



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4-97-340

А.Г.Гальперин, В.М.Дубовик, В.С.Рихвицкий

НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ  
ЭВОЛЮЦИИ ТРЕХКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ  
С СОХРАНЕНИЕМ СУММАРНОГО ЧИСЛА  
ОБЪЕКТОВ

Направлено в журнал «Регулярная и хаотическая динамика»

1997

Нелинейная динамическая модель эволюции трехкомпонентной системы с сохранением суммарного числа объектов

Рассмотрена нелинейная математическая модель эволюции динамической трехкомпонентной системы с законом сохранения суммированного по всем компонентам числа объектов в системе. Взаимодействие компонентов квадратичное без самодействия, а также без отношений следования (равноправное). Перечисленные ограничения приводят к формулировкам модели в виде взаимосвязанных 3D- и 2D-систем ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений): типа Вольтерра с кососимметричной матрицей коэффициентов для 3D-систем и для 2D-систем типа Лотка-Вольтерра с (квази)кососимметричной матрицей.

Найдены первые интегралы, проведен качественный анализ решений: особых точек и интегральных кривых. В отсутствие решений в квадратурах численно исследована зависимость траекторий от времени и отношений коэффициентов. Показано, что от последних сильно зависит вид решений. Найдены решения двух типов: 1) аperiodические квазистационарные и 2) периодические стационарные.

Тем самым показано, что система неравновесна и устойчива. В ней возможны моды колебаний от близких к гармоническим до релаксационных. Данная модель может быть использована для описания различных нелинейных процессов в физике, физхимии, биологии, экологии, социологии и т.д. В частности, модель можно применять для прогноза результатов голосования при выборах двух кандидатов на должность.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий, Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова и Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Nonlinear Dynamical Model of Evolution of a Three-Component System with Conservation of a Summary Number of Objects

Nonlinear dynamical model of evolution of a three-component system with the law of conservation of a summary number of objects in the system has been considered. The interaction of components is a quadratic one without self-action and relations of the following (equal rights). Those restrictions result in wording of the model in terms of corresponded 3D and 2D systems of ODE's: Volterra's type for 3D systems with a skew-symmetric matrix of the system coefficients and to Lotka-Volterra's type for 2D systems with a (quasi)skew-symmetric matrix. First integrals of those systems were found and a qualitative analysis of solutions has been done: critical points and integral curves. In absence of quadrature formulas dependencies of trajectories on time and relations of coefficients were investigated numerically. It is shown that the solutions are very strongly dependent on the latest. Two types of the solution are found: 1) aperiodical quasistationary and 2) periodical stationary. By doing so, it is shown that the system is an unstable steady one. Modes of the oscillation of the system are possible from near harmonic ones to those of relaxation. The model can be used to describe various nonlinear processes in physics, physical chemistry, biology, ecology, sociology etc. In particular, the model can be used to prognosticate the results of the ballot in a process of the election between two candidates on a post.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics and at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

# 1. Модель

В нашей заметке [1] введена нелинейная динамическая модель эволюции трехкомпонентной (Рис.1) системы с отличительным свойством: сохранение полного числа объектов в системе при каждом данном значении эволюционной переменной (времени). Указанное ограничение позволяет привести 3D систему к 2D виду и обратно. Нами рассмотрен простейший вид нелинейности — квадратичная. Такая нелинейность характерна для моделей типа Лотка — Вольтерра [2, 3]. В настоящей работе мы проводим более подробный анализ математической модели [1], отличающейся от хорошо известных систем типа "хищник — жертва" отсутствием отношений следования для объектов, что приводит к специальным симметричным свойствам матриц коэффициентов систем нелинейных уравнений: (квази)кососимметричность для 2D систем (1) и (4) и кососимметричность для 3D системы (11).

Пусть в произвольный момент  $\tau$  времени  $t$  числа объектов (заселенности) подсистем  $a_i(t)$ ,  $i = 1, 2$  принимают значения  $a_1$  и  $a_2$  соответственно (обозначения те же, что и в [1]). Разностные уравнения, описывающие модель, имеют вид:

$$\begin{aligned}\Delta a_1(\tau) &= l_1(1 - (a_1 + a_2)/A)a_1 - k a_1 a_2 \\ \Delta a_2(\tau) &= l_2(1 - (a_1 + a_2)/A)a_2 + k a_1 a_2,\end{aligned}\quad (1)$$

