

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96-88

P4-96-88

М.Х.Ханхасаев, Ж.Б.Курманов*

УНИТАРНЫЙ ПОДХОД
К ОПИСАНИЮ РАССЕЯНИЯ ПИОНОВ НА ЯДРАХ
СО СПИНОМ И ИЗСПИНОМ, РАВНЫМИ 1/2

Направлено в журнал «Ядерная физика»

*Постоянный адрес: Республика Казахстан, 480082, г.Алма-Ата,
Институт ядерной физики НЯЦ

1996

1 Введение

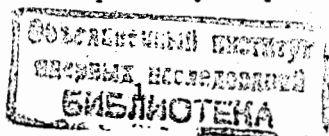
Интерес к изучению взаимодействия низкоэнергетических пионов с ядрами связан со следующим фактом. Пионы низкой энергии ($T_{\pi} \leq 70 - 80$ МэВ) отличаются по характеру взаимодействия от резонансных пионов, рассеяние которых осуществляется преимущественно поверхностью ядра. Благодаря большей длине волны, а также из-за недостаточной энергии налетающего пиона для возбуждения ядра пионы низкой энергии обладают хорошей проникающей способностью в ядерной среде. Прозрачность ядерного вещества для пионов низкой энергии позволяет использовать их в качестве очень эффективного инструмента при изучении структуры ядер.

В ходе развития теории пион-ядерного взаимодействия было предложено большое количество различных теоретических подходов [1]. Основные успехи в описании данных по пион-ядерному рассеянию связаны с использованием многочастичного оптического пион-ядерного потенциала, построенного приближенно в терминах двухчастичных амплитуд пион-нуклонного рассеяния (см. подробнее [2] - [4]).

Однако, несмотря на достижения, полученные в рамках метода оптического потенциала, указанный подход содержит ряд проблем, одной из которых является неоднозначность в оценке роли канала поглощения пионов.

В этой связи оказывается эффективным построение подхода, изначально согласованного с требованием унитарности теории. К их числу относится подход, основанный на использовании нетрадиционной формулировки квантовой теории рассеяния, предложенной Д. А. Киржницем [5, 6]. Данный метод рассмотрения эволюции системы по константе взаимодействия нашел применение в самых разных задачах квантовой теории поля и физики ядра (см., например, [7] - [9]).

Развитие данного метода применительно к задаче пион-ядерного взаимодействия [10] - [16] привело к построению унитарной теории многократного



рассеяния, позволяющей проводить расчет непосредственно пион-ядерных фаз рассеяния. При этом построенный итерационный ряд для матрицы рассеяния сохраняет ее унитарность и причинность на каждом шаге итерации и, благодаря быстрой сходимости ряда, позволяет ограничиться в расчетах низшими итерациями. Исследование сходимости ряда была проведено при вычислении поправок второго порядка [11, 16]. Согласие предложенного подхода с требованием унитарности теории обеспечивает корректное отделение эффектов чисто потенциального рассеяния от непотенциальных, таких как истинное поглощение пионов ядрами и правильное пороговое поведение потенциала взаимодействия в пределе низких энергий.

Построенная унитарная теория была успешно применена для совместного анализа и описания пион-атомных данных и данных по упругому рассеянию пионов низких энергий на легких ядрах с нулевыми значениями спина и изоспина ${}^4\text{He}$, ${}^{12}\text{C}$ и ${}^{16}\text{O}$ [16]. В настоящей статье проведено обобщение формализма унитарного подхода на случай взаимодействия пионов с ядрами со значениями спина и изоспина, равными $1/2$. Некоторые предварительные результаты расчетов изложены в работе [17].

Статья построена следующим образом. В разделе 2 приведены основные уравнения унитарного подхода с изложением первого порядка теории. В разделе 3 представлена схема расчета фаз пион-ядерного рассеяния и полученные выражения. Выводы и заключение приведены в разделе 4.

2 Унитарный подход

Подробное изложение унитарной теории пион-ядерного рассеяния приведено в [16]. Воспользуемся этим и ограничимся здесь лишь кратким изложением общего формализма теории.

2.1 Основные уравнения

В унитарном подходе, основанном на использовании эволюционного по константе связи метода Киржница, потенциальное пион-ядерное взаимодействие описывается гамильтонианом

$$\mathcal{H} = K_\pi + H_A + \lambda V, \quad V = \sum_{i=1}^A v_i, \quad (1)$$

где H_A – гамильтониан ядра, K_π – оператор кинетической энергии пиона, v_i – потенциал взаимодействия пиона с i -ым нуклоном ядра, а λ играет роль константы πN -взаимодействия. Предположим известным решение чисто ядерной многочастичной задачи с канальным гамильтонианом h

$$h = K_\pi + H_A \quad (2)$$

и рассмотрим эволюцию пион-ядерной системы с изменением λ от нуля до реального значения $\lambda = 1$. Параметр λ здесь вводится формально и в конце вычислений полагается равным единице.

Центральную роль в данном подходе играют матричные элементы (МЭ) $V_{\mu\nu} = \langle \psi_\mu | V | \psi_\nu \rangle$ потенциала взаимодействия V , взятого в обкладках собственных функций ψ_μ , ψ_ν и т.п. гамильтониана (1). Наблюдаемые величины, такие как фазы рассеяния и энергии связанных состояний, выражаются через эти матричные элементы.

