СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

97-81

Р4-97-81

В.Х.Шогенов*, Шхануков-Лафишев М.Х.*,
Х.М.Бештоев

ДРОБНЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ: ИНТЕРПРЕТАЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ В ФИЗИКЕ

*Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик

1997

ВВЕДЕНИЕ

За последние десятилетия понятие дробной производной вошло во многие области физики, механики, математической биологии [1—4,11]. Особенно плодотворно использование дробных производных при исследовании стохастических процессов [2,4].

В работе [2] для определения тепловых и диффузионных потоков на границе раздела сред применен метод расщепления оператора уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) T = 0$$

на два множителя, каждый из которых содержит только производную по x и производную порядка 1/2 по времени t. Следует обратить внимание на то, что в [11] изложен несколько иной прием для определения теплового потока на границе $x = 0$, где получен тот же результат, что и в [2].

Задача фильтрации жидкости во фрактальной среде (сильнопористой среде) описывается дифференциальным уравнением с дробной производной по времени порядка 1/2 [1].

В работе [4] показано как дробные производные возникают «естественно» при описании физических процессов стохастического переноса.

Возникает вопрос: можно ли дать физическую интерпретацию дробной производной, не связанную с той или иной конкретной проблемой? Такой, например, как интерпретация производной первого порядка — скорость изменения некоторой функции по соответствующей переменной.

В данной работе предлагается такая интерпретация как для производной порядка 1/2, так и произвольного порядка.

На основе предложенной интерпретации получены обобщенные уравнения переноса для медленных и быстрых стохастических процессов и решается первая начально-краевая задача. Вычисляется среднеквадратичный размер полимерной цепи и выводится уравнение Паули.

1. ЭЛЕМЕНТЫ ДРОБНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

В этом пункте для удобства чтения приведем некоторые факты из теории дробного интегродифференцирования. Само понятие дробного интегрирования связано с интегральным уравнением Абеля

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} = f(x),\quad x>\alpha, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1,\ a>-\infty$.

Уравнение (1) рассматривается на конечном отрезке $[a, b]$. Решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}. \tag{2}$$

Имеет место [5].

Теорема 1. Для того, чтобы уравнение Абеля (1) было разрешимо в $L_1(a, b)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f_{1-\alpha}(x)\in AC[a, b],\ f_{1-\alpha}(a) = 0,$$

где $f_{1-\alpha}(x) = \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\displaystyle\int_a^x \dfrac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$, $AC[a, b]$ — класс абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций.

Аналогично рассматривается уравнение Абеля вида

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{(1-\alpha)}} = f(t),\ x<b.$$

Тогда вместо (2) при $0<\alpha<1$ получается формула обращения вида

$$\varphi(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}.$$

Определение 1. Пусть $\varphi(x)\in L_1[a, b]$. Интегралы

$$(I^{\alpha}_{a+}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}},\quad x>a,$$

$$(I^{\alpha}_{b-}\varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b \frac{\varphi(t)dt}{(t-x)^{1-\alpha}},\quad x<b,$$

где $\alpha>0$, называются дробными интегралами порядка α. Первый из них называется левосторонним, а второй — правосторонним. Дробное интегрирование обладает полугрупповым свойством

$$I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{a+}\varphi,\ \ I^{\alpha}_{b-}I^{\beta}_{b-}\varphi = I^{\alpha+\beta}_{b-}\varphi,\ \ \alpha>0,\ \ \beta>0,$$

$\forall\varphi\in C[a,b]$, $C[a, b]$ — класс непрерывных на $[a, b]$ функций.

Определение 2. Для функции, заданной на $[a, b]$, каждое из выражений

$$(D^{\alpha}_{a+}f)(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}},$$

$$(D^{\alpha}_{b-}f)(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{d}{dx}\int_x^b \frac{f(t)dt}{(x-t)^{\alpha}}$$

называется дробной производной порядка α, $0<\alpha<1$, соответственно левосторонней и правосторонней.

Справедлива следующая (см. [5]) теорема.

