

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



П-563

19/vii-76

P4 - 9736

2772 / 2-76

Л.И.Пономарев, М.П.Файфман

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ  
 $\mu$ -МЕЗОМОЛЕКУЛ ВОДОРОДА

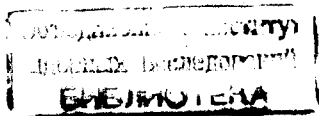
**1976**

P4 - 9736

Л.И.Пономарев, М.П.Файфман

ВЫЧИСЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ ОБРАЗОВАНИЯ  
 $\mu$ -МЕЗОМОЛЕКУЛ ВОДОРОДА

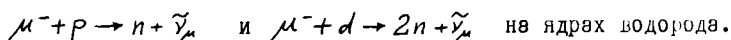
*Направлено в ЖЭТФ*



## В в е д е н и е

Процесс образования  $\mu$ -мезомолекул является частью весьма разветвленной цепочки мезоатомных процессов, которые протекают при торможении  $\mu^-$ -мезонов в смеси изотопов водорода. Конечными стадиями этой цепочки процессов являются либо распад  $\mu^-$ -мезона, либо его захват протоном ядра одного из изотопов водорода, либо же реакция синтеза ядер образующейся мезомолекулы<sup>/1-3/</sup>. Вероятности последних двух процессов существенно зависят от скоростей образования мезомолекул.

Кроме того, знание этих скоростей необходимо для прецизионных измерений констант слабого взаимодействия в реакциях



Преимущество таких измерений по сравнению с аналогичными измерениями на сложных ядрах состоит в том, что они свободны от неопределенностей, обусловленных недостаточным знанием структуры ядер.

До недавнего времени имели место заметные расхождения между вычисленными<sup>/1,4,5/</sup> и измеренными<sup>/6-10/</sup> значениями скоростей образования мезомолекул  $pd\mu$ . В данной работе эти расхождения устранены. Кроме того, в работе вычислены скорости образования мезомолекул  $pp\mu$ ,  $dd\mu$ ,  $pt\mu$ ,  $dt\mu$  и  $tt\mu$ .

Механизм образования  $\mu$ -мезомолекул водорода подробно обсуждался в прежних работах<sup>/1-5/</sup>. Как известно, основную роль играют при этом электрические дипольные E1-переходы, вследствие чего мезомолекулы  $pp\mu$ ,  $pd\mu$  и  $pt\mu$ , существующие лишь во вращательных состояниях с орбитальными моментами  $L=0$  и  $L=1$ , могут образовываться только из  $s$ -,  $p$ - и  $d$ - состо-

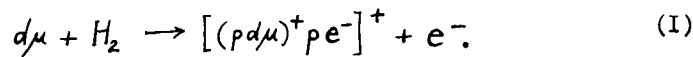
яний рассеяния мезоатомов  $p\mu$ ,  $d\mu$  и  $t\mu$  на протонах молекул  $H_2$ . В частности, при медленных ( $\varepsilon \leq 0,1 \text{ эВ}$ ) столкновениях доминируют переходы из  $s$ -состояний рассеяния во вращательные состояния мезомолекул с орбитальным моментом  $L=1$ . При наличии резонанса в  $d$ -волне (например, при столкновениях  $d\mu + p$  /11/) с этим переходом конкурирует переход  $(L=2) \rightarrow (L=1)$ . Мезомолекулы  $dd\mu$ ,  $dt\mu$  и  $tt\mu$ , кроме вращательных состояний с  $L=0$  и  $L=1$ , существуют в состояниях с  $L=2$  и  $L=3$  (только для  $tt\mu$ ), и в соответствии с этим возможно их образование из состояний рассеяния с более высокими орбитальными моментами. Однако в интересующей нас области энергий столкновения ( $\varepsilon < 50 \text{ эВ}$ ) вероятность переходов из этих состояний мала, и мы их рассматривать не будем.

Как известно /1,3,12/, при образовании мезомолекул в возбужденных состояниях с малой энергией связи заметный вклад в общую вероятность могут дать монополярные ЕО-переходы. Вероятности этих переходов также вычислены в данной работе.

#### Образование мезомолекул путем ЕI-перехода

Проследим схему вычислений на примере образования мезомолекул  $pd\mu$ . При торможении  $\mu^-$ -мезонов в смеси водорода и дейтерия образуется вначале смесь мезоатомов  $p\mu$  и  $d\mu$ , после чего следует быстрый переход  $p\mu + d \rightarrow d\mu + p$  со скоростью  $\lambda_{pd} = 1,7 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$  /1-4,13/.

В дальнейшем, при столкновениях мезоатомов  $d\mu$  с молекулами водорода, происходит реакция



Таким образом, образовавшаяся мезомолекула  $pd\mu$ , т.е. ион  $(pd\mu)^+$ , становится ядром своеобразного молекулярного иона, а энергию, выделившуюся при образовании молекулы  $pd\mu$ , уносит электрон конверсии. Система координат, в которой вычисляется скорость  $\lambda_{pd\mu}$  образования мезомолекулы  $pd\mu$ , представлена на рис. 1.

Скорость  $\lambda_{pd\mu}$ , приведенная к плотности ядер жидкого водорода  $N_0 = 4,25 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$ , равна

$$\lambda_{pd\mu} = \sigma v N_0 \text{ с}^{-1}, \quad (2)$$

где  $v$  - скорость относительного движения мезоатома  $d\mu$  и ядра молекулы  $H_2$ , а  $\sigma$  - полное сечение образования мезомолекулы  $pd\mu$ . Формула для дифференциального сечения, соответствующая вылету электрона в интервале импульсов  $\vec{q}$  и  $\vec{q} + d\vec{q}$ , имеет вид /14/

$$v d\sigma = \beta \frac{2\pi}{\hbar} \delta(E_f - E_i) d\vec{q}. \quad (3)$$

$$\sum_{m_L} \left| \int d\vec{R} d\vec{z} d\vec{p} \Psi^{(f)*}(\vec{z}, \vec{R}) \Psi^{(i)*}(\vec{p}) \hat{H}_{int} \Psi^{(i)}(\vec{p}) \Psi^{(f)}(\vec{z}, \vec{R}) \right|^2$$

Здесь введены обозначения:

$\Psi^{(i)}(\vec{p})$  и  $\Psi^{(f)}(\vec{p})$  - волновые функции вылетающего электрона в начальном ( $i$ ) и конечном ( $f$ ) состояниях;

$\Psi^{(i)}(\vec{z}, \vec{R})$  и  $\Psi^{(f)}(\vec{z}, \vec{R})$  - волновые функции системы  $d\mu + p$  и молекулы  $pd\mu$  соответственно;

$\beta$  - статистический множитель, который надо учитывать при образовании мезомолекул с одинаковыми ядрами;

в случае мезомолекул с различными ядрами  $\beta = 1$ .

