ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4-97-311

А. А. Сузько[1], Е. П. Величева[2]

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Направлено в журнал «Теоретическая и математическая физика»

[1]ИРФХП АН Республики Белоруссии
[2]Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

1997

Сузько А. А., Величева Е. П. P4-97-311
Точные решения нестационарного уравнения Шредингера

Разрабатывается процедура решения в явном аналитическом виде нестационарного уравнения Шредингера на основе точно решаемых стационарных задач. Продемонстрировано возникновение неадиабатической геометрической фазы при циклической эволюции квантовой системы.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1997

Перевод авторов

Suzko A. A., Velicheva E. P. P4-97-311
Exact Solutions of Nonstationary Schrödinger Equations

The procedure of solving nonstationary Schrödinger equations in exact form is elaborated on the base of exactly solvable stationary models. The exact solutions are employed to study the nonadiabatic geometric phase at cyclic evolution of quantum system.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1997

1 Введение

Предположим, что состояние $|\Psi(t)>$ системы эволюционирует в соответствии с уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{d|\Psi(t)>}{dt} = H(t)|\Psi(t)> . \qquad (1)$$

Решение этого уравнения можно представить с помощью оператора эволюции $U(t) = U(t,0)$

$$|\Psi(t)> = U(t)|\Psi(0)>, \qquad (2)$$

в терминах которого уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar\frac{dU(t)}{dt} = H(t)U(t).$$

Отсюда с очевидностью следует обычно используемое представление для оператора $U(t)$

$$U(t) = \tau \exp[(-i/\hbar)\int_0^t H(t')dt'].$$

Решение нестационарного уравнения (1) можно также представить с помощью общего унитарного преобразования $\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t) = \hat{\mathcal{S}}^{-1}(t)$

$$|\Psi(t)> = \hat{\mathcal{S}}(t)|\hat{\psi}(t)> . \qquad (3)$$

Из условий, что это преобразование унитарно и сохраняет вид уравнения (1), следуют соотношения связи между гамильтонианами и операторами эволюции

$$H(t) \to \hat{H}(t) = \hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)H(t)\hat{\mathcal{S}}(t) - i\hbar\hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)(d/dt)\hat{\mathcal{S}}(t) , \qquad (4)$$

$$U(t) \to \hat{U}(t) = \hat{\mathcal{S}}^\dagger(t)U(t)\hat{\mathcal{S}}(0). \qquad (5)$$

Легко видеть, что квантовые унитарные преобразования $\hat{\mathcal{S}}(t)$ действуют аналогично неабелевским калибровочным преобразованиям физики частиц. Чем же могут быть полезны эти квантовые калибровочные преобразования для решения уравнения (1)? Удобно ввести такое калибровочное преобразование $\hat{\mathcal{S}}(t) = \mathcal{S}(t)$, чтобы в полученном из (1) с его помощью уравнении

$$i\hbar\frac{d|\Phi(t)>}{dt} = \bar{H}|\Phi(t)> \qquad (6)$$

гамильтониан $\bar{H}(t)$, определяемый соотношением (4), не зависел от времени, т.е. $(d/dt)\bar{H} = 0$ (см., например, [1, 2]). Отсюда следует уравнение для преобразования $\mathcal{S}(t)$

$$\dot{\mathcal{S}}^\dagger H\mathcal{S} + \mathcal{S}^\dagger(\partial H/\partial t)\mathcal{S} + \mathcal{S}^\dagger H\dot{\mathcal{S}} - i\hbar\dot{\mathcal{S}}^\dagger\dot{\mathcal{S}} - i\hbar\mathcal{S}^\dagger\ddot{\mathcal{S}} = 0, \qquad (7)$$

где принято обозначение $\dot{\mathcal{S}} = (d/dt)\mathcal{S}$.