Теорема 2. Пусть $0<\alpha<1$. Тогда равенство

$$D^{\alpha}_{a+}I^{\alpha}_{a+}\varphi = \varphi(x)$$

выполняется для любой суммируемой функции $\varphi(x)$, а равенство

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) \tag{3}$$

— для функции $f(x)\in I^{\alpha}_{a+}(L_1)$, где $I^{\alpha}_{a+}(L_1)$ — класс функций $f(x)$, представляемых дробным интегралом порядка α от суммарной функции $f(x) = I^{\alpha}_{a+}\varphi$, $\varphi(x)\in L_1(a, b)$.

Если же вместо $f(x)\in I^{\alpha}_{a+}(L_1)$ предположить, что функция $f(x)\in L_q(a, b)$ имеет суммируемую производную $D^{\alpha}_{a+}f$, то (3) неверно и заменяется формулой

$$I^{\alpha}_{a+}D^{\alpha}_{a+}f = f(x) - \frac{f_{1-\alpha}(a)}{\Gamma(a)}(x-a)^{\alpha-1}. \tag{4}$$

Для левосторонней дробной производной порядка α будем также пользоваться обозначением $D^{\alpha}_{a+}f \equiv (D^{\alpha}_{a+}f)x$.

2. ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Пусть $x = x(t)$ закон изменения во времени некоторой физической величины. Скорость изменения $x(t)$ запишем в форме

$$\frac{dx}{dt} = v(t)\tau_0, \tag{5}$$

где t — безразмерное время, τ_0 — характерное время данного процесса.

Предполагая $x(0)$ конечным, представим выражение (5) в виде

$$D_{0t}^{1/2} D_{0t}^{1/2} x(t) = v(t)\tau_0, \tag{6}$$

где $D_{0t}^{1/2} x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{x(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}$ — дробная производная порядка 1/2. Введем обозначение $D_{0t}^{1/2} x = s(t)$. Тогда (6) примет вид

$$D_{0t}^{1/2} v(t)\tau_0. \tag{7}$$

Решение уравнения (7) имеет вид [5]

$$s = \frac{\tau_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{v(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1/2}}. \tag{8}$$

Чтобы вычислить интеграл в (8), надо знать функцию $v(\tau)$, которая для различных физических процессов будет различной. Предположим, что $v(t) = v = \text{const}$. Тогда интеграл в (8) легко вычисляется и результат можно представить в форме

$$s^2 = \frac{4}{\pi} v^2 \tau_0 t. \tag{9}$$

В (9) мы вернулись к размерному времени t. С другой стороны, из статистической физики хорошо известна формула Эйнштейна для среднеквадратичного смещения броуновской частицы за время t

$$\langle x^2 \rangle = 2kt, \tag{10}$$

где k — коэффициент диффузии. Таким образом, если физическое явление, описываемое уравнением (5), является броуновским движением, то мы вправе рассматривать $s(t)$ как $s(t) = \sqrt{\langle x^2 \rangle}$, а $k = 2v^2\tau_0/\pi$ как коэффициент диффузии.

Усреднение в (10) идет по статистическому ансамблю. Согласно же эргодической гипотезе усреднение по времени должно совпадать с усреднением по ансамблю. Исходя из этого и из уравнения (9) и (10), можно сделать вывод: решением уравнения (7) при $v = \text{const}$ является некая функция, усредненная по времени специальным образом с помощью оператора $D_{0t}^{1/2}$.

Временная зависимость типа (9) или (10) характерна для диффузионных процессов, где необходимо учитывать взаимодействие физической системы в

амсамбле. Следовательно, введение дробной производной по времени порядка 1/2 равносильно введению некоторого статистического ансамбля. В этом случае физический смысл скорости v и времени τ_0 становится ясным — это средняя скорость свободного пробега «частицы» (или средняя скорость процесса) и среднее время столкновения «частиц» (время релаксации).

В свою очередь, введение статистического ансамбля равносильно введению взаимодействия, т.е. заменяя d/dt на $D_{0t}^{1/2}$ в дифференциальных уравнениях, мы неявно включаем дополнительные факторы взаимодействия физической системы. Поэтому приходим к утверждению, что уравнение (7) описывает некоторый стохастический процесс и при $v = \text{const}$ «чистую диффузию».