Введем эрмитов оператор $V(\lambda)$, определяемый следующим образом:

$$V_{\mu\nu} = \langle \psi_\mu | V | \psi_\nu \rangle \equiv \langle \phi_\mu | V(\lambda) | \phi_\nu \rangle, \quad (3)$$

где ϕ_μ , ϕ_ν – собственные функции гамильтониана (2). На пространстве этих асимптотических, не зависящих от λ состояний можно построить следующее эволюционное операторное уравнение для S -матрицы рассеяния

$$\frac{d}{d\lambda} S(E, \lambda) = -2\pi i S(E, \lambda) \delta(E - h) V(\lambda) \quad (4)$$

с граничным условием $S(E, \lambda = 0) = 1$. Соответственно для T -матрицы, определенной на энергетической поверхности соотношением

$$S = I - 2\pi i \delta(E - h)T,$$

получим уравнение

$$\frac{d}{d\lambda} T(E, \lambda) = V(\lambda) - 2\pi i T(E, \lambda) \delta(E - h) V(\lambda) \quad (5)$$

с граничным условием $T(E, \lambda = 0) = 0$.

Эволюционное уравнение для оператора $V(\lambda)$ имеет вид

$$\frac{d}{d\lambda} V(\lambda) = \sum_{\sigma} [\hat{P}_{\sigma} V(\lambda) G^{(-)}(E_{\sigma}) V(\lambda) + h.c.] \quad (6)$$

с очевидным граничным условием $V(\lambda = 0) = V$. Здесь $G^{(\pm)}$ – функция Грина канального гамильтониана h

$$G^{(\pm)}(E) = (E - h \pm i\delta)^{-1} \quad (7)$$

и $\hat{P}_{\sigma} \equiv |\phi_{\sigma}\rangle\langle\phi_{\sigma}|$ – оператор проецирования на данное состояние гамильтониана (2). Таким образом, \hat{P}_{σ} в (6) фиксирует пространство векторов состояний, из которых начинается эволюция системы. Приведенные уравнения (4) – (6) являются основными уравнениями излагаемого подхода, обеспечивающими полное описание пион-ядерного рассеяния (как упругого, так и неупругого).

Стандартной процедурой выделения упругого канала реакции является введение в основные уравнения эволюционного метода операторов проецирования на основное $\hat{P} = |0\rangle\langle 0|$ и возбужденные $\hat{Q} = 1 - \hat{P}$ состояния ядра. Можно показать, что подматрица $T_0 \equiv \hat{P}T\hat{P}$, описывающая упругое рассеяние, удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\lambda} T_0(E, \lambda) = U_0(E, \lambda) - 2\pi i T_0(E, \lambda) \hat{P} \delta(E - h) U_0(E, \lambda). \quad (8)$$

Эффективный, зависящий от энергии оператор $U_0(E, \lambda)$ определяется системой уравнений:

$$U_0(E, \lambda) = V(\lambda) - 2\pi i K(E, \lambda) \hat{Q} \delta(E - h) V(\lambda), \quad (9)$$

$$\frac{d}{d\lambda} K(E, \lambda) = U_0(E, \lambda) + 2\pi i U_0(E, \lambda) \hat{P} \delta(E - h) K(E, \lambda) \quad (10)$$

с граничным условием для вспомогательного оператора K : $K(E, \lambda = 0) = 0$. С помощью оператора $U_0(E, \lambda)$ сложная многочастичная задача рассеяния свелась эффективно к двухчастичной.

Оператор $U_0(E, \lambda)$ выражается через $V(\lambda)$ посредством системы связанных уравнений (9) – (10), допускающей итерационное решение по степеням $V(\lambda)$. Первые два члена этого разложения имеют вид:

$$U_0(E, \lambda) = V(\lambda) - 2\pi i \int_0^{\lambda} d\lambda_1 V(\lambda_1) \hat{Q} \delta(E - h) V(\lambda). \quad (11)$$

Неэрмитова часть оператора $U_0(E, \lambda)$ соответствует вкладу неупругих каналов в процесс рассеяния (наличие оператора \hat{Q} в уравнениях). В пределе низких энергий, когда энергия пиона меньше энергии первого возбужденного состояния ядра, второй член в (11) исчезает. В этом случае оператор $U_0(E, \lambda)$ становится эрмитовым и требование унитарности для матрицы рассеяния выполняется точно.

При частичном разложении величин, входящих в уравнение (8), можно получить следующую формулу для фаз пион-ядерного рассеяния

$$\delta_{\alpha}(k) = -\pi \varepsilon_{\pi A}(k) \int_0^1 d\lambda \{ (\vec{k}'; 0 | U_0(E, \lambda) | \vec{k}; 0 \}_{\alpha}, \quad (12)$$

где $\varepsilon_{\pi A} = k^2 / [2\pi^2 dE(k)/dk]$ – плотность уровней состояний рассеяния, $E(k)$ и \vec{k} (\vec{k}') – полная энергия пион-ядерной системы и импульс пиона до (после) рассеяния в с.ц.м. пион-ядро, $\alpha = (L, J, I)$ – индекс для обозначения парциаль-

ного канала реакции, L, J, I – орбитальный момент, полный момент и изоспин пион-ядерной системы, соответственно.