Суммирование  $\sum_{m_L}$  проводится по всем допустимым значениям проекции  $m_L$  орбитального момента  $L$  образовавшейся мезомолекулы;

$E_i = \varepsilon_I + \varepsilon$  и  $E_f = \varepsilon_{rL} + q^2/2m$  - полные энергии системы  $d\mu + H_2$  в начальном и конечном состоянии соответственно;  $\varepsilon_I = -15,44$  эВ - энергия связи электрона в основном состоянии молекулы  $H_2$ ;  $\varepsilon_{rL}$  - энергия связи мезомолекулы  $pd\mu$  в состоянии с орбитальным моментом  $L$  и вибрационным квантовым числом  $\nu$ ;  $q$  - импульс электрона конверсии, абсолютная величина которого равна

$$q = [2m(\varepsilon + |\varepsilon_{rL}| - |\varepsilon_I|)]^{1/2};$$

$m$  - масса электрона;  $\varepsilon = k^2/2M$  - энергия относительного движения мезозота  $d\mu$  и протона молекулы  $H_2$ ;  $M$  - эффективная масса системы  $pd\mu$ , которая выражается через массы дейтрона  $M_d = M_1$ , протона  $M_p = M_2$  и  $\mu$ -мезона ( $M_\mu$ ) по формулам [15]

$$M = M_0/m^*, \quad \frac{1}{M_0} = \frac{1}{M_1} + \frac{1}{M_2}, \quad \frac{1}{m^*} = \frac{1}{M_\mu} + \frac{1}{4M_0} \quad (3в)$$

Мезомолекулы образуются под действием возмущения

$$\hat{H}_{int} = -\frac{e^2}{R_{1e}} - \frac{e^2}{R_{2e}} + \frac{e^2}{R_{\mu e}} + \frac{e^2}{\rho}, \quad (4)$$

где  $R_{ie}$  ( $i=1,2,\mu$ ) - расстояние от ядер  $M_i$  и  $\mu$ -мезона до электрона. С учетом неравенства  $\rho \gg R_i$ , где  $R_i$  - расстояния ядер и мезона от центра масс мезомолекулы

$pd\mu$ , имеем в дипольном приближении

$$\frac{1}{R_{ie}} = \frac{1}{|\vec{\rho} - \vec{R}_i|} \approx \frac{1}{\rho} + \frac{\vec{R}_i \vec{\rho}}{\rho^3}, \quad (5)$$

откуда следует выражение

$$\hat{H}_{int} = -e \frac{\vec{d} \vec{\rho}}{\rho^3}. \quad (6)$$

Дипольный момент  $\vec{d} = \vec{d}(\vec{z}, \vec{R})$  в различных координатах (рис. 1) выражается следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{d} &= -e(\vec{R}_1 + \vec{R}_2 - \vec{R}_\mu) = -e\left[\alpha \vec{R} + \left(1 + \frac{M_\mu}{M_t}\right) \vec{z}_\mu\right] = \\ &= -e\left[\frac{\alpha}{2}\left(1 - \frac{M_\mu}{M_t}\right) \vec{R} + \left(1 + \frac{M_\mu}{M_t}\right) \vec{z}\right], \quad (7) \\ \alpha &= \frac{M_2 - M_1}{M_2 + M_1}, \quad M_t = M_1 + M_2 + M_\mu. \end{aligned}$$

Волновая функция начального состояния электрона в молекуле водорода была выбрана нами в виде, предложенном Хайтлером и Лондоном (в атомных единицах  $e = \hbar = m = 1$ ):

$$\psi^{(i)}(\vec{r}) = \left[\frac{Z_0^3}{2\pi(1+\Delta)}\right]^{1/2} (e^{-Z_0 \rho} + e^{-Z_0 |\vec{\rho} - \vec{R}_p|}), \quad (8)$$

где  $Z_0$  - эффективный заряд протона в молекуле водорода,  $R_p$  - равновесное расстояние между протонами. Согласно [16] приняты следующие значения величин:

$$Z_0 = 1,19; \quad R_p = 1,40; \quad \Delta = 0,677. \quad (9)$$

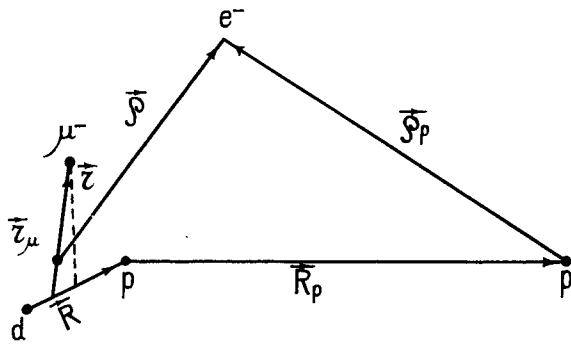


Рис. 1.  $\vec{R}$  - радиус-вектор, соединяющий ядра  $d$  и  $p$ ;  $\vec{z}_\mu$  и  $\vec{z}$  - радиус-вектора  $\mu^-$ -мезона с началом в центре масс ядер  $d$  и  $p$  и в геометрическом центре отрезка  $R$  соответственно;  $\vec{r}$  и  $\vec{r}_p$  - радиус-вектора, проведенные из центра масс системы  $p d \mu$  и от второго ядра молекулы  $H_2$  в точку нахождения электрона;  $\vec{R}_p$  - вектор, соединяющий ядра в молекуле  $H_2$ .

Волновая функция  $\Psi^{(4)}(\vec{r})$  электрона с импульсом  $\vec{q}$  в кулоновском поле заряда  $Z^*$ , нормированная на  $\delta(\vec{q}-\vec{q}')$ , имеет хорошо известный вид [14]:

$$\Psi^{(4)}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi q} \sum_{L=0} i^L (2L+1) e^{-i\sigma_L} R_{qL}(r) P_L(\cos\theta_{q,r}), \quad (10)$$

где  $\theta_{q,r}$  - угол между векторами  $\vec{q}$  и  $\vec{r}$ , отсчитанный от направления  $\vec{q}$ , а  $R_{qL}(r)$  - кулоновская функция, определенная соотношениями

$$R_{qL}(r) = C_{qL} \cdot \frac{Z^*}{(2L+1)!} \cdot (2qr)^L e^{-iqr} F(L+1+ib, 2L+2; 2iqr); \quad (11)$$

$$C_{qL} = 2 [b(1 - e^{-2\pi b})]^{-1/2} \prod_{s=1}^L (s^2 + b^2)^{1/2}, \quad b = Z^*/q;$$

$$R_{qL}(r) \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{r} \sin(qr + b \ln 2qr - \frac{\pi L}{2} + \sigma_L).$$

Здесь:  $\sigma_L = \arg \Gamma(L+1-ib)$  - кулоновская фаза,  $Z^*$  - эффективный заряд системы  $[(p d \mu)^+ p e^-]$ .