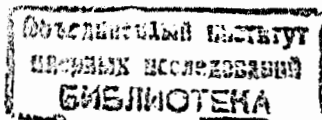
где  $l_i$ , ( $i = 1, 2$ ) и  $k$  — не зависящие от времени коэффициенты, и  $A$  — константа, позволяющая ввести переменную  $a_0$  такую, что

$$a_0 + a_1 + a_2 = A. \quad (2)$$

Из (1) следует, что при изменении значения времени на единицу происходит переход динамической системы из состояния  $a_i(\tau)$ ,  $i = 1, 2$  в состояние  $a_i(\tau + 1)$ ,  $i = 0, 1, 2$  так, что новые значения величин  $a'_i \equiv a_i(\tau + 1)$ ,  $i = 1, 2$  станут, соответственно, равны

$$\begin{aligned}a'_1 &= a_1 + \Delta a_1, \\ a'_2 &= a_2 + \Delta a_2.\end{aligned}\quad (3)$$

Здесь и далее, где это не приводит к путанице, мы не будем обозначать явно зависимости от переменной эволюции. Совокупность требований (1) ÷ (3) достаточна для полного описания модели. Перейдем к анализу.



## 2. Дифференциальные уравнения

В соответствие разностной системе (1) поставим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= a_1(l_1 a_0 - k a_2), \\ \dot{a}_2 &= a_2(l_2 a_0 + k a_1), \end{aligned} \quad (4)$$

с условиями  $l_1 \neq 0, l_2 \neq 0, k \neq 0$  и дополнительной связью

$$a_0 + a_1 + a_2 = A. \quad (5)$$

Последнее соотношение (5) может быть заменено дифференциальным уравнением

$$\dot{a}_0 = a_0(-l_1 a_1 - l_2 a_2). \quad (6)$$

На плоскости с ортогональными координатами  $a_1$  и  $a_2$  нас будут интересовать решения системы (4)-(6), соответствующие треугольной области  $A$

$$a_1 \geq 0, a_2 \geq 0, (A - a_1 - a_2 \geq 0). \quad (7)$$

## 3. Основные свойства решений

Аналитический вид уравнений свидетельствует о том, что вершины треугольника являются точками стояния и достижимы из любых других точек только за бесконечное время. В этом можно убедиться и с помощью численных решений. Из внутренних точек области  $A$  границы треугольника также недостижимы за конечное время, т.е. движение по границе возможно только, если ненулевые начальные условия заданы на границе. Уравнениям (4) и (6) с условием (7) соответствует треугольная область в ортогональном 3D пространстве переменных  $a_i, i = 0, 1, 2$ , отсекающая на осях отрезки длины  $A$  (симплекс).

При движении изображающей точки по границам  $a_1 = 0, a_2 = 0$  и  $a_0 = 0$  скорость определяется соответственно константами  $l_1, l_2$  и  $k$ . Граница треугольника сама является интегральной кривой. Поведение решения внутри области  $A$  зависит от его поведения на границе области. Обозначим стрелочками направление движения по каждой стороне треугольника. Тогда траектории решения из внутренней точки области всегда стремятся к той вершине, в которую направлены две стрелочки,

т.е. решение аperiodическое. Если же такой вершины нет и стрелочки образуют цикл, то внутри треугольника имеется точка стояния

$$\begin{aligned} a_1^* &= \frac{-l_2}{(k-l_2+l_1)} A, \\ a_2^* &= \frac{l_1}{(k-l_2+l_1)} A, \\ a_0^* &= \frac{k}{(k-l_2+l_1)} A \end{aligned} \quad (8)$$

изображающей точки, описывающей состояние системы, а траектории образуют замкнутые кривые вокруг этой точки, т.е. решения периодические.

Решения 3D системы удовлетворяют уравнениям

$$a_0 + a_1 + a_2 = A, \quad (9)$$

$$a_0^k a_1^{-l_2} a_2^{l_1} = C, \quad (10)$$

где  $A$  и  $C$  - константы (не зависящие от времени).

## 4. Доказательства

Инвариант (9) введен как изначальное требование (5), а инвариант (10) определяется линейностью по каждому  $a_i$  всех членов уравнений

$$\begin{aligned} \dot{a}_0(t) &= (-l_1 a_1 - l_2 a_2) a_0, \\ \dot{a}_1(t) &= (l_1 a_0 - k a_2) a_1, \\ \dot{a}_2(t) &= (l_2 a_0 + k a_1) a_2. \end{aligned} \quad (11)$$

3D системы. Три особые точки находятся в вершинах области:  $(a_0, a_1) = (0, 0)$ ;  $(a_1, a_2) = (0, 0)$ ;  $(a_0, a_2) = (0, 0)$ . Предположение, что только одно из  $a_i$ , скажем,  $a_0 = 0$  вместе с условиями равенства нулю производных, т.е. левых частей уравнений (11), приводит к противоречию (достаточно легко перебрать варианты).