Решение уравнения (6) с независящим от времени гамильтонианом

$$\Phi(t) = \hat{U}(t,0)\Phi(0) \equiv \exp(-i\bar{H}t/\hbar)\Phi(0) \qquad (8)$$

может быть записано в виде

$$\Phi(t) = \exp(-i\mathcal{E}t/\hbar)\Phi(\mathcal{E}) \qquad (9)$$

и, по сути дела, сводится к решению стационарной задачи

$$\bar{H}|\Phi(\mathcal{E})> = \mathcal{E}|\Phi(\mathcal{E})> . \qquad (10)$$

То есть функции $\Phi(\mathcal{E}) = \Phi(t=0)$ являются собственными функциями $\bar{H}$ и в то же время функциями начального состояния для уравнения (6). Как легко видеть из (8), учет оператора эволюции $\hat{U}(t) = \exp(-\frac{i}{\hbar}\bar{H}t)$ для $\Phi(t)$ в (5) позволяет записать соотношение связи между оператором эволюции $U(t)$ и преобразованием $\mathcal{S}(t)$

$$U(t) = \mathcal{S}(t)\exp(-\frac{i}{\hbar}\bar{H}t)\mathcal{S}^\dagger(0). \qquad (11)$$

Используя преобразование $\mathcal{S}(t)$ в уравнении (4) при $t = 0$, легко установить связь между независящим от времени гамильтонианом $\bar{H}$ и гамильтонианом $H(t)$ в начальный момент времени $H_o \equiv H(0)$

$$\bar{H} = \mathcal{S}^\dagger(0)H_o\mathcal{S}(0) - i\hbar\mathcal{S}(t)^\dagger\dot{\mathcal{S}}(t). \qquad (12)$$

Учет же последнего соотношения в (4) дает связь между гамильтонианом в начальный и произвольный моменты времени

$$H(t) = \mathcal{S}(t)\mathcal{S}^\dagger(0)H_o\mathcal{S}(0)\mathcal{S}^\dagger(t). \qquad (13)$$

Итак, использование унитарных преобразований, ведущих к независящему от времени гамильтониану, сводит решение уравнения (1) к решению уравнения (10) относительно $\Phi(t)$ и решению уравнения (7) относительно $\mathcal{S}(t)$. Решение квантовых задач рассеяния традиционно связано с решением одноканальных или многоканальных систем уравнений (10), описывающих стационарные процессы. Однако решение уравнения (7) относительно $\mathcal{S}(t)$ при заданном $H(t)$ в общем случае – очень сложная задача, едва ли не более сложная, чем решение исходного уравнения (1).

Мы предлагаем поступить иначе: использовать в качестве исходных широкий класс независящих от времени гамильтонианов, для которых решения стационарного уравнения Шредингера (10) могут быть получены аналитически. Тогда при заранее заданных в определенном виде операторах $\mathcal{S}(t)$ можно найти соответствующие зависящие от времени гамильтонианы и решения нестационарного уравнения Шредингера (1) [3].

2 Гамильтонианы, допускающие точные решения нестационарного уравнения Шредингера

Рассмотрим задачу по восстановлению в явном виде изменяющегося со временем гамильтониана $H(t)$

$$H(t) \;=\; (\hat{p}_x^2 + q(x))\hat{I} + \mathbf{B}(t,x)\cdot\mathbf{j}, \tag{14}$$

используя независящие от времени гамильтонианы, допускающие аналитические решения стационарного уравнения (10). Здесь $q(x)$ – стационарный потенциал; $\mathbf{B}(t,x)$ – изменяющейся со временем потенциал, который часто можно трактовать как магнитное поле; $\mathbf{j} = (\hat{j}_1, \hat{j}_2, \hat{j}_3)$ – оператор спина и $\hat{j}_i = (2j+1)\times(2j+1)$ – соответствующие ему матричные компоненты; $\hat{p}_x = -i\hbar\nabla_x$ – оператор импульса; $\hat{I}$ – единичная матрица.

Рассмотрим в качестве модельной стационарной задачи двухканальное уравнение Шредингера с действительной и симметричной потенциальной матрицей $V(x), V_{12}(x) = V_{21}(x)$

$$\bar{H}(x)|\Phi(x)> = \mathcal{E}|\Phi(x)>, \;\; \bar{H}(x) = \hat{p}_x^2 + V(x). \tag{15}$$

Как хорошо известно, по спектральным характеристикам в обратной задаче рассеяния определяют потенциал и соответствующие ему решения. В качестве спектральных данных служат $\mathcal{S}(k)$–матрица рассеяния и характеристики связанных состояний $\{\mathcal{E}_\nu, \gamma_\nu^2\}$: значения их энергий и нормировок.

