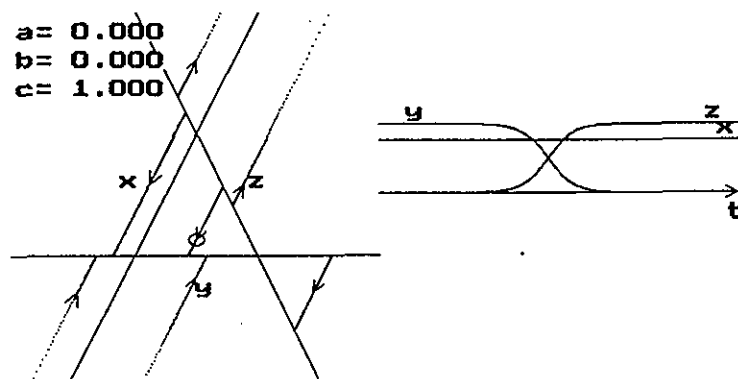


Рис. 15. Плоскопараллельное поле

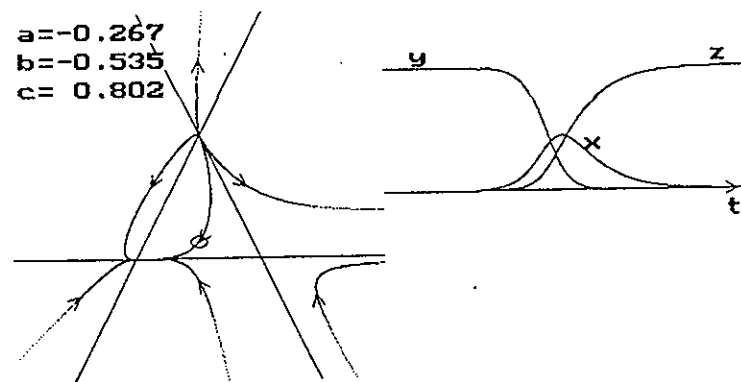


Рис. 14. Несобственная особая точка. Асимметричный случай

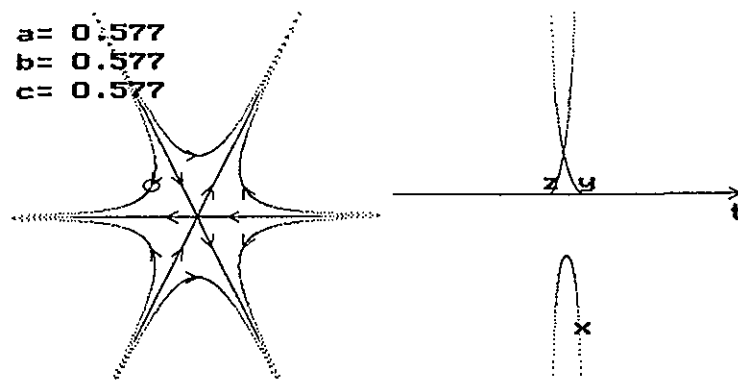


Рис. 16. Случай $x + y + z = 0$. Обезьянье седло

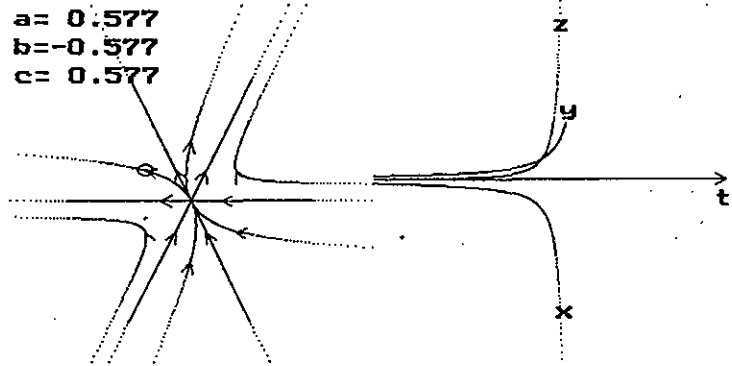


Рис. 17. Случай $x + y + z = 0$. Седлоузел

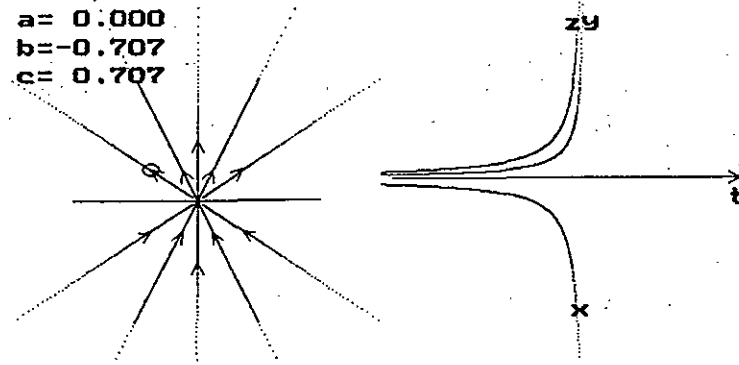


Рис. 19. Случай $x + y + z = 0$. Центральное поле

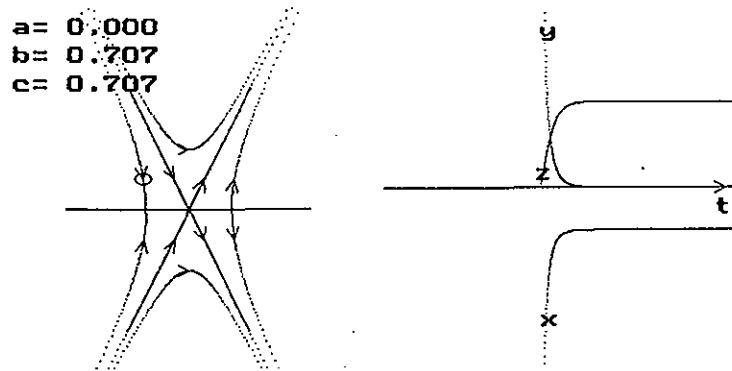


Рис. 18. Случай $x + y + z = 0$. Квазиседло

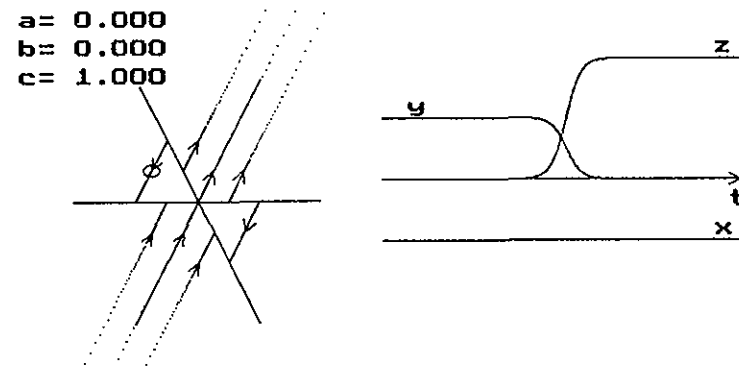


Рис. 20. Случай $x + y + z = 0$. Плоскопараллельное поле

8. Заключение

В настоящей статье нами проведена классификация решений нелинейного ОДУ (1) типа Лотка–Вольтерра (системы), основанная на качественном анализе. Взаимно однозначное соответствие между пространством коэффициентов и пространством состояний уравнения (1) позволяет указать соответствие между положением вектора коэффициентов и положением и типами особых точек, а также связанных с ними качественно различными вариантами поведения интегральных кривых.

В прикладных исследованиях, использующих нелинейные математические модели, диаграммы состояний (фазовые портреты) и графики временных зависимостей оказываются полезным и очень удобным инструментом (см., например, [9]). Типичные картины векторных полей уравнений (1) приведены в атласе. Всего выделено 12 основных вариантов, остающихся после учета внешних симметричных свойств. Следует обратить внимание на то, что случаи $A = 0$ и $A = \text{const} \neq 0$ (см.(2)) представляют две разные задачи, поскольку при переходе от ненулевого значения плоского инварианта к нулевому происходит скачком изменение симметрии задачи, а именно, появляется внутренняя центральная симметрия.