Выражения (7) и (8) легко обобщаются на дробные производные произвольного порядка $0 < \alpha < 1$.

Представим (5) в виде $D_{0t}^{\alpha} D_{0t}^{1-\alpha} x(t) = v(t)\tau_0$ и введем обозначение $D_{0t}^{1-\alpha} x = s(t)$. Получим уравнение

$$D_{0t}^{\alpha} s(t) = v(t)\tau_0, \tag{11}$$

здесь $D_{0t}^{\alpha} s = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{s(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}$ — дробная производная произвольного порядка α; $0 < \alpha < 1$. Решение (11) имеет вид [5]

$$s(t) = \frac{\tau_0}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{v(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}, \tag{12}$$

где $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера. При $v = \text{const}$, вычисляя интеграл в (12) и возвращаясь к размерному времени t, получим

$$s(t) = \frac{v\tau_0^{\alpha}}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} t^{1-\alpha}. \tag{13}$$

При $\alpha = 1/2$ выражение (13) переходит в (9), но при других значениях уравнение (11) будет описывать стохастический процесс, но уже не «чистую диффузию».

Вышеизложенная интерпретация дробных производных позволяет обобщить уравнения переноса (в принципе, и другие уравнения) введением или заменой обычных производных на дробные. Получающиеся при этом модели будут описывать сложные физические явления более адекватно, хотя математические трудности возрастают.

3. УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Обобщение уравнений переноса можно проводить по-разному. Здесь мы обобщим определение потока (закон Фурье — Фика), введя дробную производную по времени в форме

$$j(x, t) = -kD_{0t}^{\alpha} u_x(x, t); \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{14}$$

где k — коэффициент «диффузии», $u(x, t)$ — концентрация (температура и т.п.).

Производная в выражении (14) имеет вид

$$D_{0t}^{\alpha} u_x = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \frac{u_x(x, \tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha}}. \tag{15}$$

Подставляя (14) в уравнение $u_t = -j_x$, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = kD_{0t}^{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{16}$$

Здесь имеется в виду, что операторы D_{0t}^{α} и $\frac{\partial}{\partial x}$ коммутируют.

Действуя на обе части (16) оператором $D_{0t}^{-\alpha}$, с учетом формулы (4) получим

$$D_{0t}^{1-\alpha} u = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u(x, 0)}{\Gamma(\alpha)t^{1-\alpha}}. \tag{17}$$

Уравнение (17) описывает медленный случайный процесс. Это вытекает из той интерпретации дробной производной, которая дана выше. Поскольку дробная производная — это производная от специальным образом усредненной функции $u_x(x, \tau)$ в (15), а усреднение по времени идет на промежутке от 0 до t, но в точке x, то «частица» (процесс) как бы «заперта» в этой точке на этом промежутке времени. Поскольку в каждой точке x эта «остановка» имеет место, то весь процесс будет замедленным. Поэтому уравнение (17) называется уравнением субдиффузии. В работе [4] уравнение типа (14) получено другим способом.

Предположим теперь, что поток j можно представить в виде

$$j(x, t) = -kD_{ax}^{\alpha} u(x, t), \tag{18}$$

где

$$D_{ax}^{\alpha} u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{u(x', t)dx'}{(x-x')\alpha}. \tag{19}$$

Подставляя (18) в уравнение сохранения, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = kD_{ax}^{1+\alpha} u \tag{20}$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_a^x \frac{u(x', t)dx'}{(x-x')^{\alpha}}. \tag{21}$$

Усреднение в (19) идет по координате x' от a до x, но в момент времени t. Это означает, что скорость «частицы» (процесса) бесконечна, так как «частица» преодолевает (совершает «прыжок») расстояние $x - a$ в данный момент t. Поскольку скорость процесса на данном отрезке бесконечна, то верхний предел интегрирования в (20) можно зафиксировать. Пусть на верхнем пределе $x = b$, тогда производные по x в (20) можно внести под знак интеграла.

В результате получим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\alpha(1+\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_a^b \frac{u(x', t)dx'}{|x-x'|^{\alpha+2}}. \tag{22}$$

Уравнение (22), в силу сказанного выше, описывает быстрый стохастический перенос.