В результате проблема нахождения пион-ядерных фаз рассеяния сводится к вычислению матричного элемента $\langle \vec{k}'; 0 | U_0(E, \lambda) | \vec{k}; 0 \rangle$ оператора $U_0(E, \lambda)$, который в предложенном подходе играет роль оптического потенциала.

2.2 Первый порядок теории

Самым простым методом решения системы уравнений (8) – (10) является разложение $U_0(E, \lambda)$ в ряд по степеням многочастичного эрмитова оператора $V(\lambda)$. Уравнение (6) для $V(\lambda)$ также может быть решено итерационным методом путем разложения в ряд многократного рассеяния по степеням двухчастичной $u_i(\lambda)$ -матрицы, отвечающей взаимодействию пиона с i -ым нуклоном ядра. Полученные таким образом явные выражения для пион-ядерных фаз рассеяния вплоть до второго порядка приведены в работе [16].

В первом порядке разложения пион-ядерные фазы рассеяния имеют вид

$$\delta_\alpha^{(1)}(k) = -\pi \varepsilon_{\pi A}(k) \int_0^1 d\lambda \left\{ \langle \vec{k}'; 0 | V^{(1)}(\lambda) | \vec{k}; 0 \rangle_\alpha \right\}, \quad V^{(1)}(\lambda) = \sum_{i=1}^A u_i(\lambda). \quad (13)$$

Поскольку МЭ в (12) и (13) аналогичны по структуре соответствующим МЭ от оптических потенциалов, используемых в теории рассеяния, можно воспользоваться рядом приближений, обычно применяемых в рамках оптической модели (см., например, [4], [18] – [21]). Используя известное в оптической модели приближение факторизации [19], для $\delta^{(1)}(k)$ можно получить следующее выражение [11]

$$\delta^{(1)}(k) = -\pi \varepsilon_{\pi A}(k) A \rho(\vec{Q}) \int_0^1 d\lambda \bar{u}(\vec{k}', \vec{k}; \lambda), \quad (14)$$

где $\rho(\vec{Q})$ – формфактор ядра, $\vec{Q} = \vec{k}' - \vec{k}$ – переданный импульс в пион-ядерном столкновении и $\bar{u}(\vec{k}', \vec{k}; \lambda)$ – усредненная по одночастичной плотности парная

u -матрица πN -рассеяния. Здесь мы опустили индекс α , отвечающий определенному частичному каналу реакции.

Целью данных расчетов является получение выражения для пион-ядерных фаз рассеяния через пион-нуклонные фазы. Для этого выразим парные u -матрицы, входящие в (14) и определенные в с.ц.м. пион-ядро, через парные \bar{u} -матрицы, определенные в с.ц.м. пион-нуклон:

$$\langle \vec{k}', \vec{p}' | u(\lambda) | \vec{k}, \vec{p} \rangle = \gamma \langle \vec{\kappa}' | \bar{u}(\lambda) | \vec{\kappa} \rangle, \quad (15)$$

используя кинематический фактор γ , введенный в [18, 20]:

$$\gamma = [\omega_\pi(\kappa) \omega_\pi(\kappa') \omega_N(\kappa) \omega_N(\kappa') / E_\pi(k) E_\pi(k') E_N(p) E_N(p')]^{1/2},$$

где $\vec{\kappa}$ ($\vec{\kappa}'$) и \vec{p} (\vec{p}') – импульсы пиона и нуклона до (после) рассеяния в с.ц.м. пион-нуклон и пион-ядро, соответственно.

Внеэнергетическое поведение парных u -матриц в (14) можно учесть в модели сепарабельного πN -взаимодействия:

$$u(\kappa, \kappa'; \lambda) = u(\kappa, \kappa; \lambda) g(\kappa') / g(\kappa), \quad (16)$$

где $g(\kappa)$, $g(\kappa')$ – формфакторы сепарабельного πN -потенциала, определяемые подгонкой по данным фазового анализа πN -рассеяния.

Проведем разложение парных u -матричных элементов по частичным волнам. В результате на энергетической поверхности $\kappa = \kappa'$ частичный матричный элемент $u_{\alpha'}(\kappa, \kappa; \lambda)$ определит соответствующую фазу πN -рассеяния:

$$\delta_{\alpha'}(\kappa) = -\pi \varepsilon_{\pi N}(\kappa) \int_0^1 d\lambda \bar{u}_{\alpha'}(\kappa, \kappa; \lambda), \quad (17)$$

где $\varepsilon_{\pi N}(\kappa) = \kappa^2 / [2\pi^2 dE_{\pi N}(\kappa) / d\kappa]$ – плотность уровней состояний πN -рассеяния, $E_{\pi N}(\kappa) = \omega_\pi(\kappa) + \omega_N(\kappa)$ – полная энергия πN -системы в ее с.ц.м., $\alpha' = (l, j, i)$ – индекс, обозначающий пион-нуклонный частичный канал.

Таким образом, выражения (14) – (17) позволяют выразить пион-ядерные фазы рассеяния в первом порядке теории через пион-нуклонные фазы рассеяния и формфактор ядра.

