ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4-97-388

Б.Ф.Костенко*

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С НЕЭРМИТОВЫМ ГАМИЛЬТОНИАНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

*E-mail: Kostenko@main1.JINR.Dubna.SU
или BFK@LCTA.JINR.Dubna.SU

1997

Костенко Б.Ф. P4-97-388

Некоторые методы решения уравнения Шредингера
с неэрмитовым гамильтонианом взаимодействия

На примере конкретной точно решаемой модели обсуждаются методы решения уравнения Шредингера с гамильтонианом вида $\hat{H} = \hat{H}_1 + i\hat{H}_2$, где $\hat{H}_i^+ = \hat{H}_i$, а $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ не коммутируют, $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] \neq 0$. Приведены аргументы в пользу того, что рассматриваемая модель является вполне последовательной как с физической, так и с математической точки зрения. Показано, что уравнение Шредингера с неэрмитовым гамильтонианом взаимодействия, не являющимся оператором нормального типа, позволяет преодолеть замечание Вигнера о том, что известные в настоящее время модели самовоспроизводящихся систем не согласуются с законами квантовой механики.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Kostenko B.F. P4-97-388

Methods of Solution of the Schroedinger Equation
with Non-Hermitian Hamiltonian

Methods of solution of the Schroedinger equation with non-Hermitian Hamiltonian $\hat{H} = \hat{H}_1 + i\hat{H}_2$, where $\hat{H}_i^+ = \hat{H}_i$ and $[\hat{H}_1, \hat{H}_2] \neq 0$, are discussed using an exactly solvable quantum model. Some arguments about mathematical and physical consistency of the model are presented. A solution of Wigner's paradox concerning impossibility to describe selfreproducing systems in the frame of quantum mechanics is given.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

1 Введение

Начиная с 1928 года, когда Г. Гамову удалось объяснить явление α-распада, феноменологические несамосопряженные гамильтонианы стали неотъемлемой частью теоретической физики. В настоящее время они используются для описания резонансов, процессов неупругого рассеяния, моделирования поведения открытых квантовых систем (см., например, [1], где дан обзор строгих математических результатов в этой области). Несмотря на огромное число публикаций по данному вопросу, все известные автору модели с неэрмитовым гамильтонианом взаимодействия относятся к случаю, когда эрмитовая и антиэрмитовая части гамильтониана взаимодействия

$$\hat{H}_{int} = \hat{H}_1 + i\hat{H}_2, \tag{1}$$

$\hat{H}_i^+ = \hat{H}_i$, коммутируют друг с другом

$$[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = 0,$$

т.е. когда H_{int} является нормальным оператором. Такова, например, модель оптического потенциала [2], где

$$H_{int} = V_1(x) + iV_2(x),$$

это же подразумевает временная эволюция векторов состояния, предложенная Гамовым. Между тем понятно, что если операторы $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ не коммутируют, то известная в квантовой механике формула

$$\psi_t = \sum_n C_n e^{-i(E_n - i\frac{\Gamma}{2})t}\varphi(E_n, \Gamma_n),$$

явно решающая уравнение Шредингера с неэрмитовым гамильтонианом, оказывается неприменимой. Для построения динамики в этом случае необходимо изобретать специальные приемы, зависящие, вообще говоря, от явного вида операторов $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$. В настоящей работе мы обсудим некоторые возможные подходы к этой проблеме, используя в качестве иллюстрации конкретную модель с неэрмитовым оператором взаимодействия аномального вида. После этого будет рассмотрена физическая интерпретация найденных решений и указана возможная область применения такого рода взаимодействий.

2 Поле, взаимодействующее с классическим источником

Простейшая модель, приводящая к неунитарному оператору эволюции — поле, взаимодействующее с классическим источником. Предположим, что это взаимодействие описывается потенциалом

$$\hat{V}(t) = j_1^*(t)\hat{a} + j_2(t)\hat{a}^+, \tag{2}$$

где $\hat{a}^+$ и $\hat{a}$ — операторы рождения и уничтожения квантов поля, удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям

$$[\hat{a}, \hat{a}^+] = 1,$$

а j_1, j_2 — классические токи, ответственные за процессы поглощения и излучения соответственно. Если $j_1(t) \neq j_2(t)$, то гамильтониан системы неэрмитов. Эволюция вектора состояния поля в представлении взаимодействия описывается уравнением Шредингера,

$$i\frac{\partial}{\partial t} \mid \psi_t >= \hat{V}(t) \mid \psi_t >,$$

формальное решение которого для случая

$$\mid \psi_0 >= \mid 0 >$$

дается формулой Дайсона[1]

$$\begin{aligned} \mid \psi_t > &= Te^{-i\int_0^t \hat{V}(t)\,dt} \mid 0 > = \\ &= [1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 ... \int_0^t dt_n T(\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)...\hat{V}(t_n))] \mid 0 > . \end{aligned} \tag{3}$$

