



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

98-176

P4-98-176

Б.Н.Захарьев, В.М.Чабанов, В.В.Торчинов*

НОВЫЕ СТЕПЕНИ СВОБОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО
УПРАВЛЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИМИ СИСТЕМАМИ
(Изменение «нефизических» спектральных параметров)

*Московский физико-технический институт

ВВЕДЕНИЕ

Под интуицией я разумею не веру в шаткое свидетельство чувств и не обманчивое суждение беспорядочного воображения, но понятие ясного и внимательного ума настолько прямое и отчетливое, что оно не оставляет никакого сомнения...

Рене Декарт

Замечательное преимущество подхода обратной задачи заключается в том, что входными данными являются наблюдаемые свойства (параметры $S(E)$), что дарит нам возможность теоретически управлять квантовыми системами: подбирать взаимодействия $V(x)$ так, чтобы по нашему желанию менялись характеристики конструируемого объекта [1-3].

Более того, мы часто имеем *полный набор элементарных преобразований*, отвечающих произвольным сдвигам собственных значений E_ν по шкале энергий и локализации волновых функций в пространстве (вариациями спектральных весовых параметров c_ν или M_ν). Можно порождать и устранять произвольные энергетические уровни, менять параметры квазисвязанных (резонансных) состояний. При этом математический аппарат обратной задачи и суперсимметрии (SUSYQ) дает нам точные и простые аналитические (замкнутые) выражения для таких преобразований¹. Параметры типа E_ν , M_ν играют как бы роль кнопок или рычагов на "пульте управления" спектральными свойствами. Это позволило открыть правила квантового дизайна: (новая квантовая азбука) [1-3].

Теория освобождает нас от очень стеснительных ограничений рассмотрения только сравнительно редких объектов (реальных или стандартных модельных), составляющих множество меры нуль среди всех мыслимых систем (дискретные точки в континууме возможностей). Непрерывные преобразования наблюдаемых свойств объектов, разной природы друг в друга наводят мостики скрытых связей между ними, поднимая понимание квантовых закономерностей на новый уровень.

В данной работе мы рассмотрим расширение класса таких преобразований.

¹Вариации одного или конечного числа спектральных параметров сводятся к решению одного или нескольких алгебраических уравнений (тем большего числа, чем больше меняется параметров).

"НЕФИЗИЧЕСКИЕ" СОСТОЯНИЯ

Данному оператору Шредингера отвечают определенные граничные условия. Эти условия можно накладывать в соответствии с физическими требованиями. Но имеется еще бесчисленное множество ("математических") способов задания поведения решений на концах (или асимптотиках) области движения волн. И в каждом таком случае имеется свой набор спектральных параметров, однозначно фиксирующих форму потенциала $V(x)$. Вариация отдельных "математических" параметров приводит к изменению потенциала, которого можно добиться только изменением бесконечного числа физических параметров. По теореме о двух спектрах [1,4]² (например, одного физического и одного нефизического) два набора собственных значений без весовых факторов тоже фиксируют вид $V(x)$. При этом изменение одного собственного значения в двух наборах при фиксированном положении остальных (что описывается точными моделями [5]) приводит к изменению всех (!) весовых факторов (в такой постановке задачи они не фиксированы). Порождение нефизических состояний возможно и с помощью SUSYQ-преобразований (Дарбу) [6]. Таким образом, резко расширяется класс точно решаемых квантовых моделей, представляющих большую ценность благодаря удобству пользования ими.

Интересным примером может служить случай симметричных преобразований осцилляторного потенциала $V(x)$, когда уровни связанных состояний на всей оси x (один спектр) одновременно представляют собой два спектра задачи на полуоси. Состояния, волновые функции которых не обращаются в нуль в центре ямы, являются нефизическими состояниями для половины потенциала (на полуоси).