3 Схема теоретических расчетов

3.1 Расчет ядерных фаз рассеяния

Применим унитарный подход для рассмотрения рассеяния пионов на ядрах со значениями спина и изоспина, равными $1/2$. В этом случае спин-изоспиновая структура МЭ (14) имеет следующий вид

$$\langle f_{\pi A} | \sum_{i=1}^A u_i(\lambda) | i_{\pi A} \rangle = A \sum_{\beta=0}^3 \rho^\beta(\vec{Q}) \bar{u}_\beta(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) \gamma, \quad (18)$$

где $|i_{\pi A}\rangle, |f_{\pi A}\rangle$ – состояния пион-ядерной системы до и после взаимодействия. Предположим, что оператор $\hat{u}(\lambda)$ факторизуется на две части $\hat{u}_\beta(\lambda)$ и \hat{O}^β ($\beta=0,1,2,3$), где $\hat{u}_\beta(\lambda)$ – оператор в пространстве импульсов πN -системы, $\hat{O}^\beta = \{\hat{1}, (\vec{t} \cdot \vec{\tau}), i(\vec{\sigma} \cdot \vec{m}), (\vec{t} \cdot \vec{\tau})i(\vec{\sigma} \cdot \vec{m})\}$ – оператор в спин-изоспиновом пространстве состояний πN -системы. Здесь \vec{t} и $\vec{\tau}/2$ – операторы изоспина пиона и нуклона, $\vec{m} = [\vec{\kappa} \times \vec{\kappa}'] / |[\vec{\kappa} \times \vec{\kappa}']|$. Тогда

$$\hat{u}(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) = \sum_{\beta=0}^3 \hat{u}_\beta(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) \hat{O}^\beta. \quad (19)$$

С другой стороны, оператор $\hat{U}_0(\lambda)$ в спин-изоспиновом пространстве состояний пион-ядерной системы в рассматриваемом случае имеет вид

$$\langle f_{\pi A} | \hat{U}(\lambda) | i_{\pi A} \rangle = \langle \frac{1}{2} M'_s | U^c(\vec{k}, \vec{k}'; \lambda) \hat{1} + U^s(\vec{k}, \vec{k}'; \lambda) i(\vec{\sigma} \cdot \vec{n}) | \frac{1}{2} M_s \rangle, \quad (20)$$

где U^c и U^s – центральная и спин-зависящая часть МЭ потенциала пион-ядерного взаимодействия, M_s и M'_s – проекции спина ядра до и после рассеяния, $\vec{n} = [\vec{k} \times \vec{k}'] / |[\vec{k} \times \vec{k}']|$. Можно показать, что

$$\begin{aligned} U^c(\vec{k}, \vec{k}'; \lambda) &= \rho(\vec{Q}) \gamma [A \bar{u}_0(\kappa, \kappa'; \lambda) + \bar{u}_1(\kappa, \kappa'; \lambda) \gamma(I)], \\ U^s(\vec{k}, \vec{k}'; \lambda) &= \rho(\vec{Q}) \gamma [\bar{u}_2(\kappa, \kappa'; \lambda) - \bar{u}_3(\kappa, \kappa'; \lambda) \gamma(I)], \end{aligned} \quad (21)$$

где

$$\gamma(I) = (I(I+1) - T(T+1) - t(t+1)) = \begin{cases} 1, & \text{при } I = 3/2, \\ -2, & \text{при } I = 1/2. \end{cases}$$

$I = \{3/2, 1/2\}$ – полный изоспин пион-ядерной системы, $T = 1/2$ – изоспин ядра, $t = 1$ – изоспин пиона.

Проведя разложение матриц $\bar{u}_\beta(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda)$ по парциальным компонентам, получим

$$\begin{aligned} \bar{u}_0(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3} [(2u_{l+}^{i=3/2} + u_{l+}^{i=1/2})(l+1) + (2u_{l-}^{i=3/2} + u_{l-}^{i=1/2})l] P_l, \\ \bar{u}_1(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3} [(u_{l+}^{i=3/2} - u_{l+}^{i=1/2})(l+1) + (u_{l-}^{i=3/2} - u_{l-}^{i=1/2})l] P_l, \\ \bar{u}_2(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3} [(2u_{l+}^{i=3/2} + u_{l+}^{i=1/2}) - (2u_{l-}^{i=3/2} + u_{l-}^{i=1/2})] P_l', \\ \bar{u}_3(\vec{\kappa}, \vec{\kappa}'; \lambda) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3} [(u_{l+}^{i=3/2} - u_{l+}^{i=1/2}) - (u_{l-}^{i=3/2} - u_{l-}^{i=1/2})] P_l', \end{aligned} \quad (22)$$