Рассчитаем вклад n-го члена разложения Дайсона в m-частичное конечное состояние $\mid m >$, где $n \geq m$. Согласно теореме Вика, T-произведение, входящее в подынтегральное выражение, можно представить в виде суммы нормально упорядоченных операторов со всеми возможными хронологическими спариваниями. При действии на вакуумное состояние ненулевой вклад дадут лишь члены, не содержащие операторов уничтожения, так что, например,

$$:\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)...\hat{V}(t_m): \mid 0 >= j_2(t_1)j_2(t_2)...j_2(t_m)(\hat{a}^+)^m \mid 0 > .$$

Из n операторов, входящих в T-произведение, можно выбрать m неспаренных C_n^m способами, в то время как среди остальных $n-m$ операторов для образования хронологического спаривания существует

$$(n-m-1)!! = \frac{(n-m)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}}$$

возможностей. Поэтому вклад n-го члена в m-частичное состояние составит

$$\begin{aligned} & \frac{(-i)^n}{n!} C_n^m \frac{(n-m)!}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}} \left(\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \overline{\hat{V}(t_1)\hat{V}(t_2)}\right)^{\frac{n-m}{2}} \cdot \\ & \cdot \left(\int_0^t dt j_2(t)\right)^m (\hat{a}^+)^m \mid 0 >= \\ = & \frac{(-\alpha)^{\frac{n-m}{2}}}{\left(\frac{n-m}{2}\right)!} \frac{(-i)^m}{m!} \beta^m (\hat{a}^+)^m \mid 0 >, \end{aligned} \tag{4}$$

[1] Возможность использования формулы Дайсона для неэрмитовых гамильтонианов обсуждается, например, в [1].

где

$$\alpha = \frac{1}{2}\int_0^t dt_1 \int_0^t dt_2 \overline{\hat V(t_1)\hat V}(t_2), \qquad \beta[j_2;\ t] = \int_0^t dt j_2(t), \tag{5}$$
$$\frac{n-m}{2} = 0, 1, 2, \ldots,$$

а черта сверху отвечает хронологическому спариванию.

Определив обычным образом (см., например, [3]) хронологическое спаривание операторов взаимодействия

$$T(\hat V(t_1)\hat V(t_2)) =: \hat V(t_1)\hat V(t_2) : + \overline{\hat V(t_1)\hat V}(t_2),$$

для рассматриваемых потенциалов нетрудно найти

$$\overline{\hat V(t_1)\hat V}(t_2) = \begin{cases} j_1^*(t_1) j_2(t_2), & \text{если } t_2 < t_1, \\ j_1^*(t_2) j_2(t_1) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

С учетом этого, имеем

$$\alpha[j_1, j_2;\ t] = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 j_1^*(t_1) j_2(t_2).$$

Суммарный вклад всех членов разложения Дайсона в m-частичное состояние, очевидно, равен

$$e^{-\alpha}\frac{(-i\beta)^m}{\sqrt{m!}} \mid m >,$$

и полный вектор состояния поля излучения в момент времени t имеет, таким образом, вид

$$\mid \psi_t >= e^{-\alpha}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-i\beta)^m}{\sqrt{m!}} \mid m > . \tag{6}$$

Несмотря на то, что подход, основанный на формуле Дайсона, дает наиболее общий метод решения задачи расчета оператора эволюции, отвечающего неэрмитовому гамильтониану взаимодействия[2], по крайней мере для задач, допускающих постановку в представлении вторичного квантования[3], практическое его использование затруднено необходимостью решения достаточно сложных комбинаторных

[2]В том случае, когда потенциал взаимодействия является оператором фермионного типа (например, электромагнитное поле, взаимодействующее с двухуровневым источником), вместо дайсоновской T-экспоненты следует использовать более общий вольтерровский ряд

$$U(t_2, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-i)^n \int \ldots \int d\tau_1 \ldots d\tau_n \theta(\tau_1 - \tau_2) \ldots \theta(\tau_{n-1} - \tau_n) V(\tau_1) \ldots V(\tau_n).$$

[3]Интересная попытка использования теоремы Вика для решения задач рассеяния была предпринята в [4,5] и последующих работах других авторов.