РОЖДЕНИЕ НЕНОРМИРУЕМЫХ СОСТОЯНИЙ

Рождение нефизических "уровней" в случае исходного дельта-барьера (или ямы) $V\delta(x)$, расположенного в точке $x=0$:

$$-\psi''(x) + V\delta(x)\psi(x) = E\psi(x). \quad (1)$$

При сшивании решения в точке δ -потенциала из решений свободного уравнения (1) с $V(x) = 0$, функция должна быть непрерывной, а производная претерпевает скачок V ; (функция имеет излом к оси абсцисс для

²Теорема была доказана Г.Боргом для конечного отрезка, ее обобщили на бесконечные интервалы F.Gesztesy, B.Simon, G.Teschl. Интересно было бы установить, можно ли обобщить ее на случай, когда нефизические состояния ненормируемы и имеют экспоненциальный рост на больших расстояниях.

δ -ямы и от оси x - для барьера)

$$\psi'(x \rightarrow -0) = \psi'(x \rightarrow +0) - V\psi(x). \quad (2)$$

Связанное состояние в δ -яме при энергии E_b имеет вид спадающих в обе стороны от δ -ямы экспонент

$$\begin{aligned} \psi_b(x \leq 0) &= \exp(\kappa_b x); \\ \psi_b(x \geq 0) &= \exp(-\kappa_b x); \end{aligned} \quad (3)$$

$$\text{где } \kappa_b = \sqrt{E_b}. \quad (4)$$

Выберем значение энергии ниже физического спектра $E = \epsilon$ как "энергию факторизации" гамильтониана

$$H_- = A^+ A^- + \epsilon; \quad (5)$$

$$A^- = -\frac{1}{dx} + \frac{\psi'(\epsilon, x)}{\psi(\epsilon, x)}; \quad (6)$$

$$A^+ = \frac{1}{dx} + \frac{\psi'(\epsilon, x)}{\psi(\epsilon, x)}; \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(x \leq 0) &= \exp(\kappa_1(x)); \\ \psi(x \geq 0) &= b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x); \\ \kappa_1 &= \sqrt{-\epsilon}. \end{aligned} \quad (8)$$

Будем интерпретировать преобразование SUSYQ (см. детали формализма [1,6]) как порождение нефизического состояния

$$\psi_{\text{нф}}(\epsilon, x) = \frac{1}{\psi(\epsilon, x)}; \quad (9)$$

то есть

$$\psi_{\text{нф}}(x \leq 0) = \exp(-\kappa_1(x)); \quad (10)$$

$$\psi_{\text{нф}}(x \geq 0) = \frac{1}{b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x)};$$

$$\text{где } b_1 = \frac{v_0}{2\kappa_1}; \quad c_1 = 1 - \frac{v_0}{1\kappa_1} \quad (11)$$