Четвертая особая точка определяется решением системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 &= A, \\ l_1 a_0 - k a_2 &= 0, \\ l_2 a_0 + k a_1 &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Решение этой неоднородной системы единственно, т.к. равенство детерминанта нулю ведет к равенству нулю всех коэффициентов, что противоречит условиям (12).

Если интегральная кривая, совпадающая с границей области  $A$ , не является циклом, то четвертая особая точка находится вне треугольника, если же граница образует цикл - то внутри (видно сразу из формул (8)).

Если цикла на границе нет, то в любых двух вершинах находятся особые точки типа узел (устойчивый и неустойчивый), в третьей вершине - седло. Если же такой цикл есть, то все три особые точки - седла (легко видеть, продифференцировав правые части системы (4)).

Четвертая особая точка относится к типу центр. Для доказательства того, что фазовая траектория ее окружает, треугольник разбивается на 4 области, в каждой из которых одна из компонент вектора скоростей (4) сохраняет знак. Для доказательства замкнутости фазовых траекторий вокруг четвертой точки достаточно убедиться, что некоторая прямая пересекает траекторию не более чем в двух точках (берем инвариант (10) и прямую  $a_1 = a_1^*$  из (8)).

## 5. Заключение

Трехкомпонентная (3D) абстрактная нелинейная динамическая эволюционная система, описываемая цепочкой обыкновенных дифференциальных уравнений /ОДУ/ (11) типа Вольтерра с кососимметрической матрицей коэффициентов при условии связи (5) сводится к 2D-системе с (квази)кососимметричной матрицей типа Вольтерра - Лотка ОДУ (4). Обратно, по 2D-системе (4) с учетом (2) можно восстановить 3D-систему (11). Формально условия (2) и (5) совпадают, но следует понимать их смысловое различие. Условие (5) для ОДУ (4) играет роль уравнения связи для трех переменных, относительно которых записаны эти уравнения, и позволяет перейти к 3D-системе (11), составленной из уравнений (4) и (6), в то время как (2) дает возможность ввести новую (третью) переменную, используя две известные переменные и заданную константу, связанную с ними. Последнее обстоятельство используется при переходе от уравнений (1) к уравнениям (4).

Показано, что 2D-система (4) имеет единственную постоянную движения (2), т.е. не зависящий от времени "плоский инвариант", соответствующий "Закону сохранения числа объектов" в рассмотренной системе. 3D-система (11) имеет две постоянных движения: 1) аддитивный плоский инвариант (9) и 2) степенной инвариант (10), также не зависящие от времени.

Получив постоянные движения (первые интегралы) 2D- и 3D-систем (4) и (11), мы не можем получить их решений в квадратурах. Поэтому для подробного изучения траекторий  $\vec{a}(t)$  как функций времени  $t$  или интегральных кривых  $f(a_1, a_2) = 0$  в плоскости  $\mathcal{P}(a_1, a_2)$  требуется численный анализ.

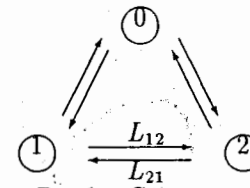


Рис.1. Схема эволюции заселенностей подсистем в трехкомпонентной системе; а) Конкурирующие подсистемы обозначены кружками с цифрами 0, 1 и 2; б) Стрелками указаны все направления обменов в системе.