где $P_l \equiv P_l(\cos\theta_{\pi N})$, $P_l' = dP_l(\cos\theta_{\pi N})/d\theta_{\pi N}$. Таким образом, посредством выражений (20) – (22) мы выразили исходный МЭ $\langle f_{\pi A} | U(\lambda) | i_{\pi A} \rangle$ через парциальные компоненты $u_{i\pm}^i \equiv u_{j=i\pm 1/2}^i(\kappa, \kappa'; \lambda)$ u -матрицы πN -рассеяния.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} U_{l+}^c &\equiv \frac{1}{3} \left[\bar{u}_{l+}^{i=3/2} \left(2 + \frac{\gamma(I)}{A} \right) + \bar{u}_{l+}^{i=1/2} \left(1 - \frac{\gamma(I)}{A} \right) \right], \\ U_{l-}^c &\equiv \frac{1}{3} \left[\bar{u}_{l-}^{i=3/2} \left(2 + \frac{\gamma(I)}{A} \right) + \bar{u}_{l-}^{i=1/2} \left(1 - \frac{\gamma(I)}{A} \right) \right], \\ U_{l+}^s &\equiv \frac{1}{3} \left[\bar{u}_{l+}^{i=3/2} (2 - \gamma(I)) + \bar{u}_{l+}^{i=1/2} (1 + \gamma(I)) \right], \\ U_{l-}^s &\equiv \frac{1}{3} \left[\bar{u}_{l-}^{i=3/2} (2 - \gamma(I)) + \bar{u}_{l-}^{i=1/2} (1 + \gamma(I)) \right] \end{aligned} \quad (23)$$

и перепишем выражение (20) в следующем виде

$$\langle f_{\pi A} | \hat{U}(\lambda) | i_{\pi A} \rangle = A\rho(\bar{Q})\gamma \frac{1}{2} M_s^i \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ [U_{l+}^e(l+1) + U_{l-}^e] P_l(\cos \theta_{\pi N}) \hat{1} + [U_{l+}^s - U_{l-}^s] P_l'(\cos \theta_{\pi N}) \frac{i(\vec{\sigma} \cdot \vec{m})}{A} \right\} \frac{1}{2} M_s. \quad (24)$$

Можно показать, что в приближении "замороженных" нуклонов:

$$P_l'(\cos \theta_{\pi N}) i(\vec{\sigma} \cdot \vec{m}) = \frac{\kappa^2}{k^2} \sum_{l' \leq l} d_{l'l}(\vec{\sigma} \cdot \vec{l}') P_{l'}(\cos \theta_{\pi A}), \quad (25)$$

где $d_{l'l}$ - фактор, отвечающий за преобразование углов при переходе из с.ц.м. пион-ядро в с.ц.м. пион-нуклон [18]. Тогда (24) перепишется в виде

$$\langle f_{\pi A} | \hat{U}(\lambda) | i_{\pi A} \rangle = A\rho(\bar{Q})\gamma \frac{1}{2} M_s^i \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l' \leq l} d_{l'l} \left\{ [U_{l+}^e(l+1) + U_{l-}^e] \hat{1} + [U_{l+}^s - U_{l-}^s] \frac{\kappa^2 (\vec{\sigma} \cdot \vec{l}')}{k^2} \right\} P_{l'}(\cos \theta_{\pi A}) \frac{1}{2} M_s. \quad (26)$$

Проведя разложение по собственным функциям оператора $(\vec{\sigma} \cdot \vec{l}')$ и диагонализовав данный МЭ, получим

$$\langle f_{\pi A} | \hat{U}(\lambda) | i_{\pi A} \rangle = A\rho(\bar{Q})\gamma \sum_{j' M_j'} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l' \leq l} \sum_{m_1' m_2'} C_{l' m_2' \frac{1}{2} m_s'}^{j' m_j'} Y_{l' m_2'}^*(\Omega') C_{l' m_1' \frac{1}{2} m_s'}^{j' m_j'} Y_{l' m_1'}(\Omega) \times \frac{d_{l'l}}{2l'+1} \left\{ [U_{l+}^e(l+1) + U_{l-}^e] + [U_{l+}^s - U_{l-}^s] \frac{\kappa^2 \gamma(j')}{k^2} \frac{1}{A} \right\}, \quad (27)$$

где

$$\gamma(j') = \begin{cases} l', & \text{при } j' = l' + 1/2, \\ -(l' + 1), & \text{при } j' = l' - 1/2. \end{cases}$$

Если теперь разложить МЭ и формфактор ядра по парциальным волнам, провести интегрирование по угловым переменным и свертку суммы произведений коэффициентов Клебша-Гордана, а также интегрирование по константе

связи λ , то получим, в соответствии с выражением (13), выражение для парциальных фаз пион-ядерного рассеяния в первом порядке теории

$$\delta_{JL}^I(k) = \frac{\varepsilon_{\pi A}(k)}{\varepsilon_{\pi N}(\kappa)} A\gamma \sum_{l''=0}^{\infty} \rho_{l''}(Q) (2l'' + 1) \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{l' \leq l} \sum_{j'} d_{l'l} \begin{pmatrix} l'' & l' & L \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 \times \frac{1}{3} (2L + 1) (2j' + 1) \left\{ \begin{matrix} J & J_1 & l'' \\ l' & L & S \end{matrix} \right\}^2 \times \left\{ \left[\delta_{l+}^{i=3/2} \left(2 + \frac{\gamma(I)}{A} \right) + \delta_{l+}^{i=1/2} \left(1 - \frac{\gamma(I)}{A} \right) \right] (l+1) + \left[\delta_{l-}^{i=3/2} \left(2 + \frac{\gamma(I)}{A} \right) + \delta_{l-}^{i=1/2} \left(1 - \frac{\gamma(I)}{A} \right) \right] l \right\} + \left[\delta_{l+}^{i=3/2} (2 - \gamma(I)) + \delta_{l+}^{i=1/2} (1 + \gamma(I)) \right] - \left[\delta_{l-}^{i=3/2} (2 - \gamma(I)) + \delta_{l-}^{i=1/2} (1 + \gamma(I)) \right] \frac{\kappa^2 \gamma(j')}{k^2} \frac{1}{A} \left. \right\}. \quad (28)$$

3.2 Эффекты второго порядка

В приближении первого порядка π -ядерные фазы рассеяния являются чисто вещественными, что не представляется реалистичным. Процессы с возбуждением ядра в промежуточных состояниях, отвечающие за возникновение мнимых частей фаз рассеяния (параметры неупругости), проявляются во втором порядке теории. В настоящей статье мы учтем эти эффекты приближенно.