В преобразованном гамильтониане

$$H_+ = A^- A^+ + \epsilon \quad (12)$$

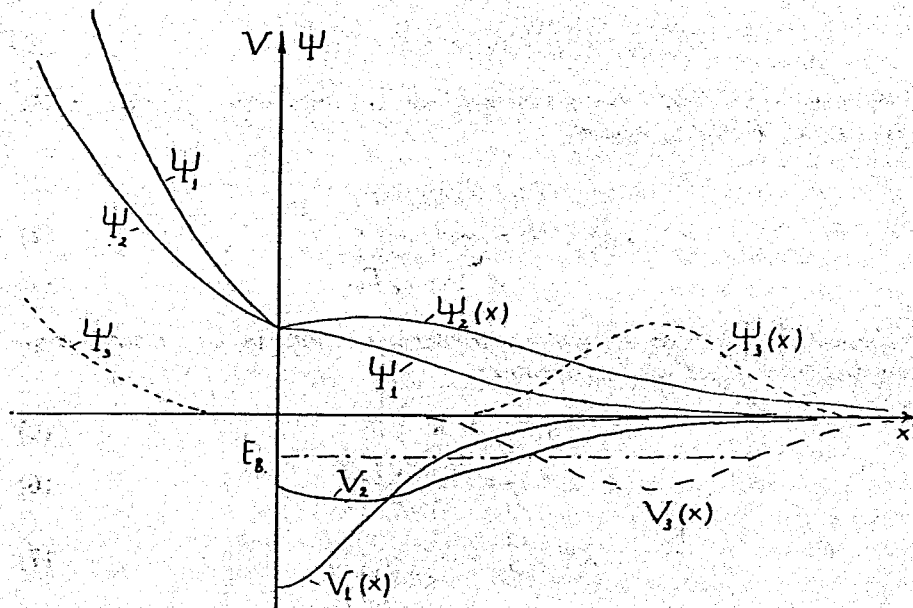


Рис.1 Деформация дельта-образной потенциальной ямы $-V\delta(x) \rightarrow V\delta(x) + V_1(x) \rightarrow V\delta(x) + V_2(x) \rightarrow V\delta(x) + V_3(x)$ при рождении ненормируемого (нефизического) состояния с $E = \epsilon$ все ближе к единственному связанному состоянию с $E = E_b$. Однородные граничные условия для нефизического состояния выбраны на обеих асимптотиках так, чтобы это решение было чисто спадающим вправо, как $\exp(-\kappa_1 x)$ (коэффициенты при $\exp(\kappa_1 x)$ выбраны равными нулю). Чем ближе $E_{\text{нф}}$ к E_b , тем дальше вправо удаляется яма, в которой в основном локализуется связанное состояние. Эта *ямка-переносчик* связанного состояния постепенно приобретает солитоноподобный вид при сближении $E = \epsilon$ с E_b и затем практически не меняется. При этом в яме все более похожими становятся справа физическое $\psi_b(x)$ и нефизическое $\psi_{1-2-3}(x)$ состояния (слева $\psi_{1,2,3}(x)$ отклоняется от $\psi_b(x)$, экспоненциально возрастая). При таких SUSYQ-преобразованиях остаются неизменными коэффициенты отражения (прохождения) для состояний непрерывного спектра. Ср. с результатами работы [8], в которой мы впервые продемонстрировали *инверсию знака исходных дельта-ям и пиков* при SUSYQ-преобразовании

потенциал имеет вид (см. рис 1. – обратите внимание на инверсию

знака исходного дельта-потенциала):

$$V(x) = -\dot{V}(x) + 2\epsilon + 2\left(\frac{\psi'(\epsilon, x)}{\psi(\epsilon, x)}\right)^2, \quad (13)$$

то есть

$$V(x \leq 0) = -V\delta(x),$$

$$V(x > 0) = 2\left(\frac{\kappa_1(-b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x))}{b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x)}\right)^2,$$