Выделяя размерные множители во всех выражениях, содержащих координаты  $\vec{r}$  и импульсы  $\vec{q}$  электрона, и проведя по ним интегрирование, получим следующее выражение для скорости образования мезомолекул путем конверсионного Е1-перехода<sup>x)</sup>:

x) Размерности волновых функций (8) и (10) равны  $a_0^{-3/2}$  и  $\hbar^{-3/2}$  соответственно; при выводе формулы (12) учтено, что конверсия любого из двух электронов молекулы  $H_2$  одинаково вероятна ( $a_0 = \hbar^2/m e^2$ ).

$$\lambda(E1) = \beta \frac{8\pi}{3} N_0 \frac{me^2}{\hbar^3 a_0^2} \frac{Z_0^3}{1+\Delta} \frac{1}{q} |I(q)|^2. \quad (I2)$$

$$\cdot \sum_{m_L} \left| \int d\vec{r} d\vec{z} \Psi^{(+)*}(\vec{z}, \vec{R}) \vec{d}(\vec{z}, \vec{R}) \Psi^{(-)}(\vec{z}, \vec{R}) \right|^2.$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned} I(q) &= I_1(q) + I_2(q), \\ I_1(q) &= \int_0^\infty d\rho R_{qL}(\rho) e^{-Z_0 \rho}, \\ I_2(q) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho R_{qL}(\rho) \int_{-1}^1 d \cos \theta_{\rho R_p} e^{-Z_0 |\vec{\rho} - \vec{R}_p|}, \end{aligned} \quad (I3)$$

и все величины выражены в атомных единицах. Явный вид интегралов  $I_1(q)$  и  $I_2(q)$  приведен в приложении.

Волновые функции, представляющие движение  $\mu$ -мезона и ядер, вычислены в двухуровневом приближении метода ВСС/13/:

$$\Psi^{(i,f)}(\vec{z}, \vec{R}) = \varphi_1(\vec{z}; R) \psi_1^{(i,f)}(\vec{R}) + \varphi_2(\vec{z}; R) \psi_2^{(i,f)}(\vec{R}), \quad (I4)$$

где

$$\varphi_{1,2}(\vec{z}; R) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_g(\vec{z}; R) \mp \varphi_u(\vec{z}; R)], \quad (I4a)$$

а  $\varphi_g(\vec{z}; R)$  и  $\varphi_u(\vec{z}; R)$  - четное и нечетное решения задачи двух центров/17/, нормированные условиями

$$\int d\vec{z} \varphi_g^2(\vec{z}; R) = \int d\vec{z} \varphi_u^2(\vec{z}; R) = 1. \quad (I4b)$$

Они представляют движение  $\mu^-$ -мезона в поле двух закрепленных ядер ( $d$  и  $p$ ) в двух наименьших энергетических состояниях.

Волновые функции  $\psi_j^{(i)}(\vec{R})$  и  $\psi_j^{(f)}(\vec{R})$  ( $j=1,2$ ), представляющие относительное движение ядер в начальном и конечном состоянии, имеют вид:

$$\psi_j^{(i)}(\vec{R}) = \sum_{L=0}^{\infty} i^L (2L+1) \frac{1}{kR} \chi_j^{(i)}(R) P_L(\cos \theta_{kR}), \quad (I5)$$

где  $k^2 = 2M\varepsilon$ ,  $\theta_{kR}$  - угол между векторами  $\vec{k}$  и  $\vec{R}$ , отсчитанный от направления  $\vec{k}$ , и

$$\psi_j^{(f)}(\vec{R}) = \frac{1}{R} \chi_j^{(f)}(R) Y_{Lm_L}(\theta, \phi). \quad (I6)$$

Функции  $\chi_j^{(i)}(R)$  и  $\chi_j^{(f)}(R)$  являются решениями системы уравнений

$$\frac{d^2 \chi_1}{dR^2} + \left[ 2M\varepsilon - \frac{L(L+1)}{R^2} \right] \chi_1 = V_{11} \chi_1 + V_{12} \chi_2 + 2Q_{12} \frac{d\chi_2}{dR}, \quad (I7)$$

$$\frac{d^2 \chi_2}{dR^2} + \left[ 2M(\varepsilon - \Delta E) - \frac{L(L+1)}{R^2} \right] \chi_2 = V_{21} \chi_1 + V_{22} \chi_2 + 2Q_{21} \frac{d\chi_1}{dR}$$

со следующими граничными условиями:

при  $R = 0$

$$\chi_j^{(i)}(0) = \chi_j^{(f)}(0) = 0, \quad (I8a)$$

при  $R \rightarrow \infty$  для начального состояния ( $0 < \varepsilon < \Delta E$ )

$$\begin{aligned} \chi_1^{(i)}(R) &\Rightarrow \sin(kR - \frac{\pi L}{2} + \delta_L), \\ \chi_2^{(i)}(R) &\sim \exp\{-[2M(\Delta E - \varepsilon)]^{1/2} R\}; \end{aligned} \quad (I8b)$$

при  $R \rightarrow \infty$  для конечного состояния ( $\epsilon_{vL} \leq 0$ )

$$\chi_1^{(+)}(R) \sim \exp\{-(-2M\epsilon_{vL})^{1/2}R\}, \quad (I8в)$$

$$\chi_2^{(+)}(R) \sim \exp\{-[-2M(-\epsilon_{vL} + \Delta E)]^{1/2}R\}.$$

В этих определениях энергия столкновения  $E$  и энергия связи  $\epsilon_{vL}$  отсчитываются от основного уровня энергии изолированного мезозтома с ядром  $M_1$  тяжелого изотопа ( $d\mu$ ).

В адиабатическом приближении изотопическая разность уровней мезозтомов  $d\mu$  и  $p\mu$  равна  $\Delta E = -\alpha/2M > 0$ . Эффективные потенциалы  $V_{ij} \equiv V_{ij}(R)$  и  $Q_{ij} \equiv Q_{ij}(R)$ , которые выражаются через термы  $E_g(R)$  и  $E_u(R)$  задачи двух центров и матричные элементы от операторов  $\Delta_{\vec{R}}$  и  $\nabla_{\vec{R}}$  по волновым функциям  $\psi_g(\vec{z}; R)$  и  $\psi_u(\vec{z}; R)$ , вычислены в работах /I8/. Для решения уравнений (I7) с граничными условиями (I8в) выбран алгоритм, использующий непрерывный аналог метода Ньютона /I9/, который обеспечивает точность вычисления функций  $\sim 10^{-4}$ .

Граничные условия (I8б) соответствуют двухканальной задаче рассеяния с учетом закрытого канала. Для ее решения был разработан эффективный алгоритм /II/ на основе метода фазовых функций /20/, также обеспечивающий точность не хуже чем  $\sim 10^{-3}$ .