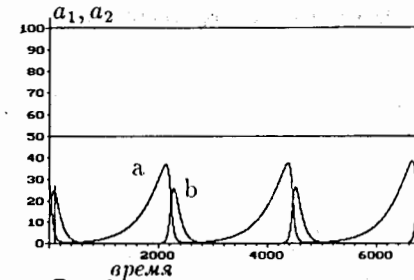


Рис.2а

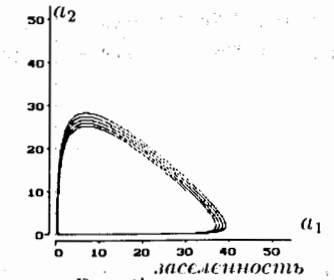


Рис.2б

Рис.2. Временные зависимости и фазовые портреты для случая релаксационных колебаний заселенностей подсистем  $a_1, a_2$  при параметрах модели  $l_1 = 0.0030, l_2 = -0.0105, k = 0.100009$ . Начальные условия:  $a_1 = 30, a_2 = 10, A = 100$  - сумма значений всех компонентов. По осям ординат на рисунках отложены значения заселенностей. Рис.2а. Заселенности подсистем  $a_1, a_2$  как функции времени. Кривая а - график для подсистемы  $a_1$ , кривая б - для  $a_2$ . Горизонтальная линия - график плоского инварианта  $A$  в процессе интегрирования (в произвольных единицах, для наглядности). Рис.2б. Интегральные кривые в плоскости  $a_1, a_2$ . Показана лишь часть области, где в силу начальных условий определена траектория. Штрихи в плоскости (их величина, наклон) демонстрируют поведение векторного поля  $(a_1, a_2)$ . Решение имеет периодический характер. "Диффузность" фазового портрета отображает качество интегрирования выпуклой кривой методом Эйлера (см. Рис.2а).

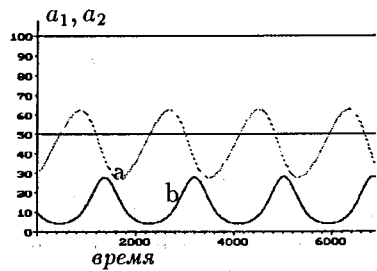


Рис.3а

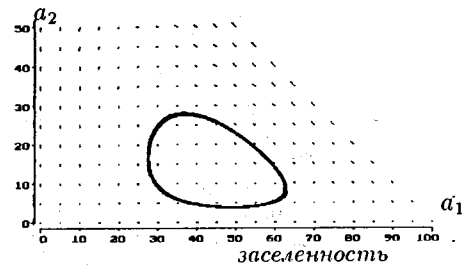


Рис.3б

Рис.3. Временные зависимости и фазовые портреты для случая квазигармонических колебаний заселенностей подсистем  $a_1, a_2$  при параметрах модели  $l_1 = 0.0030, l_2 = -0.0105, k = 0.01$ . Начальные условия  $a_1 = 30, a_2 = 10, A = 100$ . Обозначения те же, что на Рис.2, 2а, 2б. Рис.3а. Временные зависимости. Рис.3б. Фазовый портрет.

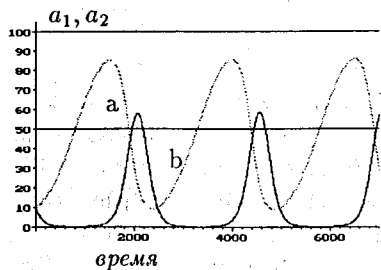


Рис.4а

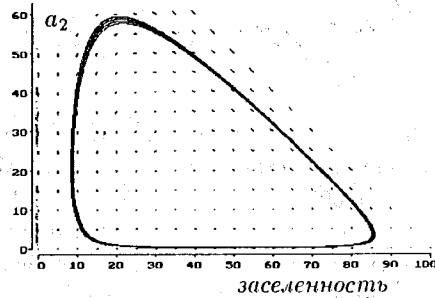


Рис.4б

Рис.4. Временные зависимости и фазовые портреты для случая квазирелаксационных колебаний заселенностей подсистем  $a_1, a_2$  при параметрах модели  $l_1 = 0.0030, l_2 = -0.0105, k = 0.01$ . Начальные условия:  $a_1 = 10, a_2 = 10, A = 100$ . Обозначения те же, что на Рис.2, 2а, 2б. Рис.4а. Временные зависимости. Рис.4б. Фазовый портрет.

В зависимости от значений коэффициентов  $l_1, l_2, k$  системы уравнений (4) и (11) имеют два типа решений — периодический и аperiodический. Для иллюстрации мы приводим примеры некоторых характерных режимов поведения заселенностей подсистем  $a_i$ -тых. Перечислим их. 1. Периодические стационарные колебания: релаксационные (Рис.2); близкие к гармоническим (Рис.3); почти релаксационные (Рис.4). 2. Аperiodические квазистационарные колебания (Рис.5). Подробный анализ численных решений систем (1) и (4) выходит за рамки настоящей работы и требует отдельного рассмотрения.

Здесь лишь отметим, что периодические решения не являются автоколебательными в смысле теории колебаний и предельные циклы в этом смысле отсутствуют. Единственная внутренняя особая точка в области  $A$  относится к типу "центр", причем в ее окрестности существуют замкнутые циклические траектории. Мы отмечаем этот факт, поскольку можно указать ([4]) пример векторного поля, которое не имеет замкнутых траекторий в ненулевой окрестности критической точки типа центр.