задач. Поэтому в некоторых случаях удобнее использовать другие методы, быстрее приводящие к цели.

Например, в частном случае, когда токи, создающие поле, имеют вид ступеньки постоянной высоты

$$j_i = \begin{cases} const_i, & \text{если } 0 < t < T, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

решение может быть найдено следующим простым способом:

$$\mid \psi_t >= e^{-i\hat V t} \mid 0 >= e^{-\frac{j_1^* j_2 t^2}{2}} e^{-itj_2 \hat a^+} e^{-itj_1^* \hat a} \mid 0 >=$$
$$= e^{-\frac{j_1^* j_2 t^2}{2}} e^{-itj_2 \hat a^+} \mid 0 >= e^{-\frac{j_1^* j_2 t^2}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-itj_2)^m}{\sqrt{m!}} \mid m >,$$

где мы использовали известное операторное тождество

$$e^{\hat A + \hat B} = e^{\hat A} e^{\hat B} e^{-\frac{1}{2}[\hat A, \hat B]},$$

вытекающим из формулы Кэмпбелла-Хаусдорфа при

$$[\hat A, \hat B] = C\ \hat I.$$

Указанное операторное тождество, в принципе, позволяет получить решение поставленной задачи и в общем виде, если воспользоваться следующим из нее рекуррентным соотношением

$$\mid \psi_{t+dt} >= e^{\frac{1}{2}\phi_2(\phi_2 - \phi_1)^*} \hat D^+(\phi_2) e^{(\phi_2 - \phi_1)^* \hat a} \mid \psi_t >,$$

где $\phi_k = -ij_k dt$, $\hat D^+(\alpha) = e^{\alpha \hat a^+ - \alpha^* \hat a}$, однако объем вычислений при этом существенно возрастает. Формула Кэмпбелла-Хаусдорфа приводит естественным образом к постановке следующей "обратной задачи" нахождения неэрмитовых гамильтонианов H, для которых оператор эволюции допускает представление в факторизованном виде

$$\hat U_t = e^{-i\int_0^t H(\hat a, \hat a^+; t)dt} = e^{-if(\hat a^+)t} e^{-ig(\hat a)t},$$

так что

$$\mid \psi_t >= e^{-if(\hat a^+)t} \mid 0 > .$$

Ясно, однако, что в отличие от подхода, основанного на формуле Дайсона, область применимости данного метода ограничена неэрмитовыми гамильтонианами лишь некоторого специального вида.

Существенным недостатком обоих предыдущих подходов является их формальность, не позволяющая понять физические особенности процессов неунитарной эволюции. Поэтому в следующем разделе мы обсудим комплексные марковские цепи, дающие наглядное представление о том, что же в действительности происходит с системами такого типа в каждый конкретный момент времени.

3 Обобщенный марковский процесс рождения и гибели квантовых систем

Представим уравнение Шредингера, обсуждавшееся в предыдущем разделе, в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве чисел заполнения. Для этого запишем вектор состояния в виде

$$| \psi_t >= \sum_n \psi_n(t) \mid n >,$$

где ψ_n — амплитуда вероятности обнаружить систему в состоянии, содержащем n частиц, и воспользуемся соотношениями

$$\hat{a} \mid n >= \sqrt{n} \mid n-1 >, \qquad \hat{a}^+ \mid n >= \sqrt{n+1} \mid n+1 > .$$

В результате получим

$$\begin{cases} i\partial_t\psi_0 = & \sqrt{1}j_1^*(t)\psi_1, \\ i\partial_t\psi_1 = \sqrt{1}j_2(t)\psi_0 & + \sqrt{2}j_1^*(t)\psi_2, \\ \;.\;\;.\;\;. & \\ i\partial_t\psi_n = \sqrt{n}j_2(t)\psi_{n-1} & + \sqrt{n+1}j_1^*(t)\psi_{n+1}, \\ \;.\;\;.\;\;. & \end{cases}$$