Установленная нами проективная природа пространства параметров и пространства состояний в отношении семейств интегральных кривых в пространстве состояний, а также их изоморфизм относительно групп преобразований пространства параметров составляют основу построения классификации решений.

9. Благодарности

Авторы благодарят С.К.Слепнева (ОИЯИ) за полезное обсуждение.

Список литературы

1. V.E.Zakharov, S.L.Musher, and A.M.Rubenchik. JETP Lett. **19**, 151, (1974).
2. Д.Гильберт, С.Кон-Фоссен. Наглядная геометрия. М.: Наука, 1981.
3. В.Э.Адлер, А.Б.Шабат. *Об одном классе цепочек Тоды*. ТМФ. 1997. Т.111, N.3, С.323-334.

4. V.M.Dubovik, A.G.Galperin, V.S.Richvitsky. *The correspondence between chemical schemes and dynamical Lotka-Volterra systems*, JINR communication, E4-97-417. Dubna. 1997.
5. V.Dubovik, A.Galperin, V.Richvitsky, and S.Slepnyov. *The conditions of existence of first integrals and Hamiltonian structures of Lotka-Volterra and Volterra systems*, in SYMPHYS97. Dubna, 1997 (to be published in Yad.Fiz).
6. V.M.Dubovik, A.G.Galperin, V.S.Richvitsky, S.K.Slepnyov. *The conditions of existence of first integrals and Hamiltonian structures of the Lotka-Volterra equations. Comment on some recent papers.* Preprint JINR E4-97-416, Dubna, 1997.
7. А.Г.Гальперин, В.М.Дубовик, В.С.Рихвицкий. *Нелинейная динамическая модель эволюции трехкомпонентной системы с сохранением суммарного числа объектов*. Препринт ОИЯИ P4-97-340, Дубна, 1997.
8. A.G.Galperin, V.M.Dubovik, V.S.Richvitsky. *Nonlinear dynamical model of evolution of a 3-component system conserving total number of objects*. Int. Conf. CMCP96. JINR. D5. 11-96-300, p.69, Dubna, 1996.
9. Ю.П.Романовский, Н.В.Степанова, Д.С.Чернавский. *Математическая биофизика*. М.:ГИФМЛ, 1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
11 марта 1998 года.