Гамильтониан (15) может быть представлен как сумма диагональной и бесследовой матриц

$$\begin{aligned}\bar{H}(x) \;&=\; \left(\hat{p}_x^2 + \frac{V_{11}(x)+V_{22}(x)}{2}\right)\hat{I} \\ &+ \begin{pmatrix} (V_{11}(x)-V_{22}(x))/2 & V_{12}(x) \\ V_{21}(x) & -(V_{11}(x)-V_{22}(x))/2 \end{pmatrix},\end{aligned} \tag{16}$$

что позволяет представить его в виде

$$\begin{aligned}\bar{H}(x) &= h(x)\hat{I} + \bar{\mathbf{B}}(x)\cdot\boldsymbol{\sigma} \\ &= h(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\Omega}(x)\begin{pmatrix} \cos\bar{\theta}(x) & \sin\bar{\theta}(x) \\ \sin\bar{\theta}(x) & -\cos\bar{\theta}(x) \end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $h(x) = \hat{p}_x^2 + (V_{11}(x)+V_{22}(x))/2$, $\boldsymbol{\sigma} = (\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \hat{\sigma}_3)$, $\hat{\sigma}_i$ – матрицы Паули,

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{B}}(x) \;&=\; \bar{\Omega}(x)(\sin\bar{\theta}(x), 0, \cos\bar{\theta}(x)), \\ \bar{\Omega}(x) \;&=\; 1/2\sqrt{(V_{11}(x)-V_{22}(x))^2 + 4V_{12}(x)^2}, \\ \sin\bar{\theta}(x) \;&=\; \frac{V_{12}(x)}{\bar{\Omega}(x)}, \;\cos\bar{\theta}(x) = \frac{V_{11}(x)-V_{22}(x)}{2\bar{\Omega}(x)}.\end{aligned} \tag{18}$$

Очевидно, гамильтониан двухканальной задачи соответствует трехмерной задаче с координатами, зависящими от параметра x, например, коллективные координаты $B_i(x)$, зависящие от внутренних координат x (в данном случае компонента $\bar{B}_2(x) = 0$). Такой гамильтониан может отвечать проблеме двухуровневого атома или движению спин-1/2 частицы в переменном магнитном поле $\bar{\mathbf{B}}(x)$.

Осуществим унитарное преобразование стационарного уравнения Шредингера, используя изменяющийся со временем оператор

$$\mathcal{S}(t) = \exp(-i\sigma_3\omega t), \tag{19}$$

который соответствует вращению на угол ωt вокруг оси z. В соответствии с уравнением (4) получим соотношение связи между независящим от времени гамильтонианом $\bar{H}(x)$ и гамильтонианом $H(t)$, изменяющимся со временем,

$$H(t) = \mathcal{S}(t)\bar{H}(x)\mathcal{S}^\dagger(t) + \omega\hat{\sigma}_3. \tag{20}$$

Гамильтониан $H(t)$ может быть переписан в виде

$$\begin{aligned}H(t) &= h(x)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \bar{\Omega}(x)\begin{pmatrix} \cos\bar{\theta}(x) + \omega/\bar{\Omega}(x) & \sin\bar{\theta}(x)\exp(2i\omega t) \\ \sin\bar{\theta}(x)\exp(-2i\omega t) & -(\cos\bar{\theta}(x) + \omega/\bar{\Omega}(x)) \end{pmatrix} \\ &= h(x)\hat{I} + \mathbf{B}(t,x)\cdot\boldsymbol{\sigma}.\end{aligned} \tag{21}$$

Очевидно, ему можно поставить в соответствие гамильтониан (14) с нестационарным полем

$$\mathbf{B}(t,x) = \Omega(x)(\sin\theta(x)\cos(\omega t), \sin\theta(x)\sin(\omega t), \cos\theta(x)), \tag{22}$$

компоненты которого определяются с помощью соотношений

$$\Omega(x) = \bar{\Omega}(x)\Big(1 + \frac{\omega^2}{\bar{\Omega}^2(x)} + 2\frac{\omega}{\bar{\Omega}(x)}\cos\bar{\theta}(x)\Big)^{1/2}, \tag{23}$$

$$\sin\theta(x) = \frac{\bar{\Omega}(x)\sin\bar{\theta}(x)}{\Omega(x)}, \ \cos\theta(x) = \frac{\bar{\Omega}(x)\cos\bar{\theta}(x)}{\Omega(x)} + \frac{\omega}{\Omega(x)}.$$