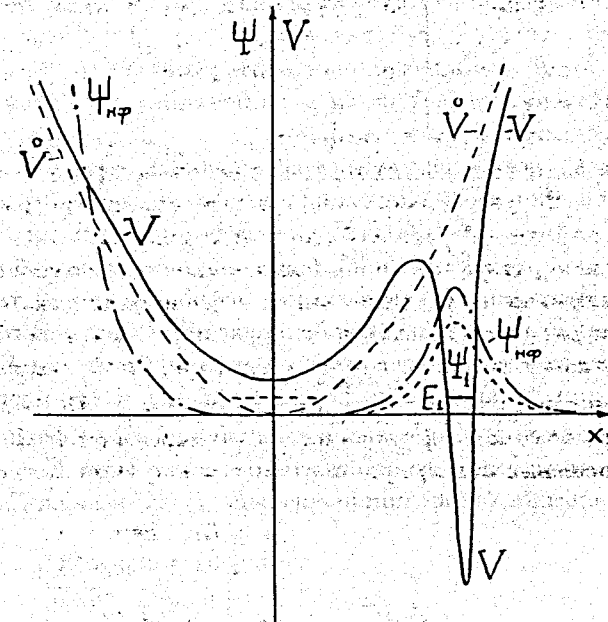


Рис.2. Деформация осцилляторной потенциальной ямы при рождении нефизического состояния с $E = E_{\text{нф}}$ под основным связанным состоянием с $E = E_1$. Нефизическое состояние выбрано спадающим справа. Этот рисунок дополняет приведенный Sukumar'ом [6]. В нашем случае более отчетливо видно, что чем ближе $E_{\text{нф}}$ к E_1 , тем более становятся похожими основное $\psi_1(x)$ и нефизическое $\psi_{\text{нф}}(x)$ состояния справа, удаляясь при этом вправо в типичной потенциальной ямке-переносчике (слева $\psi_{\text{нф}}(x)$ отклоняется от $\psi_1(x)$, экспоненциально возрастая). Остальные уровни как физического, так и нефизического спектра остаются на месте (на энергетической шкале) и относительно мало сдвигаются по оси x

Чем ближе по энергии нефизическое состояние к физическому, тем более похожи друг на друга соответствующие волновые функции, как

решения одного и того же уравнения Шредингера (с одним и тем же потенциалом) и с одинаковыми граничными условиями с одной стороны при почти одной и той же энергии. Физическое состояние вместе с близкой к нему частью нефизической функции удаляются специальной вспомогательной потенциальной ямой-переносчиком в сторону от области основной локализации исходного физического состояния.

Поведение формы потенциала при приближении значения энергии порождаемого нефизического состояния к физическому напоминает явление "аннигиляции" [7] при вырождении двух физических состояний³. В пределе $\epsilon \rightarrow E_b$ физическое состояние уносится на бесконечность (как бы эффективно исчезает из спектра потенциала, оставшегося на месте исходной δ -ямы).

На рис.2 показана трансформация осцилляторной ямы при порождении нефизического состояния под основным физическим состоянием $E_{нф} \rightarrow E_1$. Впервые небольшие трансформации такого типа были показаны в работе Sukumar'a [6], но там не говорилось об интерпретации полученной картины как порождения нефизического состояния и не было так отчетливо видно удаление общей части нефизического и физического состояний как угодно далеко в сторону при сближении $E_{нф} \rightarrow E_1$.

Аналогичная картина, представленная на рис.3, получается и для исходной конечной прямоугольной ямы глубины V . Исходные функции ψ_b основного связанного физического состояния (при $E = E_b$) и ненормируемого решения $\psi(\epsilon, x)$ при энергии $E = \epsilon$ чуть ниже E_b

$$\psi_b(x \leq 0) = \exp(\kappa_b x), \quad (14)$$

$$\kappa_b = \sqrt{-E_b};$$

$$\psi_b(0 \leq x \leq \pi) = a_b \sin(k_b x + d_b); \quad (15)$$

$$\psi_b(x \geq \pi) = b_b \exp(-\kappa_b x); \quad (16)$$

$$\text{где} \quad (17)$$

$$d_b = \arctan\left(\frac{k_b}{\kappa_b}\right);$$

$$a_b = \frac{1}{\sin(d_b)};$$

$$b_b = \frac{\kappa_b a_b \sin(k_b \pi + d_b) - a_b k_b \cos(k_b \pi + d_b)}{2\kappa_b \exp(-\kappa_b \pi)};$$

$$c_b = \frac{\kappa_b a_b \sin(k_b \pi + d_b) + a_b k_b \cos(k_b \pi + d_b)}{2\kappa_b \exp(\kappa_b \pi)}; \quad (18)$$

³Этого не происходит при сближении двух нефизических состояний с одинаковыми граничными условиями (возможно оттого, что нет ортогональности таких состояний).