Функции  $\chi_j^{(+)}(R)$  нормированы условием

$$\int_0^\infty dR \{ [\chi_1^{(+)}(R)]^2 + [\chi_2^{(+)}(R)]^2 \} = 1, \quad (I9)$$

а функция  $\chi_1^{(+)}(R)$ , в соответствии с определением (3), нормирована на единичную амплитуду (I8б) при  $R \rightarrow \infty$ .

Выделяя размерные множители  $a_{m^*}^{-3/2}$ ,  $a_{m^*}^{-1/2}$  и I для функций  $\psi_g(\vec{z}; R)$ ,  $\chi_j^{(+)}(R)$  и  $\chi_j^{(+)}(R)/kR$  соответственно, проводя интегрирование по координатам  $\vec{z}$  и  $\vec{R}$  и суммирование по проекциям  $m_L$  конечного состояния, приходим к окончательному выражению для  $\lambda$  (EI):

$$\lambda(E1) = \beta \frac{32\pi^2}{3} (N_c a_0^3) \left(\frac{m}{m^*}\right)^5 \frac{Z_0^3}{1+\Delta} \frac{1}{q} |I(q)|^2 |<d>|^2 \frac{m e^4}{\hbar^3} c^{-1} \quad (20)$$

Здесь:  $a_{m^*} = \hbar^2/m^*e^2$ , эффективная масса  $m^*$  определена формулами (3а), а значение  $|<d>|^2$  для переходов  $(L=0)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(+)}$  в единицах ( $e = \hbar = m^* = 1$ ) равно:

$$\begin{aligned} |<d>|^2 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{m_L} \left| \int d\vec{R} d\vec{z} \Psi^{(+)*}(\vec{z}, \vec{R}) \vec{D}(\vec{z}, \vec{R}) \Psi^{(i)}(\vec{z}, \vec{R}) \right|^2 = \\ &= \left[ \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{M_\mu}{M_t}\right) J_1 + \left(1 + \frac{M_\mu}{M_t}\right) J_2 \right]^2, \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$J_1 = \frac{1}{k} \int_0^\infty (\chi_1^{(i)} \chi_1^{(+)} + \chi_2^{(i)} \chi_2^{(+)}) R dR, \quad (22)$$

$$J_2 = \frac{1}{k} \int_0^\infty (\chi_2^{(i)} \chi_2^{(+)} - \chi_1^{(i)} \chi_1^{(+)}) D_{gu}(R) dR,$$

$$D_{gu}(R) = \frac{\vec{R}}{R} \int d\vec{z} \psi_g(\vec{z}; R) \vec{z} \psi_u(\vec{z}; R).$$



Все формулы остаются справедливыми и для переходов

$$(L=1)^{(i)} \rightarrow (L=0)^{(+)}. \text{ Для переходов } (L=2)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(+)}$$

выражение (21) следует домножить на два.

При вычислении скоростей образования мезомолекул с одинаковыми ядрами приведенные формулы необходимо несколько видоизменить. В этом случае  $\alpha=0$ ,  $\chi_1^{(+)}(R) = \chi_2^{(+)}(R) = \frac{1}{\sqrt{2}} \chi_g^{(+)}(R)$  и в соответствии с этим

$$\Psi^{(+)}(\vec{z}, \vec{R}) = \varphi_g(\vec{z}; R) \cdot \frac{1}{R} \chi_g^{(+)}(R) Y_{L m_L}(\theta, \phi). \quad (23a)$$

Кроме того, функции  $\Psi^{(i,+)}(\vec{z}, \vec{R})$  обладают определенной симметрией по отношению к операции перестановки ядер. При этой операции волновые функции приобретают множитель  $^{/14/}$

$$\gamma = (-)^{L+\ell+2I_1-I}, \text{ где } L \text{ и } \ell - \text{ орбитальные моменты относительного движения ядер и мезона соответственно,}$$

$I_1$  и  $I$  - спин ядра и суммарный спин ядер соответственно, причем  $\gamma = -I$  для мезомолекул  $pp\mu$  и  $tt\mu$  с ядрами-фермионами и  $\gamma = +I$  для мезомолекулы  $dd\mu$  с ядрами-бозонами. Поскольку функции  $\varphi_g(\vec{z}; R)$  и  $\varphi_u(\vec{z}; R)$  соответствуют значениям  $\ell=0$  и  $\ell=1$   $^{/17/}$ , заключаем отсюда, что вращательные состояния мезомолекул с нечетными значениями орбитальных моментов  $L = 1, 3, \dots$  возможны лишь при суммарном спине ядер  $I=1$ . И поскольку значения  $\gamma$  и  $I$  сохраняются, то дипольные переходы из состояний  $L = 0, 2, \dots$  непрерывного спектра возможны лишь из состояния  $\varphi_u(\vec{z}; R)$  мезонного движения. В соответствии с этим полная волновая функция начального состояния имеет вид

$$\Psi^{(i)}(\vec{z}, \vec{R}) = \varphi_u(\vec{z}; R) \sum_{L=0} i^L (2L+1) \frac{1}{kR} \chi_u^{(i)}(R) P_L(\cos \theta_{kR}). \quad (23б)$$

где функция  $\chi_u^{(i)}(R)$  нормирована асимптотическим условием

$$\chi_u^{(i)}(R) \Rightarrow \sin(kR - \frac{L\pi}{2} + \delta_u). \quad (23в)$$

Формула для  $\langle d \rangle$  в этом случае видоизменяется следующим образом:

$$\langle d \rangle = \left(1 + \frac{M_\mu}{M_t}\right) \frac{1}{k} \int_0^\infty \chi_g^{(+)}(R) \chi_u^{(i)}(R) D_{g_u}(R) dR. \quad (24)$$

Статистический вес состояний  $\beta = (2I+1)/(2I_1+1)^2$  с суммарным спином ядер  $I=1$  равен  $\beta = 3/4$  в случае мезомолекул  $pp\mu$  и  $tt\mu$  и  $1/3$  в случае  $dd\mu$ .

#### Образование мезомолекул путем ЕО-перехода

Электрический монополярный ЕО-переход с конверсией на электроны молекулы водорода может, в принципе, дать заметный вклад в общую скорость образования мезомолекул при переходах из  $S$ -состояния непрерывного спектра во вращательные состояния мезомолекул с  $L=0$  с малой энергией связи  $^{/12/}$  (например,  $dd\mu$ ,  $dt\mu$ ,  $tt\mu$ ).

В этом случае для мезомолекулы  $tt\mu$  возможно только синглетное состояние спинов ядер  $I=0$  и соответственно  $\beta = 1/4$ , а для  $dd\mu$  - состояния  $I=0, 2$  ( $\beta = 2/3$ ).