Легко видеть из (21) и (22), что в результате унитарного преобразования (19) возникла отличная от нуля составляющая вдоль y вектора $\mathbf{B}(t,x)$. Из соотношения (20) при $t = 0$ немедленно получаем выражение для начального гамильтониана

$$H_o(x) = \bar{H}(x) + \omega\hat{\sigma}_3,$$

которое удобно переписать в виде:

$$H_o(x) = (\hat{p}_x^2 + q(x))\hat{I} + \mathbf{B}_o(x)\cdot\boldsymbol{\sigma}, \tag{24}$$

где поле $\mathbf{B}_o$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{B}_o(x) \ = \ \Omega(x)(\sin\theta(x), 0, \cos\theta(x)). \tag{25}$$

Итак, построен гамильтониан $H(t)$

$$H(t) = \Big(\hat{p}_x^2 \ + \ \frac{V_{11}(x)+V_{22}(x)}{2}\Big)\hat{I} + \begin{pmatrix} \frac{V_{11}(x)-V_{22}(x)}{2}+\omega & V_{12}(x)\exp(2i\omega t) \\ V_{21}(x)\exp(-2i\omega t) & -(\frac{V_{11}(x)-V_{22}(x)}{2}+\omega) \end{pmatrix}, \tag{26}$$

который допускает представление в явном виде решений нестационарного уравнения Шредингера (1)

$$|\Psi(t,x)> = \exp(-i\hat{\sigma}_3\omega t)\exp(-i\bar{H}t/\hbar)|\Phi(x)> . \tag{27}$$

Действительно, собственные значения $\mathcal{E}$ стационарного уравнения Шредингера с гамильтонианом $\bar{H}$ известны, поскольку они являются исходными данными в обратной задаче. Используя процедуру алгебраических преобразований Баргмана или Дарбу, по спектральным характеристикам, в явном виде восстанавливают потенциал и решения $|\Phi>$.

Пусть $V(x)$ – баргмановская потенциальная матрица, позволяющая находить в явном аналитическом виде решения системы уравнений (15). В качестве примера приведем явный вид для матричных элементов безотражательного потенциала и соответствующих ему решений Йоста [4]:

$$V_{ij}(x) = 2\frac{d}{dx}\sum_{\nu\lambda}\exp(-\kappa_i^\nu x)\gamma_i^\nu P_{\nu\lambda}^{-1}(x)\gamma_j^\lambda\exp(-\kappa_j^\lambda x), \tag{28}$$

$$\begin{aligned} F_{jj'}^{\pm}(k,x) \ &= \ \exp(\pm ik_jx)\delta_{jj'} \\ &- \ \sum_{\nu\lambda}\gamma_j^\nu\exp(-\kappa_j^\nu x)P_{\nu\lambda}^{-1}(x)\int_x^\infty\gamma_{j'}^\lambda\exp(-(\kappa_{j'}^\lambda \pm ik_{j'})x')dx', \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$P_{\nu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} + \sum_{j'}^m\frac{\gamma_{j'}^\nu\gamma_{j'}^\lambda}{\kappa_{j'}^\nu + \kappa_{j'}^\lambda}\exp(-(\kappa_{j'}^\nu + \kappa_{j'}^\lambda)x).$$

Нормированное решение для векторной функции связанного состояния немедленно выражается через матрицу решений Йоста (29), взятую при энергии связанного состояния $k^2 = -\mathcal{E}_\nu$

$$\Phi_i(\mathcal{E}_\nu, x) >= \sum_j^m F_{ij}(\mathcal{E}_\nu, x)\gamma_j^\nu, \quad i,j = 1,2.$$

Здесь индексы ν и λ отвечают связанным состояниям, характеризующимся энергиями $\mathcal{E}_\nu$ и нормировочными матрицами $|\gamma_i^\nu><\gamma_j^\nu|$, в то время как для обозначения каналовых индексов использованы индексы i,j. Следует отметить, класс точно решаемых многоканальных задач далеко не ограничивается приведенным примером. Использование техники вырожденных ядер при решении интегральных уравнений обратной задачи рассеяния как на всей оси, так и на полуоси или радиальной задачи в подходах Гельфанда–Левитана и Марченко дает многочисленные примеры точно решаемых стационарных задач, которые могут быть использованы для исследования нестационарных задач.