$$k_b = \sqrt{V - E_b};$$

$$\psi(\epsilon, x \leq 0) = \exp(\kappa_1 x);$$

$$\psi(\epsilon, 0 \leq x \leq \pi) = a_1 \sin(k_1 x + d_1);$$

$$\psi(\epsilon, x \geq \pi) = b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x); \quad (19)$$

$$d_1 = \arctan\left(\frac{k_1}{\kappa_1}\right);$$

$$a_1 = \frac{1}{\sin(d_1)};$$

$$b_1 = 1 \sin(k_1 \pi + d_1) \exp(-\kappa_1 \pi); \quad (20)$$

$$\kappa_1 = \sqrt{-E_1}.$$

Преобразованный потенциал имеет вид

$$V(x \leq 0) = 0;$$

$$V(0 \leq x \leq \pi) = -V + 2\epsilon + 2(k_1 \cot(k_1 x + d_1))^2;$$

$$V(x \geq \pi) = 2\epsilon + 2\left(\frac{-b_1 \kappa_1 \exp(-2\kappa_1 x) + c_1 \kappa_1}{b_1 \exp(-2\kappa_1 x) + c_1}\right)^2. \quad (21)$$

Преобразованные функции связанного состояния $\psi_1(E_b, x)$ и ненормированная $\psi_{нф}(\epsilon, x)$

$$\psi_1(x \leq 0) = -\psi_b'(x) + \psi_b(x) \frac{\psi'(\epsilon, x)}{\psi(\epsilon, x)};$$

$$\psi_1(0 \leq x \leq \pi) = -\psi_b'(x) + \psi_b(x) \frac{\psi'(\epsilon, x)}{\psi(\epsilon, x)};$$

$$\psi_1(x \geq \pi) = -\psi_b'(x) + \psi_b(x) \frac{\psi'(\epsilon, x)}{\psi(\epsilon, x)}; \quad (22)$$

$$\psi_{нф}(x \leq 0) = \exp(-\kappa_1 x);$$

$$\psi_{нф}(0 \leq x \leq \pi) = \frac{1}{a_1 \sin(k_1 x + d_1)};$$

$$\psi_{нф}(x \geq \pi) = \frac{1}{b_1 \exp(-\kappa_1 x) + c_1 \exp(\kappa_1 x)}. \quad (23)$$

Из приведенных рисунков следует, что при рассмотренных преобразованиях в пределе исходная симметричная яма сжимается, дно ее при-

поднимается без нарушения симметрии (если не учитывать потенциал-переносчик, сдвигающий связанное состояние).

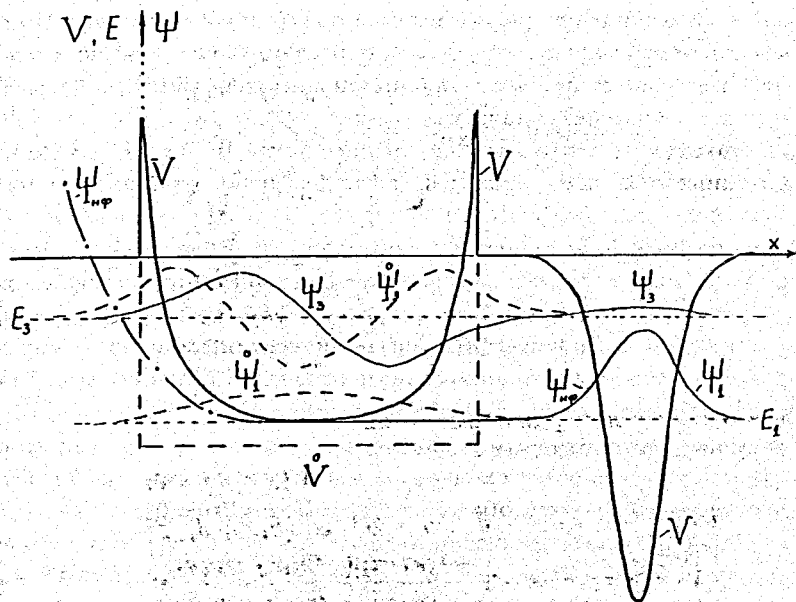


Рис.3. Деформация прямоугольной потенциальной ямы конечной глубины при рождении нефизического состояния с $E = E_{нф}$ под основным связанным состоянием с $E = E_3$. Нефизическое состояние, как и в предыдущих примерах, выбрано спадающим справа

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

...Мы стремимся к приобретению полезных знаний ради житейских удобств либо ради удовольствия созерцания истины, доставляющее почти единственное в этой жизни не омрачимое никакими печальми блаженство.