* Параметры неупругости.

Из (11) и (12) следует, что мнимая часть поправки второго порядка равна:

$$\text{Im} \delta^{(2)}(k) = 2\pi^2 \varepsilon_{\pi A}(k) \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \langle \vec{k}', 0 | V^{(1)}(\lambda_1) \hat{Q} \delta(E - h) V^{(1)}(\lambda) | \vec{k}, 0 \rangle = 2\pi^2 \varepsilon_{\pi A}(k) \sum_{n>0} \int \frac{d\vec{k}''}{(2\pi)^3} \delta(E_0(k) - E_n(k'')) \times \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \langle \vec{k}', 0 | V^{(1)}(\lambda_1) | \vec{k}'', n \rangle \langle \vec{k}'', n | V^{(1)}(\lambda) | \vec{k}, 0 \rangle, \quad (29)$$

где $E_0(k) = \omega_\pi(k) + \omega_A(k)$, $E_n(k'') = E_0(k'') + \varepsilon_n$, ε_n – энергия возбужденного состояния ядра, отсчитываемая от энергии основного состояния.

Матричные элементы в (29) аналогичны МЭ, возникающему в приближении первого порядка (13), поэтому в приближении факторизации по аналогии с выражением (14) они имеют вид:

$$\begin{aligned} \langle \vec{k}', 0 | \sum_{i=1}^A u_i(\lambda_1) | \vec{k}'', n \rangle &= A \rho_{0n}(\vec{Q}') \bar{u}(\vec{k}', \vec{k}''; \lambda_1), \\ \langle \vec{k}'', n | \sum_{i=1}^A u_i(\lambda) | \vec{k}, 0 \rangle &= A \rho_{n0}(\vec{Q}'') \bar{u}(\vec{k}'', \vec{k}; \lambda), \end{aligned} \quad (30)$$

где $\rho_{0n}(\vec{Q}')$ и $\rho_{n0}(\vec{Q}'')$ – переходные формфакторы, $\vec{Q}' = \vec{k}' - \vec{k}''$ и $\vec{Q}'' = \vec{k}'' - \vec{k}$.

Импульс пиона в промежуточном состоянии k_n определяется уравнением $E_n(k_n) - E_0(k) - \varepsilon_n = 0$. Для оценки параметров неупругости $\eta = \exp(-2\text{Im}\delta^{(2)})$ воспользуемся приближением полноты, полагая $E_n(k_n) = E_0(k) + \Delta$, т.е. что все промежуточные состояния ядра являются вырожденными и имеют энергию основного состояния. Тогда, подставляя (30) в (29) и используя тождество [13]:

$$\sum_{n>0} \rho_{0n}(\vec{Q}') \rho_{n0}(\vec{Q}'') = A^{-1} \rho_{00}(\vec{Q}) + (1 - A^{-1}) C_{00}(\vec{Q}) - \rho_{00}(\vec{Q}') \rho_{00}(\vec{Q}''), \quad (31)$$

получаем

$$\begin{aligned} \text{Im}\delta^{(2)}(k) &= 2\pi^2 \varepsilon_{\pi A}(k) A \varepsilon_{\pi A}(k_\Delta) \int \frac{d\vec{n}''}{4\pi} [\rho_{00}(\vec{Q}) - A \rho_{00}(\vec{Q}') \rho_{00}(\vec{Q}'') + \\ &(A-1) C_{00}(\vec{Q})] \int_0^1 d\lambda \int_0^\lambda d\lambda_1 \bar{u}(\vec{k}', \vec{k}''; \lambda_1) \bar{u}(\vec{k}'', \vec{k}; \lambda), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\vec{Q} = \vec{k}' - \vec{k}$ – переданный импульс, $\vec{k}'' = k_\Delta \vec{n}''$, \vec{n}'' – единичный вектор, а импульс k_Δ определяется выражением $E_0(k_\Delta) - E_0(k) - \Delta = 0$.

Из (32) следует, что $\text{Im}\delta_{\pi A}^{(2)} \sim \varepsilon_{\pi A}(k_\Delta) \sim k_\Delta$ и, как было показано в [16], мнимая часть фаз пион-ядерного рассеяния сильно зависит от Δ в области

низких энергий. (Дополнительная зависимость от Δ входит в $\text{Im}\delta_{\pi A}^{(2)}$ также через подынтегральные функции в (32)).

Параметр Δ имеет смысл некоторой средней энергии возбуждения ядра и, в общем случае, зависит от энергии налетающего пиона. Значение для Δ может быть определено из анализа данных рассеяния.