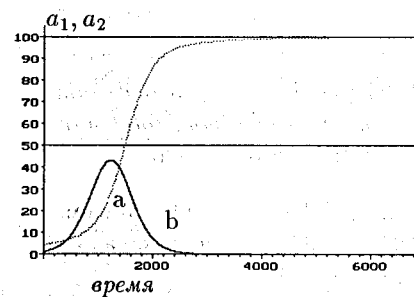


Рис.5а

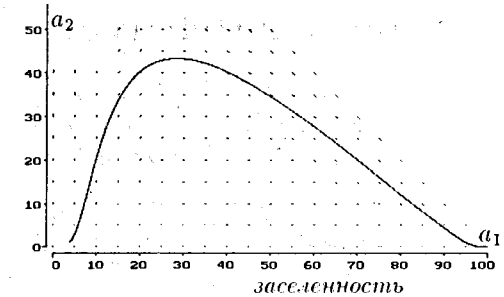


Рис.5б

Рис.5. Временные зависимости и фазовые портреты для случая аperiodических колебаний при параметрах модели  $l_1 = 0.0010, l_2 = -0.0050, k = -0.005$ . Начальные условия  $a_1 = 4.0, a_2 = 1.0, A = 100$ . Обозначения те же, что на Рис.2, 2а, 2б. Рис.5а. Временные зависимости. Рис.5 б. Фазовый портрет.

Амплитуды, частоты и форма колебаний (геометрия циклов в плоскости  $P$ ) определяются начальными условиями систем и отношениями коэффициентов в уравнениях неравновесных устойчивых систем (1), (4) и (11). Задача определения упомянутых зависимостей и фазовых соотношений компонентов очень сложная и требует для своего решения развития новых методов.

Подчеркнем, что рассмотренная модель отличается от обычно рассматриваемых в динамике популяций моделей систем "хищник - жертва"

типа Мальтуса – Ферхюльста [3], а также и от уравнений химических реакций в задаче химической кинетики наличием "закона сохранения числа объектов", выраженного уравнением связи и соответствующей кососимметричностью матрицы коэффициентов системы. <sup>1</sup>

## Благодарности

Авторам приятно поблагодарить профессоров Д. С. Чернавского (ФИРАН), М. А. Марценюка (Политех.ин-т, Пермь), В. И. Корогодина, Е. П. Жидкова, В. П. Герлта, В. Л. Любошица (ОИЯИ, Дубна) за полезные обсуждения, а также С.К. Слепнева (ОИЯИ) за стимулирующие замечания при подготовке работы к печати. Мы признательны коллегам из группы ГИБС ЛВЭ и Ю. Лукистину (А.Г.), сектора ПО ЛВТА и А. Сапожникову (В.Р.) за предоставление возможности выполнить это исследование.

## Список литературы

1. A. G. Galperin, V. M. Dubovik, V. S. Richvitsky. "Nonlinear dynamical model of evolution of a 3-component system conserving total number of objects", Int. Conf. CMCP96. p.69, JINR, Dubna, 1996.
2. Ю. Р. Романовский, Н. В. Степанова, Д.С. Чернавский. "Математическая биофизика", М., ГИФМЛ, 1984 (с.32); Chernavskaya N. M., Cernavski D. S., J.Theor.Biol., 1975, p. 13 - 20.
3. O. Verhulst. Nuov.Mem.Acad.Roy., Bruxelles, v.18, 1 (1845); v.20, 1 (1847).
4. В. С. Рихвицкий. "Пример автономной динамической системы с особенностью типа центр", Сообщение ОИЯИ P5-97-339, Дубна, 1997.

Рукопись поступила в издательский отдел  
6 ноября 1997 года.

---

<sup>1</sup>В качестве примера мы использовали нашу модель для прогнозирования распределения числа голосов избирателей в функции времени при выборах из двух кандидатов на должность для некоторой реальной избирательной кампании. На небольшом временном интервале (предвыборная кампания и собственно время выборов) число избирателей можно считать постоянным, т.е. выполняется "закон сохранения числа избирателей". При этом избиратели как бы составляли три команды: две команды лоббистов - "За одного (или другого) кандидата", и команду "Разномыслящие". Качественно результат прогноза совпал с реальностью, количественное расхождение не превысило 2.5% в сравнении с объявленным результатом голосования.