Рене Декарт

Мы коснулись здесь одной из многих обратных задач, решать которые предстоит человечеству, в частности, и для понимания структуры материи (неживой и живой).

Наука развивается со все возрастающей скоростью (по экспоненциальному закону), объединяя микро и макроявления. Последние наблюдения на космическом телескопе HUBBLE указывают на возможную значительную неоднородность распределения материи во Вселенной. При подтверждении этого факта потребуются пересмотр представлений о первоначальном взрыве и фундаментальных взаимодействиях элементарных частиц (сверхобратная задача!).

Недавно в популярном журнале (Science News, 151, N 19, 288, 1997) появилась удивительная заметка (с фотографиями) о выращивании насекомых с дополнительными глазами на ногах или крыльях (!) с помощью направленного генного воздействия. Биология устремляется к архитектурным чудесам "блочного строительства" на молекулярном (квантовом?) уровне. И хотя такие исследования и строгую квантовую теорию разделяет еще глубокая пропасть, но думать о наведении мостов между ними можно: рождение квантовой биологии неотвратимо (раньше или позже).

Мы в квантовой теории тоже стремимся постигнуть правила (тонкости) микродизайна, находим универсальные элементарные "кирпичики" перестройки волновых систем [1-3]. Хотя эти дисциплины разделяет еще глубокая пропасть, но они обречены на объединение.

Авторы (Б.З. и В.Ч.) благодарны РФФИ, а Б.З. и фонду Сороса за поддержку. Работа Чабанова В.М. поддержана грантом INTAS в рамках программы исследований международного центра фундаментальной физики в Москве (ICFPM).

Литература

1. Захарьев Б.Н., Уроки квантовой интуиции, галерея удивительных потенциалов, алгоритмы управления спектрами, рассеянием, распадами, точно решаемые модели обратной задачи и суперсимметрии, универсальные строительные элементы - "кирпичики и блоки" квантовых систем, ОИЯИ, Дубна, 1996.
2. Захарьев Б.Н., Соросовский образовательный журнал N7, 1996; Шредингера оператора спектр, Физическая энциклопедия, т.5 (подготовлена к изданию) 1998; Новая азбука квантовой механики (в картинках), Удм. Гос. Университет, Ижевск (в печати) 1998.
3. B.N.Zakhariev, V.M.Chabanov, Review article "New Situation in Quantum Mechanics", Inverse Problems 13, R47-R79, 1997.
4. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля, с.65, М., Наука, 1984.
5. Daskalov V.B., Compt. Rend. Acad. Bulg. Sci. 45, N10, 17, 1992. Iliev I.D., Khristov E.Kh., Kirchev K.P., Spectral Methods in Soliton

Equations, p.49, Longman Scientific, New York, 1994.

6. Sukumar C.V.// J.Phys., v.A18, p. 2917-2936, 1985. 2937-2946; 1988.v.A21, N8.p.L455-L460.

7. Chabanov V.M., Zakhariev B.N., Brandt S., Dahmen H.D., Stroh N., Phys.Rev. A 52, R3389, 1995;

8. Захарьев Б.Н., Чабанов В.М., Сообщения ОИЯИ, Р4-95-234, Дубна, 1995; V.M.Chabanov, B.N.Zakhariev et al, Lecture Notes in Physics, Springer, 1997, "Inverse and Algebraic Quantum Scattering Theory" Proc. Lake Balaton, Hungary, p. 197, 1996.

Рукопись поступила в издательский отдел

18 июня 1998 года.