В [16] было показано, что во втором порядке теории основной вклад в мнимую часть фаз рассеяния вносит член, линейный по $\rho(\vec{Q})$. В этом приближении выражение для $\text{Im}\delta_{\pi A}^{(2)}$ получается из (28) простой подстановкой

$$\delta_{\pi N}^{\alpha'} \rightarrow i2\xi_{\alpha'}(k, k_\Delta)(\delta_{\pi N}^{\alpha'})^2, \quad (33)$$

где фактор

$$\xi_{\alpha'}(k, k_\Delta) = \frac{\varepsilon_{\pi A}(k_\Delta)}{\varepsilon_{\pi N}(k)} \left[\frac{g_{\alpha'}(k_\Delta)}{g_{\alpha'}(k)} \right]^2. \quad (34)$$

Здесь $\alpha' \equiv (l, j, i)$, $\varepsilon(k)$ – плотность уровней рассеяния, $g_{\alpha'}(k)$ – формфакторы сепарабельного πN -потенциала.

** Поправка на поглощение.

Канал поглощения пионов играет важную роль в низкоэнергетическом пион-ядерном рассеянии. Для учета этого канала в [12, 13] было проведено обобщение потенциальной схемы на случай с несохраняющимся числом частиц и в рамках унитарного подхода развит метод связанных каналов, позволяющий рассчитывать поправку на поглощение $\delta_{\pi A}^{abs}$ в пион-ядерных фазах рассеяния. В этом случае пион-ядерные фазы имеют вид:

$$\delta_{\pi A} = \delta_{\pi A}^{pot} + \delta_{\pi A}^{abs}, \quad (35)$$

где $\delta_{\pi A}^{pot}$ – рассчитываемая выше фаза чисто потенциального рассеяния.

Поправка на поглощение пиона имеет вид [12, 13]:

$$\delta_{\pi A}^{abs}(k) = -\pi \varepsilon_{\pi A}(k) \int_0^1 d\eta \langle \psi^{(+)}(\vec{k}'); 0 | \mathcal{R}_0(E, \eta) | \psi^{(+)}(\vec{k}); 0 \rangle, \quad (36)$$

где $\psi^{(+)}(\vec{k}')$ и $\psi^{(+)}(\vec{k})$ – искаженные за счет потенциального взаимодействия пионные волны, а оператор $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ включает в себя все диаграммы с промежуточными нуклонными состояниями. Динамическая переменная η отвечает за включение операторов рождения и уничтожения пиона. Точная система уравнений для $\mathcal{R}_0(E, \eta)$ и итерационная схема ее решения приведены в [13].

В предположении доминирования двухнуклонного механизма поглощения пиона и используя приближение локальной плотности, применимость которого обусловлена короткодействующим характером действия операторов поглощения и рождения пиона, фазу $\delta_{\pi A}^{abs}$ можно выразить приближенно посредством члена, пропорционального ρ^2 (ρ – плотность ядра) [16]:

$$\delta_{\pi A}^{abs}(k) = \gamma_0 k \rho^2(\vec{q}) [\tilde{B}_0(k) + \tilde{C}_0(k)(\vec{\kappa}' \cdot \vec{\kappa})], \quad (37)$$

где $\epsilon = \omega_\pi/2m_N$, ω_π – энергия пиона, m_N – масса нуклона, $\hat{\rho}^2(\vec{q})$ – фурье-образ от $\rho^2(r)$, нормированной на единицу, $\vec{q} = \vec{k}' - \vec{k}$ – переданный импульс, $\vec{\kappa}$ и $\vec{\kappa}'$ – импульсы пиона в πNN с.л.м., $\gamma_0 = A(A-1)(1+\epsilon)/(1+2\epsilon/A)$. Здесь учтены наинишие s - и p -волны πNN -рассеяния.

В работе [16] было показано, что комплексные параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 можно считать постоянными в области низких энергий и выбрать такими, чтобы описывались экспериментальные данные для длин ($a_0 = \lim \delta_0(k)/k$, $k \rightarrow 0$) и объемов ($a_1 = \lim \delta_1(k)/k^3$, $k \rightarrow 0$) рассеяния:

$$a_0^{exp} - a_0^{pot} = \gamma_0 \hat{\rho}_0^2(0) \tilde{B}_0, \quad a_1^{exp} - a_1^{pot} = \gamma_0 [\tilde{B}_0 \delta + \beta \tilde{C}_0 \hat{\rho}_0^2(0)/3], \quad (38)$$

где $\beta = (1 + \epsilon/2A)/(1 + \epsilon)$, $\delta = \lim \hat{\rho}_1^2(k)/k^2$, $k \rightarrow 0$.

Величины $a_{0,1}^{pot}$ вычисляются с помощью фаз (12), а экспериментальные значения $a_{0,1}^{exp}$ можно извлечь из анализа пион-атомных данных.

Отметим, что параметры \tilde{B}_0 и \tilde{C}_0 отличаются от соответствующих параметров оптического потенциала тем, что включают в себя эффекты, связанные с искажением пионной волны в упругом канале.