3 Неадиабатические геометрические фазы

Осуществим процедуру унитарных преобразований $\bar{\mathcal{S}}(x)$ и $\mathcal{S}(x)$, аннигилирующих $\bar{B}_1(x)$– и $B_1(x)$–составляющие полей $\bar{\mathbf{B}}(x)$ и $\mathbf{B}_o(x)$. Это реализуется с помощью $SU(2)$–операторов

$$\bar{\mathcal{S}}(x) = \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) \ \text{ и } \ \mathrm{S}(x) = \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2), \tag{30}$$

соответственно, $\mathbf{j} = (1/2)\boldsymbol{\sigma}$. Поскольку справедливы следующие соотношения:

$$\bar{\mathbf{B}}(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \bar{\Omega}(x) \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)\hat{\sigma}_3 \exp(i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2), \tag{31}$$

$$\mathbf{B}_o(x) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \Omega(x) \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2)\hat{\sigma}_3 exp(i\theta(x)\hat{j}_2), \tag{32}$$

то в результате действия преобразований $\bar{\mathcal{S}}(x)$ и $\mathcal{S}(x)$ системы уравнений для гамильтонианов (15) и (24) сводятся к уравнениям калибровочного вида [5]

$$[-(\nabla_x \hat{I} + \bar{A}(x))^2 + q(x)\hat{I} + \bar{\Omega}(x) \cdot \hat{\sigma}_3 - P^2]\Phi'(x) = 0, \tag{33}$$

$$[-(\nabla_x \hat{I} + A(x))^2 + q(x)\hat{I} + \Omega(x) \cdot \hat{\sigma}_3 - P^2]\Psi'_o(x) = 0, \quad P = diag(p_n) \tag{34}$$

для новых функций

$$\Phi'(x) = \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)\Phi(x), \quad \Psi'_o(x) = \exp(-i\theta(x)\hat{j}_2)\Psi_o(x). \tag{35}$$

Связь между каналами в уравнениях (33), (34), осуществляется матричными элементами операторов $\bar{A}(x)$ и $A(x)$, которые действуют как эффективные векторные потенциалы и генерируются процедурой калибровочного преобразования (30)

$$\begin{aligned} \bar{A}_{ij}(x) &= \exp(i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)(d/dx)\exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2), \\ A_{ij}(x) &= \exp(i\theta(x)\hat{j}_2)(d/dx)\exp(-i\theta(x)\hat{j}_2), \quad i,j = 1,2. \end{aligned} \tag{36}$$

Отметим, что элементы оператора $\bar{\mathcal{S}}(x)$

$$\bar{\mathcal{S}}(x) = \exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2) = \begin{pmatrix} \cos\bar{\theta}(x)/2 & \sin\bar{\theta}(x)/2 \\ -\sin\bar{\theta}(x)/2 & \cos\bar{\theta}(x)/2 \end{pmatrix}$$

определяются элементами известной потенциальной матрицы $V_{ij}(x)$ по формулам (18). Учитывая оператор преобразования S(t) (19) в операторе эволюции (11)

$$U(t) = \exp(-i\hat{\sigma}_3\omega t)\exp(-i\bar{H}t/\hbar)$$

представим решение (27) уравнения (1) с гамильтонианом (21) в виде

$$|\Psi_\nu(t)> = \exp(\mp i\omega t)\exp(-i\mathcal{E}_\nu t/\hbar)|\Psi_\nu(0)>,$$

Собственные значения и собственные функции оператора $\bar{H}(x)$ – это $\mathcal{E}_\nu$ и $|\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)>$, где индекс канала $\alpha = 1,2$ принимает два значения в соответствии с постановкой задачи. Через период $T = \pi/\omega$ имеем

$$|\Psi_\alpha(T,\mathcal{E}_\nu)> = \exp(\mp i\pi)\exp(-i\mathcal{E}_\nu T/\hbar)|\Psi_\alpha(0,\mathcal{E}_\nu)>. \tag{37}$$

Тогда полная фаза –

$$\delta_\nu = (\pm\pi + \mathcal{E}_\nu T/\hbar). \tag{38}$$

Чтобы вычислить динамическую фазу, вычислим среднее значение $H(t)$, используя соотношения (20) и (27)

$$< \Psi_\alpha(t,\mathcal{E}_\nu)|H(t)|\Psi_\alpha(t,\mathcal{E}_\nu)> = <\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)\mathcal{S}^\dagger(t)|H(t)|\mathcal{S}(t)\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)>$$

$$= <\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)|\bar{H}(x)|\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)> + <\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)|\omega\hat{\sigma}_3|\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)> = \mathcal{E}_\nu + \omega\bar{\hat{\sigma}}_3^\nu.$$