откуда видно, что источниками изменения амплитуды ψ_n являются амплитуды ψ_{n-1} и ψ_{n+1}, умноженные на некоторые коэффициенты, которые можно отождествить с амплитудами вероятности перехода из состояний $| n-1 >$ и $| n+1 >$ в $| n >$. На рис. 1 показана обобщенная марковская цепь с комплексными амплитудами перехода, отвечающая этой системе уравнений, где стрелки и стоящие рядом с ними символы указывают направления и амплитуды (отнесенные к единице времени) соответствующих переходов.

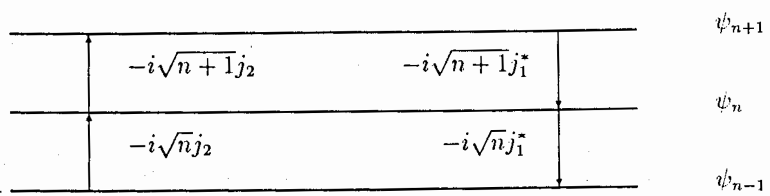

рис. 1

Полученную систему уравнений можно решить методом производящей функции, хорошо известным в теории обычных марковских цепей. Для этого определим производящую функцию с помощью соотношения[4]

$$\Pi(s,t) := \psi_0 + \psi_1\frac{s^1}{\sqrt{1!}} + \psi_2\frac{s^2}{\sqrt{2!}} + ... + \psi_n\frac{s^n}{\sqrt{n!}} + ... \quad .$$

Можно проверить, что вышеуказанная система уравнений эквивалентна следующему уравнению для производящей функции

$$i\,\partial_t\Pi(s,t) = [j_1^*(t)\partial_s + j_2(t)s]\Pi(s,t).$$

Из начального условия

$$\vec{\psi}(0) = (1,0,0,...)$$

имеем

$$\Pi(s,0) = \psi_0(t).$$

Кроме того, из определения производящей функции понятно, что

$$\Pi(0,t) = \psi_0(t).$$

Нетрудно убедиться в том[5], что решение поставленной краевой задачи имеет вид (6), полученный в предыдущем разделе.

С физической точки зрения, в рассматриваемой задаче поучительно отделить явным образом унитарную эволюцию от динамики процессов рождения-уничтожения. Такое разделение, вообще говоря, неоднозначно. Определяя токи, вовлеченные в унитарную эволюцию и процессы рождения-уничтожения, как

$$I = p_1j_1 + p_2j_2,$$

и

$$J = j_2 - j_1,$$

соответственно, где

$$p_1 + p_2 = 1,$$

[4]Нахождение числовых коэффициентов, входящих в разложение производящей функции, является наиболее слабым местом данного метода. Фактически, они должны быть каким-то образом угаданы.

[5]Задача легко решается введением интегрирующего множителя

$$\Pi(t,s) = e^{-is\int_0^t j_2(t)\,dt}\Phi(t).$$

При этом

$$\Phi(t) = e^{-\int_0^t j_1^*(\tau)\int_0^\tau j_2(\tau')d\tau d\tau'}.$$

уравнению Шредингера для некоторой компоненты вектора состояния нетрудно придать вид

$$i\partial_t\psi_n = \sqrt{n}I\psi_{n-1} + \sqrt{n+1}I^*\psi_{n+1} + \sqrt{n}p_1J\psi_{n-1} - \sqrt{n+1}p_2J^*\psi_{n+1}.$$

Первые два члена в правой части последнего соотношения описывают унитарную эволюцию отдельных квантовых систем, отвечающую $j_1 = j_2 = I$, третий и четвертый — процессы размножения и гибели. На рис. 2 показана комплексная марковская цепь, отвечающая этому представлению процесса[6].