Уравнение такого типа при $a = -\infty$ и $b = \infty$ иным способом получено в [4].

4. ПЕРВАЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Для уравнения (17) в области $Q_T = \{(x, t)\colon\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим первую начально-краевую задачу:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0; \quad u(x, 0) = u_0(x). \tag{23}$$

Решение задачи (20), (23), не равное тождественно нулю, будем искать в виде

$$u(x, t) = X(x)T(t). \tag{24}$$

Подставляя (24) в уравнение (17), получим

$$X'' + \lambda X = 0, \ X(0) = X(l) = 0; \tag{25}$$

$$T' + \lambda D_{ax}^{\alpha} T = 0. \tag{26}$$

Таким образом, для определения $X(t)$ имеем задачу Штурма — Лиувилля (25), решение которой имеет вид

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi}{l} x,$$
$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \ k = 1, 2, 3, \ldots \tag{27}$$

Уравнение (26) перепишем в виде

$$T_k'(t) = -\frac{\lambda_k T_k(0)}{\Gamma(1-\alpha)t^{\alpha}} - \frac{\lambda_k}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} T_k'(\tau) d\tau,$$
$$T_k = \text{const} \neq 0. \tag{28}$$

Решение интегрального уравнения (28) со слабой особенностью можно выписать с помощью функции типа Миттаг — Леффлера [6]:

$$T_k(t) = T_k(0) E_{1/\beta}(-\lambda_k t^{\beta}; 1),$$

где

$$\beta = 1 - \alpha, \ E_{\rho}(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\mu + k\rho^{-1})}, \ \mu > 0, \ \rho > 0.$$

Решение задачи (20), (23) представим теперь в виде ряда

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(0) E_{1/\beta}(-\lambda_k t^{\beta}; 1) \sin \frac{k\pi}{l} x, \tag{29}$$

где

$$T_k(0) = \frac{2}{l} \int_0^l u_0(\xi) \sin \frac{k\pi}{l} \xi d\xi. \tag{30}$$

Пусть функция $u_0(0)$ в [0, 1] имеет непрерывную производную, причем $u_0(0) = u_0(l) = 0$, $u_0''(x)$ — кусочно-непрерывна, тогда ряд (29) удовлетворяет всем условиям задачи (20), (23). Последнее доказывается по известной схеме обоснования метода Фурье с использованием свойств функции Миттаг — Леффлера.

Полученное решение (29) преобразуем с помощью (30)

$$u(x, t) = \int_0^l \left[\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} E_{1/\beta}(-\lambda_k t^{\beta}; 1) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} \xi \right] u_0(\xi) d\xi.$$

Обозначим через

$$G^{\alpha}(x, \xi, t) = \left[\frac{2}{l} \sum_{k=1}^{\infty} E_{1/\beta}(-\lambda_k t^{\beta}; 1) \sin \frac{k\pi}{l} x \sin \frac{k\pi}{l} \xi \right],$$

тогда для решения задачи получим представление

$$u(x, t) = \int_0^l G^{\alpha}(x, \xi, t) u_0(\xi) d\xi.$$

Легко заметить, что функция влияния мгновенного точечного источника $G^{\alpha}(x, \xi, t)$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\alpha \to 0} G^{\alpha}(x, \xi, t) = G(x, \xi, t),$$

где $G(x, \xi, t)$ — функция Грина для классического уравнения диффузии $u_t = u_{xx}$.

Методом априорных оценок можно показать, что задача (20), (23) имеет единственное решение.

5. СРЕДНЕКВАДРАТИЧНЫЙ РАЗМЕР ПОЛИМЕРНОЙ ЦЕПИ

Уравнения (5) и (7) легко обобщить на трехмерный случай. Пусть $s^2 = s_x^2 + s_y^2 + s_z^2$, а s_i^2 определяется выражением (8) и при $v_i = \text{const}$, где $i = x, y, z$ выражением (9). Из этих формул получим

$$s^2 = \frac{4}{\pi} v^2 \tau_0 t, \ v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \tag{31}$$

Формулу (31) можно применить к полимерной цепи. Как известно [7,8], полимерную молекулу можно разбить на статистические сегменты, а полимерную цепь моделировать (в простейшем случае) как броуновское движение сегмента.