Скорость ЕО-перехода по-прежнему определяется формулой (3) с тем, однако; отличием, что оператор возмущения (4) следует учитывать лишь в области  $R_i \leq \rho \ll 1$  (см. рис. I), т.е. в пределах мезомолекулы. В этой области электронные функции (8) и (10) можно заменить их значениями при  $\varphi = 0$ .

Проводя интегрирование в (3) по координатам  $\vec{p}$  и импульсам  $\vec{q}$  и выделяя размерные множители, получим

$$\lambda(E_0) = \beta \frac{8\pi^2}{9} (N_0 a_0^3) \left(\frac{m}{m^*}\right)^7 \frac{z_0^3}{1+\Delta} \frac{1+e^{-z_0 R_p}}{1-e^{-2R_p}} | \langle Q_0 \rangle | \frac{m e^4}{\hbar^3 c^3} \quad (25)$$

где

$$\langle Q_0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int d\vec{r} d\vec{z} \Psi^{(+)*}(\vec{z}, \vec{R}) (R_1^2 + R_2^2 - R_\mu^2) \Psi^{(+)}(\vec{z}, \vec{R}) = \quad (26)$$

$$= \alpha_1 J_1 + \alpha_2 J_2 + \alpha_3 J_3,$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{M_t} (M_1 + M_2 - \frac{M_1 M_2}{M_t}), \quad \alpha_2 = \frac{1}{M_t} (M_1 + M_2 - M_\mu + \frac{M_\mu^2}{M_t}), \quad (27a)$$

$$\alpha_3 = \frac{M_2 - M_1}{M_t} \left(1 + \frac{M_\mu}{M_t}\right),$$

$$J_1 = \frac{1}{k} \int_0^\infty (\chi_1^{(+)} \chi_1^{(+)} + \chi_2^{(+)} \chi_2^{(+)}) R^2 dR,$$

$$J_2 = \frac{1}{k} \int_0^\infty (\chi_1^{(+)} \chi_1^{(+)} + \chi_2^{(+)} \chi_2^{(+)}) I_\mu^{(+)}(R) dR + \frac{1}{k} \int_0^\infty (\chi_1^{(+)} \chi_2^{(+)} + \chi_2^{(+)} \chi_1^{(+)}) I_\mu^{(-)}(R) dR, \quad (27b)$$

$$J_3 = \frac{1}{k} \int_0^\infty (\chi_2^{(+)} \chi_2^{(+)} - \chi_1^{(+)} \chi_1^{(+)}) D_{gu}(R) dR,$$

$$I_\mu^{(+)}(R) = \frac{R^2}{2} + \int d\vec{z} z^2 (\varphi_g^2 + \varphi_u^2),$$

$$I_\mu^{(-)}(R) = \int d\vec{z} z^2 (\varphi_g^2 - \varphi_u^2).$$

В случае одинаковых ядер

$$\langle Q_0 \rangle = \alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2,$$

$$I_1 = \frac{1}{k} \int_0^\infty \chi_g^{(+)} \chi_g^{(+)} R^2 dR, \quad I_2 = \frac{1}{k} \int_0^\infty \chi_g^{(+)} \chi_g^{(+)} I_\mu^{(+)}(R) dR, \quad (27b)$$

$$I_\mu^{(+)}(R) = \frac{R^2}{2} + 2 \int d\vec{z} z^2 \varphi_g^2(\vec{z}; R).$$

#### Обсуждение результатов

В таблице I представлены измеренные и вычисленные разными авторами скорости образования мезомолекул  $pp\mu$  и  $p d\mu$ . Легко видеть, что в обоих случаях результаты вычислений данной работы хорошо согласуются со всей совокупностью экспериментальных данных. Причины отличий от прежних расчетов не всегда ясны, поскольку для таких заключений необходимо знание деталей численных расчетов, которые, как правило, не сообщаются. В данной работе функции  $\Psi^{(+)}(\vec{z}, \vec{R})$  и соответствующие интегралы от них вычислены с точностью  $\sim 10^{-3}$ .

Основная погрешность приводимых величин связана с недостаточным знанием волновой функции электрона конверсии в поле молекулярного иона  $[(p d\mu)^+ p e]^+$ . В наших вычислениях этот комплекс заменялся кулоновским центром с эффективным зарядом  $Z^* = 1$ . Варьирование значения  $Z^*$  в пределах  $1 \leq Z^* \leq Z_0$  приводит к увеличению скоростей  $\lambda_{p d\mu}$  и  $\lambda_{p p\mu}$  до значений  $6,14 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  и  $2,26 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$  соответственно. Отсюда можно заключить, что погрешность, обусловленная недостаточ-

ным значением  $\psi^{(F)}(\vec{p})$ , составляет не более 5-10% от приведенного значения.

В таблице II результаты наших вычислений сравниваются с результатами прежних расчетов скоростей образования мезомолекул  $pt\mu$ ,  $dd\mu$ ,  $d\mu$  и  $tt\mu$ . Как и следовало ожидать на основании ранних оценок, скорость ЕО-переходов мала, хотя и превышает скорость ЕИ-переходов при образовании молекул  $d\mu$  и  $dd\mu$  <sup>x)</sup>. Обращают на себя внимание значительные расхождения между прежними и вновь вычисленными значениями  $\lambda_{pt\mu}$  и  $\lambda_{tt\mu}$ .

Как уже отмечалось ранее, образованию мезомолекул  $pd\mu$  и  $pt\mu$  предшествует стадия изотопного обмена  $p\mu + d \rightarrow d\mu + p$  (или  $p\mu + t \rightarrow t\mu + p$ ), в результате которой образуются мезоатомы  $d\mu$  и  $t\mu$  с начальной энергией 48,3 эВ и 49,5 эВ соответственно. Кроме того, известно <sup>/II/</sup>, что в  $d$ -волне упругого рассеяния

$d\mu + p \rightarrow d\mu + p$  и  $t\mu + p \rightarrow t\mu + p$  имеют место резонансы, которые являются проявлением квазистационарных состояний в системах  $d\mu + p$  и  $t\mu + p$  с энергией 55,6 эВ и 44,9 эВ соответственно <sup>/23/</sup>. Как следствие этого, вклад перехода  $(L=2)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(+)}$ , который обычно подавлен, в этой области энергий сильно возрастает и почти не

<sup>x)</sup> Отметим, что благодаря существованию слабосвязанного состояния ( $v=1$ ,  $L=1$ ) мезомолекулы  $dd\mu$  <sup>/21/</sup>, определяющим механизмом ее образования является, по-видимому, не ЕИ-переход, а переход с возбуждением колебательных уровней системы  $[(d\mu)^+ d] 2e$  <sup>/25/</sup>.