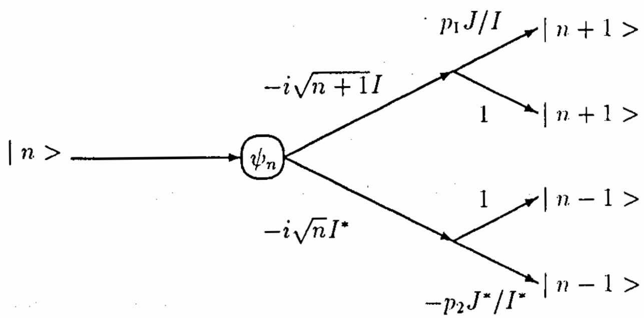

рис. 2

Из рис.2 видно, что на первом шаге происходят переходы системы из $|n>$ в $|n+1>$ и $|n-1>$ состояния (с амплитудами вероятности $-i\sqrt{n+1}I$ и $-i\sqrt{n}I^*$ соответственно), не сопровождающиеся изменением нормировки волновой функции. На втором этапе состояния $|n+1>$ и $|n-1>$ "расщепляются", что и приводит к изменению общего числа квантовых систем. При этом, если $Re(J/I) > 0$, то интерференция продуктов "распада" состояний $|n+1>$ и $|n-1>$ является конструктивной и деструктивной соответственно, что отвечает размножению первых и гибели вторых (таким образом, среднее число частиц в каждой системе с течением времени увеличивается). При $J < 0$ ситуация обратная.

Удобно взять

$$p_1 = 0, \; p_2 = 1.$$

В этом случае уравнение Шредингера

$$i\partial_t \mid \psi_t >= [(\hat{a}I^* + \hat{a}^+I) + (-\hat{a}p_2J^* + \hat{a}^+p_1J)] \mid \psi_t > \qquad (7)$$

[6]Подразумевается, что амплидуды событий, идущих параллельно, необходимо складывать, а последовательных — перемножать [6]. Для простоты на рисунке указаны лишь потоки амплитуды вероятности, **вытекающие** из ψ_n, которые могут быть найдены с помощью уравнений для $\partial_t\psi_{n-1}$ и $\partial_t\psi_{n+1}$.

распадается на два независимых уравнения, одно из которых описывает унитарную внутреннюю динамику, а другое — процессы рождения и гибели. Подставляя в (7) $|\psi_t>$ в форме

$$\mid \psi_t >= Q(t) \mid \phi_t >, \qquad (8)$$

получим

$$i(\partial_tQ) \mid \phi_t > +iQ\partial_t \mid \phi_t >= Q(\hat{a}j_2^* + \hat{a}^+j_2) \mid \phi_t > -Q\hat{a}J^* \mid \phi_t > .$$

Откуда видно, что если $\mid \phi_t >$ — решение УШ

$$i\partial_t \mid \phi_t >= (\hat{a}j_2^* + \hat{a}^+j_2) \mid \phi_t >,$$

описывающее унитарную эволюцию,

$$\mid \phi_t >= e^{-\alpha[j_2,\, j_2]} \sum_n \frac{(-i\beta)^n}{\sqrt{n!}} \mid n >,$$

то для $Q(t)$, с учетом

$$\hat{a} \mid \phi_t >= -i\beta \mid \phi_t >,$$

имеем независимое "уравнение Шредингера" с мнимым потенциалом

$$i\partial_tQ(t) = (i\beta J^*)Q(t),$$

решение которого

$$Q(t) = e^{\alpha[J,\, j_2]}$$

описывает процессы рождения или уничтожения квантовых систем, сопровождающиеся изменением нормировки волновой функции.

В частном случае, когда $Re(\beta J^*) < 0$, имеем когерентное состояние с конечным временем жизни, аналогичное частицам - резонансам, в то время как обычный рецепт построения таких состояний, с использованием нормальных гамильтонианов (см. введение), здесь не применим. Это связано с тем, что в данном случае не существует нормированных состояний, отвечающих собственным функциям эрмитовой части гамильтониана (2)

$$H_h = I^*\hat{a} + I\hat{a}^+.$$

Действительно, из уравнения на собственные значения

$$H_h \mid \psi >= E \mid \psi >, \qquad \mid \psi >= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mid n >$$