В этом случае скорость v в (31) мы можем трактовать как среднюю скорость скачка сегмента, а τ_0 — как время одного скачка.

Пусть d — размер сегмента (расстояние одного прыжка) и N — число сегментов в цепи. Тогда можно записать $v\tau_0 = d$ и $t = \tau_0 N$, подставляя их в (31), получим

$$s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} d N^{1/2}. \tag{32}$$

Формула (32) с точностью ~1 совпадает с аналогичной формулой для свободно сочлененной полимерной цепи [7—8].

Аналогичные рассуждения относительно уравнений (11—13) дают

$$s = \frac{d}{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)} N^{1-\alpha}. \tag{33}$$

В зависимости от α цепь может быть более вытянутой, чем дает (32).

В формуле (12) функцию $v(\tau)$ можно разложить в ряд по τ, тогда первый член разложения дает выражение (33), в следующие поправки войдет ускорение, а размер цепи будет зависеть от действующей силы (ускорение). Более подробно эти вопросы исследуются в другой работе. Здесь мы привели их как пример применения понятия дробной производной к конкретной проблеме.

6. ОБОСНОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ПАУЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Назовем оператором Шредингера следующее выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2mi\hbar}\hat{\vec{P}}^2. \tag{34}$$

Здесь t — время, m — масса некоторой частицы, $\hbar$ — постоянная Планка, $\hat{\vec{P}}$ — оператор импульса. Обозначения стандартные (см., например, [9]). Если оператором (34) подействовать на волновую функцию, то получим уравнение Шредингера для свободной частицы.

Введем некоторый векторный оператор $\hat{\vec{J}}$ такой, чтобы (34) можно было представить в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2mi\hbar}\hat{\vec{P}}^2\right) = \left(D_{0t}^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2mi\hbar}}\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\right)\left(D_{0t}^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2mi\hbar}}\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\right). \tag{35}$$

Считая, что $D_{0t}^{1/2}$ и $\hat{\vec{P}}$ коммутируют и раскрывая скобки в правой части (35), получим, что равенство (35) будет иметь место, если выполняется равенство

$$(\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}) = \hat{\vec{P}}^2. \tag{36}$$

Отсюда получим условия для $\hat{\vec{J}}$ в виде

$$\hat{J}_i\hat{J}_k + \hat{J}_k\hat{J}_i = 2\delta_{ik}, \tag{37}$$

где δ — символ Кронекера, $i, k = \{x, y, z\}$.

Условию (37) удовлетворяют хорошо известные матрицы Паули [9]. Матрицы Паули двухрядные, и, чтобы не нарушались правила матричного умножения, мы должны подействовать правой частью (35) на функцию вида $\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix}$.

Получим

$$\left(D_{0t}^{1/2} + \frac{1}{\sqrt{2mi\hbar}}\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\right)\left(D_{0t}^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2mi\hbar}}\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\right)\Psi = 0. \tag{38}$$

Введем новую функцию $\chi(x, r)$ по формуле

$$\chi = \left(D_{0t}^{1/2} - \frac{1}{\sqrt{2mi\hbar}}\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\right)\Psi.$$

Тогда уравнение (38) примет вид

$$\sqrt{i\hbar}D_{0t}^{1/2}\chi = -\frac{1}{\sqrt{2m}}\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\chi. \tag{39}$$

Решение (39) ищем в виде

$$\chi(\vec{r}, t) = \chi(\vec{r})f(t). \tag{40}$$

Подставляя (40) в (39) и разделяя переменные, получим два уравнения

$$D_{0t}^{1/2}f(t) = -\frac{\lambda}{\sqrt{i\hbar}}f(t), \qquad (41)$$

$$\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\chi(\vec{r}) = \lambda\sqrt{2m}\chi(\vec{r}). \qquad (42)$$

Здесь λ — постоянная разделения переменных. Действуя на (41) еще раз оператором $D_{0t}^{1/2}$, можно найти решение получаемого уравнения в виде

$$f(t) = \exp\left(i\frac{\varepsilon t}{\hbar}\right),$$

где $\lambda^2 = \varepsilon$ и $\varepsilon > 0$, чтобы функция из (42) была непрерывна и конечна при всех x, y, z.