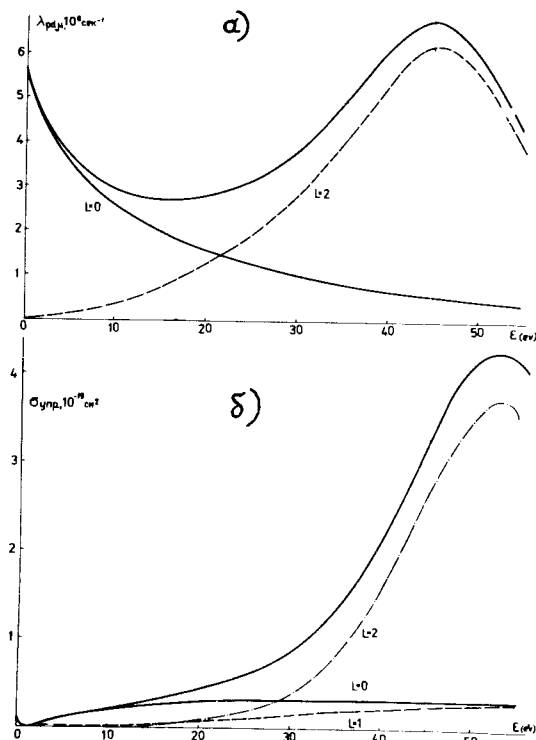


Рис. 2. а) Зависимость скоростей образования мезомолекулы  $pd\mu$  при переходах  $(L=0)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(+)}$ ,  $(L=2)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(+)}$  и полной скорости  $\lambda_{pd\mu}$  от энергии столкновения  $\epsilon$ .

б) Зависимость парциальных и полного сечения  $\sigma$  упругого рассеяния  $d\mu + p$  от энергии столкновения  $\epsilon$ .

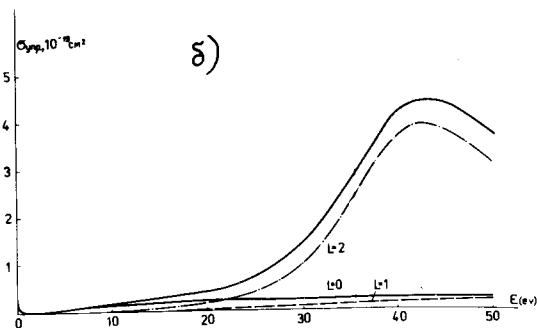
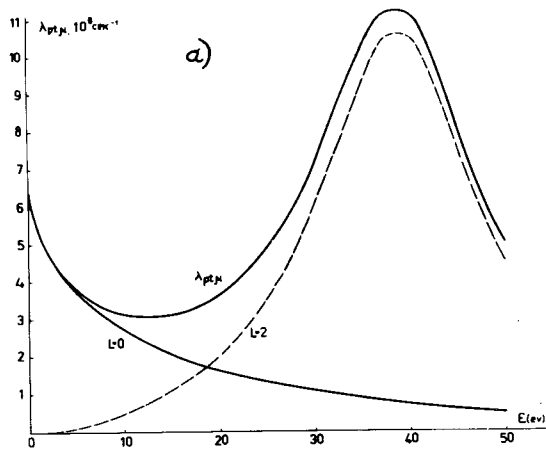


Рис. 3. а) Зависимость скоростей образования мезомолекулы  $p\tau\mu$  при переходах  $(L=0)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(f)}$ ,  $(L=2)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(f)}$  и полной скорости  $\lambda_{p\tau\mu}$  от энергии столкновения  $\epsilon$ .

б) Зависимость парциальных и полного сечения  $\sigma$  упругого рассеяния  $t_{\mu+p}$  от энергии столкновения  $\epsilon$ .

порядок превышает вклад от перехода  $(L=0)^{(i)} \rightarrow (L=1)^{(f)}$ . На рис. 2 а,б и 3 а,б представлены: а) скорости  $\lambda_{p\tau\mu}$  и  $\lambda_{p\mu}$  и б) сечения упругого рассеяния  $d_{\mu+p}$  и  $t_{\mu+p}$  как функции энергии столкновения  $\epsilon$ .

Очевидно, что с экспериментом следует сравнивать значения  $\lambda_{p\tau\mu}$  и  $\lambda_{p\mu}$ , усредненные по всему интервалу энергий  $0,04 \leq \epsilon \leq 45$  эВ с весом  $\rho(\epsilon)$ , пропорциональным времени нахождения системы в состоянии с энергией  $\epsilon$ . Наличие глубоких минимумов в сечениях упругого рассеяния  $d_{\mu+p}$  и  $t_{\mu+p}$  при  $\epsilon \approx 0,6$  эВ и  $\epsilon \approx 1,6$  эВ соответственно<sup>х)</sup> (см. рис. 4 и 5) приводит к тому, что усредненные скорости образования мезомолекул должны быть примерно равны средним значениям  $\lambda_{p\tau\mu}$  и  $\lambda_{p\mu}$  при  $\epsilon \approx 1$  эВ.

#### Выводы

Достигнутая в данной работе точность вычисления скоростей образования мезомолекул в настоящее время вполне удовлетворяет потребностям и возможностям эксперимента. При необходимости точность вычислений можно повысить, выходя за рамки двухуровневого приближения задачи трех тел, т.е. включая в разложение (14) высшие состояния задачи двух центров<sup>/25/</sup>. С этой целью необходимо будет также найти волновые функции элект-

х) Эти минимумы являются следствием известного эффекта Рамзауэра-Таунсенда<sup>/5,11/</sup> и объясняют большие пробоги  $d_{\mu}$ -атомов, обнаруженные уже в первых опытах Альвареса и др.<sup>/24/</sup>.