С использованием выражения (35) для собственных функций $\bar{H}(x)$ среднее значение проекции спина перепишется

$$\bar{\hat{\sigma}}_3^\nu = <\Psi_\alpha(t,\mathcal{E}_\nu)|\hat{\sigma}_3|\Psi_\alpha(t,\mathcal{E}_\nu)> = <\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)|\hat{\sigma}_3|\Phi_\alpha(\mathcal{E}_\nu)> \tag{39}$$

$$= <\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)|\exp(i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)\hat{\sigma}_3\exp(-i\bar{\theta}(x)\hat{j}_2)|\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)>$$

$$= <\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)| - \sin(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_1 + \cos(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_3|\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)>. \tag{40}$$

Тогда для динамической фазы δ_ν^d получим выражение

$$\delta_\nu^d = \int_0^T <\Psi_\alpha(t)|H(t)|\Psi_\alpha(t)>_\nu dt$$

$$= \mathcal{E}_\nu T/\hbar + \pi <\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)| - \sin(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_1 + \cos(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_3|\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)> \tag{41}$$

Учитывая (38) и (41), неадиабатическая геометрическая фаза δ_ν^g в нашем случае должна определяться из соотношения

$$\begin{aligned} \delta_\nu^g = (\delta_\nu - \delta_\nu^d) &= \pi <\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)|\sin(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_1 + [1 - \cos(\bar{\theta}(x))\hat{\sigma}_3]|\Phi'_\alpha(\mathcal{E}_\nu)> \\ &= \pm\pi(1 + \bar{\hat{\sigma}}_3^\nu). \end{aligned} \tag{42}$$

По сути дела геометрическая фаза определяется средним значением проекции спина, полученном из (39). Это соответствует неадиабатической геометрической фазе Агаронова–Анандана [6]

$$\delta^g = <\Psi(t)|(d/dt)\Psi(t)> = <\Phi_\alpha(x)|\mathcal{S}^\dagger(t)\cdot\mathcal{S}(t)|\Phi_\alpha(x)> = \omega\bar{\hat{\sigma}}_3. \tag{43}$$

Совершенно очевидно, при отсутствии зависимости от x задача упрощается и переходит в задачу для спин-1/2 частицы в изменяющемся со временем, но однородном в пространстве магнитном поле [1]. В адиабатическом пределе, когда $\omega/\Omega \to 0, \Omega \to \bar{\Omega}, \cos\theta \to \cos\bar{\theta}$ и геометрическая фаза (42) становится фазой Берри [7] $\delta_g = \pi(1 - \cos\theta)$.

Итак, мы детально рассмотрели двухканальную точно решаемую нестационарную задачу, используя достаточно простой оператор канонического калибровочного преобразования $\mathcal{S}(t)$. Вполне очевидно, как предлагаемый подход обобщается на случаи других выборов операторов $\mathcal{S}(t)$ и классов стационарных точно решаемых задач.

4 Заключение

Предложена процедура конструирования зависящих от времени гамильтонианов, допускающих точные решения нестационарного уравнения Шредингера. Подход основан на точно решаемых моделях стационарного уравнения Шредингера и на специальном выборе операторов $S(t)$ канонического калибровочного преобразования. Детально рассмотрена двухканальная задача, для которой приведено выражение для фазы Берри.

Авторы признательны докторам ф.-м. наук А. Жеданову и Б. Самсонову за проявленный интерес к работе.

Литература

[1] Shun-Jin Wang, Phys. Rev.A **42**, 5107 (1990).

[2] Lian-Ao Wu, J. Sun, Ji-Yu Zhong, Phys. Lett.A **183**, 257 (1993).

[3] Сузько А.А., Величева Е.П., Proc.Int.Conf. on Symmetry Methods in Physics, Dubna, July 1997.

[4] Zakhariev B.N. and Suzko A.A., Direct and inverse problems. (Potentials in quantum scattering) (Springer-Verlag. Berlin Heidelberg/New York, 1990, 223p. 2-nd ed.)

[5] Сузько А.А., Величева Е.П., ЭЧАЯ **27**, 924 (1996).

[6] Aharonov Y., Anandan J. Phys. Rev. Lett. **58**, 1593 (1987).

[7] Berry M., Proc.R.Soc.Lond. 1984. **A 392**. P.45.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 октября 1997 года.