следует, что

$$C_{n-1}\sqrt{n}I + C_{n+1}\sqrt{n+1}I^* = EC_n,$$

или

$$C_{n+1} = \frac{EC_n - \sqrt{n}C_{n-1}I}{\sqrt{n+1}I^*}.$$

При $n \to \infty$: $\quad C_{n+1} \sim \sqrt{\frac{n}{n+1}} C_{n-1}$, поэтому $\sum_n \mid C_n \mid^2 \to \infty$, что и требовалось доказать. Таким образом, роль "нормального" гамильтониана, порождающего состояния с конечным временем жизни здесь, в действительности играет аномальный гамильтониан вида

$$H = (\hat{a}I^* + \hat{a}^+ I) - \hat{a}J^*. \tag{9}$$

4 Физическая интерпретация векторов состояния с нормой, отличной от единицы

Иногда ошибочно считают, что неэрмитовость гамильтониана приводит автоматически к нарушению Т-инвариантности уравнений эволюции. И поскольку последняя нарушается крайне редко [7], то это замечание, будь оно верно, фактически, исключало бы возможность встретиться в реальных условиях с процессами, описывающимися неунитарными операторами эволюции. В том, что неэрмитовость гамильтониана не связана непосредственно с нарушением Т-инвариантности, можно убедиться с помощью следующего простого примера. Пусть

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \qquad \hat{H}_2 = -\frac{\hat{p}}{2},$$

а начальное состояние ψ_0 характеризуется, по крайней мере — приближенно, некоторым значением импульса $\psi_0 = \psi(p)$:

$$\hat{p}\psi_0 = p\psi_0.$$

По определению динамика системы называется инвариантной относительно операции обращения времени $\hat{O}_t$, если

$$\psi_0^R = e^{-i\hat{H}t}\psi_t^R,$$

где

$$\psi_0^R = \hat{O}_t\psi(p) = \psi^*(p) = \psi(-p),$$

$$\psi_t^R = \hat{O}_t\psi_t = \psi_t^* = e^{i\frac{p^2}{2m}t - \frac{p}{2}t}\psi(-p).$$

Легко проверить, что динамика в этом случае, несмотря на неэрмитовость гамильтониана, действительно инвариантна относительно $\hat{O}_t$. При этом если прямая эволюция характеризуется уменьшением нормы вектора состояния со временем, то обратная — ее возрастанием, и наоборот. Можно также убедиться в том, что для существования Т-инвариантности необходимо, чтобы выполнялось соотношение [8]

$$\hat{H}^* = \hat{H},$$

где $\hat{H}^*$ — оператор, комплексно сопряженный [7] к $\hat{H}$.

[7]Для иллюстрации разницы между комплексным и эрмитовым сопряжением укажем, например, что $\hat{p}^+ = \hat{p}$, $\hat{p}^* = -\hat{p}$.

Хотя предыдущее обсуждение уже в какой-то мере прояснило физический смысл решений УШ с неэрмитовым гамильтонианом, ряд вопросов, в особенности касающихся состояний с нормой большей, чем единица, нуждается в более детальном рассмотрении.

Как известно [9], обычные (т.е. нормированные на единицу) когерентные состояния $|\alpha>$ могут быть созданы с помощью унитарного оператора

$$D^+(\alpha) := e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}},$$

действующего на вакуумное состояние

$$|\alpha >= D^+(\alpha)|0> .$$

Одновременное рождение нескольких пакетов амплитуды α, описываемое оператором $D^+(\alpha)^N$, может быть интерпретировано как процесс рождения классического поля с амплитудой $N\alpha$:

$$D^+(\alpha)^N|0>= D^+(N\alpha)|0>= |N\alpha> .$$

Действие приемника, отщепляющего от состояния $|N\alpha>$ пакет с амплитудой α, описывается оператором $D(\alpha) = D^+(-\alpha)$:

$$D(\alpha)|N\alpha >= |(N-1)\alpha> .$$

В книге [10] идеальное приемное устройство, вычитающее из поступающего на него волнового пакета некоторую часть и затем измеряющее число квантов в отделенной части с единичной эффективностью, названо квазифизическим[8].