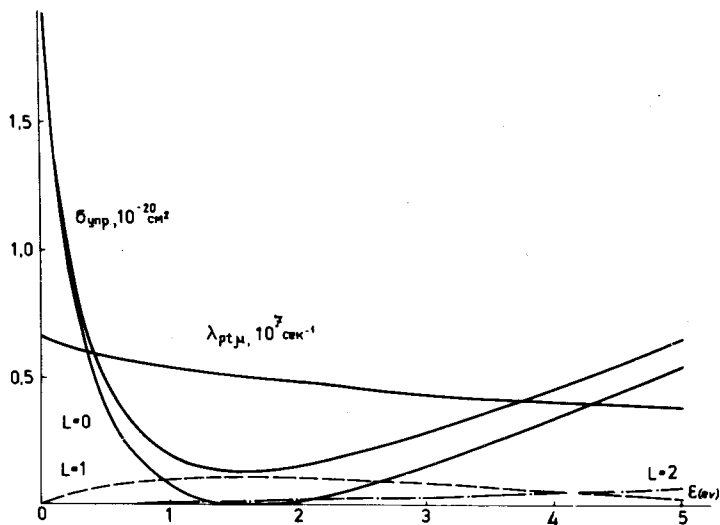
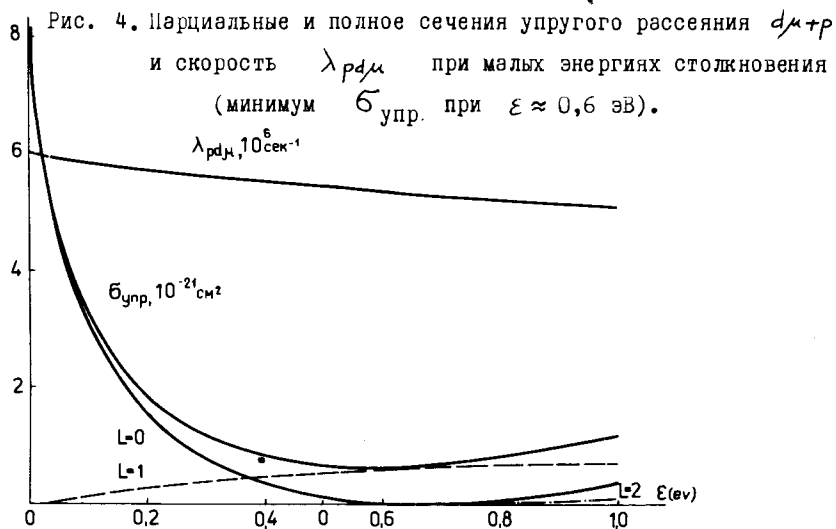


Рис. 5. Парциальные и полное сечения упругого рассеяния  $t_{\mu+p}$  и скорость  $\lambda_{pt\mu}$  при малых энергиях столкновения  $\varepsilon$ . (Минимум  $\sigma_{упр}$  при  $\varepsilon \approx 1,6$  эВ).

трона в поле молекулярного иона  $H_2^+$ , что само по себе является довольно сложной и до сих пор не решенной задачей атомной физики.

В заключение авторам приятно поблагодарить Б.П.Джелепова и В.В.Фильченкова за постоянный стимулирующий интерес к работе, С.И.Виницкого и С.С.Герштейна - за плодотворные обсуждения на всех этапах работы, Т.П.Пузынину, И.В.Пузынина и Л.Н.Сомова - за большую помощь при проведении численных расчетов.

#### Приложение

Для нахождения скоростей образования мезомолекул необходимо вычислить интеграл

$$I = \int \psi^{(+)*}(\vec{r}) \frac{d^3 \vec{p}}{p^3} \psi^{(-)}(\vec{r}) d\vec{r}, \quad (II.1)$$

где функции  $\psi^{(-)}(\vec{r})$  и  $\psi^{(+)}(\vec{r})$  определены соотношениями (8) и (10), а элемент объема в системе координат с осью  $Z$  вдоль направления  $\vec{q}$  равен  $d\vec{r} = r^2 \sin \theta_{qs} dr d\theta_{qs} d\phi_q$ . В разложении (10) конечному состоянию электрона с орбитальным моментом  $L = 1$  соответствует функция

$$\psi^{(+)} = \frac{3i}{4\pi q} e^{-i\theta_{qs}} R_{q1}(r) \cos \theta_{qs}. \quad (II.2)$$

Учитывая, что после усреднения по координатам мезона  $\vec{z}$  дипольный момент имеет отличную от нуля компоненту лишь в направлении вектора  $\vec{R}$ , а также используя известную формулу сферической тригонометрии

Таблица I

Скорости образования мезомолекул  $pp\mu$  и  $pd\mu$ 

Источник	$\lambda_{pp\mu}, 10^6 \text{ с}^{-1}$	$\lambda_{pd\mu}, 10^6 \text{ с}^{-1}$
Джелепов и др. (1962)	$1,5 \pm 0,6$	-
Bleser et al. (1963)	$1,89 \pm 0,20$	$5,8 \pm 0,3$
Conforto et al. (1964)	$2,55 \pm 0,18$	$6,82 \pm 0,25$
Будяшов и др. (1968)	$2,74 \pm 0,25$	-
Быстрицкий и др. (1975)	$2,34 \pm 0,17$	$5,53 \pm 0,16$
Зельдович и Герштейн (1960)	2,6	1,3
Cohen et al. (1960)	3,9	3,0
Данная работа при $\varepsilon = 0,04 \text{ эВ}$	2,20	5,91

Вычисленные значения соответствуют E1-переходам из состояния  $L=0$  непрерывного спектра в состояния  $\nu=0$ ,  $L=1$  мезомолекул  $pp\mu$  ( $\varepsilon_{\nu L} = 101,7 \text{ эВ}$ ) и  $pd\mu$  ( $\varepsilon_{\nu L} = 90,1 \text{ эВ}$ )/21/. В вычислениях приняты значения масс  $M_\mu = 206,769$ ;  $M_p = 1836,109$ ;  $M_d = 3670,398/22$ /. При энергии столкновения  $\varepsilon = 0,04 \text{ эВ}$  величины  $\frac{1}{2} |I(q)|^2$  и  $\langle d \rangle$  для мезомолекул  $pp\mu$  и  $pd\mu$  соответственно равны: 0,136 и 15,0; 0,140 и -21,7. Величина  $\lambda_{pp\mu}$  из работы /5/ исправлена в соответствии с замечаниями работы /1/.

$$\cos \theta_{PR} = \cos \theta_{pP} \cos \theta_{zR} + \sin \theta_{pP} \sin \theta_{zR} \sin \phi_z, \quad (11.3)$$

где  $\theta_{pR}$ ,  $\theta_{pP}$ ,  $\theta_{zR}$  - соответствующие углы между векторами  $\vec{q}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{R}$ , придем к результату:

$$I = -i e^{-i\delta_z} \left[ \frac{z_0^3}{2\pi(1+\Delta)} \right]^{1/2} \frac{d\vec{q}}{q^2} [I_1(q) + I_2(q)], \quad (11.4)$$

где

$$I_1(q) = \int_0^\infty d\rho R_{q1}(\rho) e^{-z_0 \rho} = \left[ \frac{b}{(1+b^2)(1-e^{-2\pi b})} \right]^{1/2} \left[ (1+z_0/z^*) e^{-2b \arctg \frac{q}{z_0}} + 1 - z_0/z^* \right]. \quad (11.5)$$

Второй интеграл определяется соотношением

$$I_2(q) = \frac{3}{4\pi \cos \theta_{pR}} \int_0^\infty d\rho R_{q1}(\rho) \int_0^\pi e^{-z_0 |\vec{p} - \vec{R}_p|} \cos \theta_{pR} \sin \theta_{pP} d\theta_{pP} d\phi_z. \quad (11.6)$$

Используя разложение  $\exp\{-z_0 |\vec{p} - \vec{R}_p|\}$  по полиномам Лежандра/5/, можно показать, что вклад в интеграл (11.6) дает только первый член разложения, т.е.

$$I_2(q) = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\rho R_{q1}(\rho) \int_{-1}^1 dt \exp\{-z_0(\rho^2 - 2\rho R_p t + R_p^2)^{1/2}\}. \quad (11.7)$$

Численные значения интегралов  $I_1(q)$  и  $I_2(q)$  в атомных единицах в случае образования мезомолекул  $pd\mu$  при  $q = 2,343$  ( $\varepsilon = 0,04 \text{ эВ}$ ) соответственно равны:  $I_1 = 0,414$ ,  $I_2 = 0,158$ .