Таким образом из (41) можно получить временную часть уравнения Шредингера. Поскольку $\lambda = \pm\sqrt{\varepsilon}$, то (42) примет вид

$$\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}\chi(r) = \pm\sqrt{2m\varepsilon}\chi(r). \qquad (43)$$

Если на (42) подействовать оператором $\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}$, то можно получить и пространственную часть уравнения Шредингера для свободной частицы.

Таким образом видно, что уравнение (39) содержит всю информацию уравнения Шредингера для свободной частицы. Но это уравнение содержит еще больше информации за счет операторов $\hat{\vec{J}}$ и $D_{0t}^{1/2}$.

Из (43) видно, что собственные значения оператора $\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}$ имеют только два значения. С точки зрения интерпретации квантовой механики это означает, что физическая величина $\vec{J}$, соответствующая оператору $\hat{\vec{J}}$, принимает только два значения для произвольного направления импульса $\hat{\vec{P}}$ свободной частицы. Такими свойствами, как известно [9—10], обладает спин 1/2.

Из вышеизложенного видно, как учесть спин в операторе (34) и, тем самым, в уравнении Шредингера. Оператор $\hat{\vec{P}}$ надо заменить оператором $\hat{\vec{J}}\hat{\vec{P}}$.

Однако из-за равенства (36) для свободной частицы ничего не меняется. Предположим, что частица массы m и заряда e движется в электромагнитном поле с потенциалами φ и $\vec{A}$, тогда $\hat{\vec{P}}$ надо заменить на $\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}$, где c —

скорость света. В этом случае равенство (36) уже не будет выполняться. Получим

$$\left(\hat{\vec{J}}\left(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right)^2 \neq \left(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2. \qquad (44)$$

Теперь запишем уравнение Шредингера для заряда в поле $\vec{A}$ и φ. С учетом (44) имеем

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\hat{\vec{J}}\left(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right\}^2\psi + e\varphi\psi. \qquad (45)$$

Используя свойство (37), уравнение (45) можно привести к виду

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left\{\hat{\vec{J}}\left(\hat{\vec{P}} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)\right\}^2\psi - \hat{\vec{\mu}}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\,\psi + e\varphi\psi, \qquad (46)$$

где $\hat{\vec{\mu}} = \frac{e\hbar}{2mc}\hat{\vec{J}}$ — оператор магнитного момента.

Следовательно, мы показали, что используя понятие дробной производной по времени, можно ввести понятие спина в уравнение Шредингера и вывести уравнение Паули (46).

В данной работе оператор спина мы обозначили через $\hat{\vec{J}}$ (хотя стандартное обозначение $\hat{\vec{\sigma}}$), чтобы подчеркнуть, что если даже не были бы известны матрицы Паули, одно лишь требование факторизации оператора (43) заставляет ввести оператор $\hat{\vec{J}}$ и, следовательно, спин частицы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Нигматуллин Р.Р. — Phys. Stat. Sol., 1986, b.133.
2. Бабенко Ю.И. — Теплообмен. Методы расчета тепловых и диффузионных потоков. М.: Химия, 1986.
3. Нахушев А.М. — Уравнение математической биологии. М.: Высшая школа, 1995.
4. Чукбар К.В. — ЖЭТФ, 1995, т.108, №5(11), с.1875—1884.
5. Самко С.Г., Килбис А.А., Маричев О.И. — Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
6. Кочубей А.Ю. — Дифференциальные уравнения, 1990, т.26, с.660—670.

7. Гроссберг А.Ю., Хохлов А.Р. — Статистическая физика макромолекул. М.: Наука, 1989.
8. Исихара А. — Статистическая физика. М.: Мир, 1973.
9. Левич В.Г. и др. — Курс теоретической физики, М.: Наука, 1969, т.2.
10. Ахиезер А.И., Берестецкий В.Б. — Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1981, Мир, 1964.
11. Курант Р. — Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 марта 1997 года.