Векторы состояния $|\beta >= Q|\alpha >, Q \neq 1$, отвечающие обсуждающемуся здесь неунитарному оператору эволюции, также содержат некоторое, вообще говоря, отличное от единицы число систем с векторами состояния $|\alpha>$. Однако в последнем случае состояния $|\alpha>$ берутся "по отдельности", или, если точнее, представляют собой результат "расщепления" состояния $|N\alpha>$ на N пакетов с амплитудой α с помощью "квазифизического" измерительного устройства[9]. Для иллюстрации разницы укажем, например, что среднее число частиц в состоянии $|N\alpha>$ равно

$$<n>=<N\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|N\alpha>= N^2|\alpha|^2.$$

В то же время, после расщепления этого состояния на N отдельных пакетов и последующего измерения количества частиц, получим число, в N раз меньшее:

$$<n>= N<\alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha>= N|\alpha|^2.$$

[8]Описанный здесь процесс измерения не укладывается в простейшую схему квантового измерения, предложенную фон Нейманом, согласно которой считается, что после измерения наблюдаемой $\hat{A} = \Sigma_a a|a><a|$ система оказывается в одном из состояний $|a>$. Однако он может быть описан в рамках более общей модели, сформулированной в [11].

[9]На связь неунитарных операторов эволюции с процессами квантовых измерений впервые было указано в работах [12]

В том случае, когда среднее число квантовых систем $< N >$ не равно целому числу, ненормированному состоянию $|\beta >= \sqrt{< N >}|\alpha >$ отвечает некоторое **распределение вероятности** P_N зарегистрировать N квантовых систем в состоянии $|\alpha >$. Если расщепляемое когерентное состояние имеет вид

$$|\gamma >= |Z\alpha >,$$

где

$$M - 1 \leq Z \leq M,$$

то после отщепления от него $(M-1)$-го пакета получим нормированное когерентное состояние

$$|(Z - M + 1)\alpha >,$$

которое будет восприниматься квазифизическим измерительным устройством как состояние $|\alpha >$ с вероятностью

$$w = | < \alpha \mid (Z - M + 1)\alpha > |^2.$$

Поэтому распределение вероятности того, что измерительный прибор зарегистрирует N экземпляров изучаемой системы, имеет вид

$$P_N = (1 - w)\delta_{N,M-1} + w\delta_{N,M}.$$

Здесь имеется очевидная аналогия со статистической физикой, где рассматриваются малые и большие канонические ансамбли. В соответствии с этой аналогией, можно называть ансамбли измерений малыми или большими, в зависимости от того, фиксировано или нет полное число относящихся к ним квантовых систем. Для ансамблей, содержащих отличное от единицы число квантовых систем, известную вероятностную интерпретацию волновой функции следует обобщить, заменив термин "плотность вероятности" более общим понятием **средней плотности** квантовых систем при проведении одного испытания. Понятно, что обычная вероятность является частным случаем средней плотности, когда число регистрируемых систем может принимать только два значения — 0 и 1. Обобщенные "вероятности" q (средние плотности), как и обычные вероятности, удовлетворяют условиям положительности и нормированности

$$q_i :=< \psi|\hat{Q}_i|\psi > \; \geq 0, \qquad \Sigma_i q_i = N,$$

где N — неотрицательное целое число систем, участвующих в одном испытании (измерении), $\hat{Q}_i$ – оператор проектирования, отвечающий i-му результату.

Процесс измерения среднего числа частиц, содержащихся в состоянии с отличной от единицы нормировкой,

$$|\beta >= \sqrt{< N >}|\alpha >, \qquad < \alpha|\alpha >= 1, \qquad \sqrt{< N >} \neq 1,$$

можно описать теперь следующим образом:

$$< n >=< \beta|\hat{a}^+\hat{a}|\beta >=< N >< \alpha|\hat{a}^+\hat{a}|\alpha >=$$
$$= \sum_N P_N N \sum_m < \alpha|\hat{a}^+\hat{a}|m >< m|\alpha >= \sum_N P_N \sum_m q_m m,$$

где $q_m = Np_m$ — среднее число m-частичных систем, обобщающее понятие вероятности регистрации m частиц,

$$p_m = | < m \mid \alpha > |^2 = e^{-|\alpha|^2}\frac{|\alpha|^m}{m!}$$

— распределение по числу частиц в состоянии $|\alpha >$.