Таблица П

Скорости образования мезомолекул  $\lambda$ ,  $10^6 \text{ с}^{-1}$ 

Тип пере- хода	Источник	$p\mu$	$d\mu$	$dt\mu$	$tt\mu$
E1	Зельдович и Герштейн (1960)	0,4	0,01	0,002	0,65
	Cohen et al. (1960)	-	0,034	-	-
	Данная работа при $\varepsilon = 0,04 \text{ эВ}$	6,49	0,013	$5 \cdot 10^{-4}$	2,96
E0	Зельдович (1954)	-	0,03	0,03	-
	Данная работа при $\varepsilon = 0,04 \text{ эВ}$	-	0,029	0,033	0,002

Вычисленные в данной работе значения  $\lambda$  (E1) соответствуют переходам из S-волны непрерывного спектра в состояния ( $\nu=0$ ,  $L=1$ ) мезомолекул, энергии связи которых равны  $|2I|$   $\varepsilon_{01}=92,2$  эВ,  $224,1$  эВ и  $229,7$  эВ для мезомолекул  $p\mu$ ,  $d\mu$  и  $dt\mu$  соответственно; приведенное значение  $\lambda_{tt\mu}$  соответствует переходу в состояние ( $\nu=1$ ,  $L=1$ ) с энергией  $\varepsilon_{11}=43,1$  эВ; скорость перехода в состояние  $\nu=0$ ,  $L=1$ ,  $\varepsilon_{01}=287,9$  эВ равна  $\lambda_{tt\mu}=2,7 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Значения  $\lambda$  (E0) соответствуют переходам в состояния ( $\nu=1$ ,  $L=0$ ) мезомолекул  $dd\mu$ ,  $dt\mu$  и  $tt\mu$ , энергии которых соответственно равны  $\varepsilon_{10}=33,2$  эВ,  $\varepsilon_{10}=31,8$  эВ и  $\varepsilon_{10}=81,8 \text{ эВ}/|2I|$ .

## Литература

1. Я.Б.Зельдович, С.С.Герштейн. УФН, 71, 581, 1960.
2. H.S.W. Massey, E.H.S. Burhop, H.V. Gilbody. Electronic and Ionic Impact Phenomena, v. V, 3276, Oxford, London, 1974.
3. S.S. Gerstein, L.I. Ponomarev. Mesomolecular Processes induced by  $\mu^-$  and  $\pi^-$  mesons, in "Muon Physics", ed. W. Hughes and C.S. Wu, v. III, 143, Academic Press, New York 1975.
4. В.Б.Беляев, С.С.Герштейн, Б.Н.Захарьев, С.П.Ломнев. ЖЭТФ, 37, 1652, 1959.
5. S. Cohen, D.L. Judd, R.J., Riddell. Phys. Rev., 119, 384, 1960.
6. В.П.Джелепов, П.Ф.Ермолов, Е.А.Кушниренко, В.И.Москалев, С.С.Герштейн. ЖЭТФ, 42, 439, 1962.
7. E. Bleser, L. Lederman, J. Rosen, J. Rothberg, E. Zavattini. Phys. Rev., 132, 2679, 1963.
8. G. Conforto, C. Rubbia, E. Zavattini, S. Focardi, Nuovo Cim., 33, 1001, 1964.
9. Ю.Г.Будяшов, П.Ф.Ермолов, В.Г.Зинов, А.Д.Конин, А.И.Мухин, К.О.Оганесян. Препринт ОИЯИ Р15-3964, Дубна, 1968.
10. В.М.Быстрицкий, В.П.Джелепов, В.И.Петрухин, А.И.Руденко, В.М.Суворов, В.В.Фильченков, Г.Хемниц, Н.Н.Хованский, Б.А.Хоменко. Препринт ОИЯИ Р1-9256, Дубна, 1975.
11. А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев, М.П.Файфман. ЖЭТФ, 68, 437, 1975.
12. Я.Б.Зельдович. ДАН, 95, 493, 1954.
13. А.В.Матвеевко, Л.И.Пономарев. ЖЭТФ, 59, 1593, 1970.
14. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика, Наука, 1974.

15. С.И.Виницкий, Л.И.Пономарев. ЯФ, 20, 576, 1974.
16. L.Pauling, E.W.Wilson. Introduction to Quantum mechanics, p. 349, New York, 1935.
17. D.R.Bates, R.H.C.Reid, in "Advances in Atomic and Molecular Physics", v. IV, Academic Press, New York, London, 1968; J.E.Power, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A274, 663, 1973;  
И.В.Комаров, Л.И.Пономарев, С.К.Славянов. "Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции", Наука, М., 1976.
18. G.Hunter, B.F.Gray, H.O.Prichard, J. Chem. Phys., 45, 3806, 1966;  
Л.И.Пономарев, Т.П.Пузынина. ЖВММФ, 8, 1256, 1968;  
Препринты ОИЯИ Р4-3405, Дубна, 1967, Р4-5040, Дубна, 1970.
19. L.I.Ponomarev, I.V.Puzynin, T.P.Puzinina. J.Comp. Phys., 13, 1, 1973.  
Л.И.Пономарев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина. Препринт ОИЯИ Р4-8884, Дубна, 1975
20. В.В.Бабиков. Метод фазовых функций в квантовой механике. Наука, М., 1968.
21. Л.И.Пономарев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина. ЖЭТФ, 65, 28, 1973.
22. И.П.Селинов. Изотопы, т. 3, Наука, М., 1970.
23. Л.И.Пономарев, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина. Препринт ОИЯИ Р4-9183, Дубна, 1975.
24. L.W.Alvarez, N.Brandner, F.S.Crowford, Jr., J.A.Crowford, P.Falk-Vairant, M.L.Good, J.D.Gow, A.H.Rosenfeld, F.Solmitz, M.L.Stefenson, H.K.Ticho, R.T.Tipp. Phys. Rev. 105, 1127, 1962.
25. Э.А.Весман. ЖЭТФ, Письма 5, 113, 1967;  
Известия АН ЭССР, физика № 4, 429, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел  
22 апреля 1976 года.