В заключение укажем на одно физическое явление, которое можно описать с использованием уравнения Шредингера с гамильтонианом вида (9). В книге Вигнера [13] показано, что известные в настоящее время модели самовоспроизводящихся систем (включая общепризнанную модель репликации ДНК [14]) несовместимы с уравнениями квантовой динамики с унитарным оператором эволюции. Насколько нам известно, это противоречие не получило до настоящего времени сколь-нибудь удовлетворительного объяснения. Между тем, имеется естественная физическая идея, приводящая к моделям размножения, которые, выражаясь словами Вигнера, не зависят от "весьма редких", а потому не имеющих физического значения, преобразований координат. Разумную модель репродуцирования можно построить, если допустить, что отвечающий этим процессам оператор эволюции не является унитарным. Подчеркнем, что эта точка зрения вполне согласуется с современными подходами к описанию открытых (здесь — самоорганизующихся) систем [15]. Пусть характеристикой особи, передаваемой по наследству, является амплитуда α[10]. Внешние условия, описываемые током I, генерируют внутренние перемены особи ("мутации"), состоящие в изменении параметра α. Характеристики среды, отвечающие току J, описывают условия, необходимые для воспроизводства (или гибели). Если $I = 0$, то имеет место чистое самовоспроизводство. Тот факт, что ток J описывает именно размножение уже имеющихся особей, следует из соответствующего уравнения Шредингера

$$\frac{\partial \mid \psi_t >}{\partial t} = -\hat{a}J^* \mid \psi_t >= 0,$$

если $\mid \psi_t >$ — состояние, не содержащее ни одной особи (т.е. $\mid 0 >$). Можно ожидать, что модели ветвящихся процессов такого типа могут оказаться полезными в теории открытых квантовых систем, при описании процессов множественного рождения, адрон- и ядро-ядерных взаимодействий и др.

[10]Известно, что в квантовой механике любое свойство системы не существует *per se*, а "создается" в процессе измерения. Тем не менее, амплитуду α можно считать макроскопической характеристикой, присущей системе "самой по себе" в некотором пределе, являющемся аналогом термодинамического [16]. Вигнер, вслед за фон Нейманом [17], преодолевал проблемы такого рода предполагая, что сознание является одним из ключевых элементов физической реальности [13, 18].

Литература

1. *Exner P.* Open Quantum Systems and Feynman Integrals. Dordrecht: Reidel, 1985.

2. *Ву Т.Ю., Омура Т.* Квантовая теория рассеяния. М.: Наука, 1969. (*Wu T.Y., Ohmura T.* Quantum Theory of Scattering. Prentice - Hall, 1969.)

3. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.* Введение в теорию квантованных полей. М.: Наука, 1984.

4. *Campbell W.B. et al.* Phys. Rev., 1975, **D12**, 2363.

5. *Васильев А.Н., Кузьменко А.В.* Теор. мат. физ., 1977, **31**, 313; 1979, **41**, 12.

6. *Фейнман Р., Хиббс А.* Квантовая механика и интегралы по траекториям. М.: Мир, 1968. (*Feynman R.P., Hibbs A.R.* Quantum Mechanics and Path Integrals. New York, McGRAW, 1965.)

7. *Particle Data Group.* Phys. Rev., 1992, **D45**.

8. *Челлен Г.* Физика элементарных частиц. М.: Наука, 1966. (*Kallen G.* Elementary Particle Physics, Massachusetts, Palo Alto, London, Reading, 1964)

9. *Glauber R.J.* Phys. Rev., 1963, **130**, 2529; **131**, 2766.

10. *Helstrom C.W.* Quantum Detection and Estimation Theory. New York: Academic, 1976.

11. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1989.

12. *Ghirardi G.C., Rimini A., Weber T.* Phys. Rev., 1986, **D34**, 470; 1990, **A42**, 1057.

13. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М.: Мир, 1971. (*Wigner E.P.* Symmetries and Reflections. Bloomington - London, Indiana University, 1970.)

14. *Crick F.H.C., Watson J.D.* Nature, 1953, **171** 737; Proc. Roy. Soc. (London), 1854, **A223**, 80.

15. *Пригожин И.* От существующего к возникающему. М.: Наука, 1985. (*Prigogine I.* From Being to Becoming. San Francisco, Freeman, 1980.)

16. *Гриб А.А., Мамаев С.Г.,, Мостепаненко В.М.* Квантовые эффекты в сильных внешних полях. М.: Атомиздат, 1980.

17. *фон Нейман И.* Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1984. (*Neumann J.* Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik. Berlin, 1932.)

18. *Wigner E.P.* Am. J. Phys., 1963, **31**, 6.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 декабря 1997 года.