3.3 Кулоновское взаимодействие

При описании рассеяния пионов на ядрах необходимо учитывать кулоновское взаимодействие, особенно при низких энергиях, где область его влияния распространяется на весь диапазон углов рассеяния. Наибольший вклад дают эффекты, обусловленные пространственным распределением заряда в ядре. Следует также учитывать поправки, возникающие из-за "косвенной" интерференции сильного и кулоновского взаимодействий: изменение траектории частицы, подходящей к области сильного взаимодействия, за счет кулоновского взаимодействия. Ниже мы приведем основные соотношения, позволяющие провести учет кулоновского взаимодействия в унитарном подходе.

Для учета кулоновского взаимодействия между пионом и ядром необходимо вычислить полную амплитуду рассеяния

$$f_{total}^\pm(\theta) = f_C^\pm(\theta) + f_{NC}^\pm(\theta), \quad (39)$$

где $f_C^\pm(\theta)$ – амплитуда чисто кулоновского взаимодействия, $f_{NC}^\pm(\theta)$ – ядерная амплитуда рассеяния, модифицированная с учетом кулоновского искажения пионной волны, знак $+$ ($-$) отвечает случаю рассеяния π^+ (π^-) пиона.

Воспользуемся результатами работ [22, 23], в которых были получены выражения для модифицированной ядерной амплитуды $f_{NC}^\pm(\theta)$, представляющие собой on-shell аппроксимацию ядерной амплитуды, скоррелированной кулоновским взаимодействием.

Для кулоновской амплитуды в области низких энергий можно воспользоваться следующим нерелятивистским приближением

$$f_C^\pm(\theta) = f_{C,Born}^\pm(\theta) \exp \left[-i\eta^\pm \ln \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2i\sigma_0^\pm \right], \quad (40)$$

где $\eta^\pm = \pm Z\alpha/\beta$ – параметр Зоммерфельда, $\alpha=1/137$ – постоянная тонкой структуры, Z – заряд ядра, $\beta = v_\pi^{lab}/c$ – скорость пиона в лабораторной системе координат, σ_0^\pm – кулоновская S -фаза рассеяния точечных частиц. Выра-

жение для борновской амплитуды, учитывающее пространственное распределение заряда в пионе и ядре, выбирается в виде:

$$f_{C,Born}^{\pm}(\theta) = -2\eta^{\pm} \frac{k}{q^2} F_{\pi}^{ch}(q^2) F_A^{ch}(q^2), \quad (41)$$

где $q^2 = 2k^2(1 - \cos \theta)$ – квадрат переданного импульса, $F_{\pi}^{ch}(q^2)$, $F_A^{ch}(q^2)$ – зарядовые формфакторы пиона и ядра, соответственно.

Модифицированная ядерная амплитуда имеет следующий вид:

$$f_{NC}^{\pm}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{2i\delta_l^{\pm}} f_{NC,l}^{\pm}(\theta) (2l+1) P_l(\cos \theta), \quad (42)$$

где $f_{NC,l}^{\pm}(\theta) = (\eta_{NC,l}^{\pm} \exp(2i\delta_{NC,l}^{\pm}) - 1)/2ik$ – парциальные амплитуды рассеяния, $\eta_{NC,l}^{\pm} = \exp(-2\omega_{NC,l}^{\pm})$ – параметры неупругости.

Воспользуемся следующими обозначениями для парциальных фаз рассеяния $\delta_{NC,l}^{\pm} = \delta_{N,l} + \delta_{R,l}^{\pm}$, $\omega_{NC,l}^{\pm} = \omega_{N,l} + \omega_{R,l}^{\pm}$, где $\delta_{N,l}$ и $\omega_{N,l}$ – действительные и мнимые модифицированные парциальные фазы рассеяния, $\delta_{R,l}^{\pm}$ и $\omega_{R,l}^{\pm}$ – действительные и мнимые парциальные чисто ядерные фазы рассеяния и $\delta_{R,l}^{\pm}$, $\omega_{R,l}^{\pm}$ – соответствующие им кулоновские поправки.

Кулоновские поправки к ядерным фазам вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta_{R,l}^{\pm} &= \alpha_l^{\pm} \left[\frac{d\delta_{N,l}}{dk} + \frac{1}{2k} \sin(2\delta_{N,l}) \cosh(2\omega_{N,l}) \right], \\ \omega_{R,l}^{\pm} &= \alpha_l^{\pm} \left[\frac{d\omega_{N,l}}{dk} + \frac{1}{2k} \cos(2\delta_{N,l}) \sinh(2\omega_{N,l}) \right], \end{aligned} \quad (43)$$

где

$$\alpha_l^{\pm} = \frac{2}{\pi} \eta^{\pm} k^2 \int_0^{\infty} dk' \frac{k'^2}{k^2 - k'^2} \int_{-1}^{+1} dx P_l(x) F_{\pi}^{ch}(q^2) F_A^{ch}(q^2) \frac{1}{q^2}. \quad (44)$$

Для кулоновских фаз рассеяния мы используем следующие обозначения: $\bar{\sigma}_l^{\pm} = \sigma_l^{\pm} + \Delta\sigma_l^{\pm}$, где $\bar{\sigma}_l^{\pm}$ и σ_l^{\pm} – нерелятивистские кулоновские фазы рассеяния неточечных и точечных частиц, соответственно, $\Delta\sigma_l^{\pm}$ – поправки к точечным

кулоновским фазам σ_l^{\pm} для учета неточечности распределения заряда в ядре.

Расчет последних осуществляется следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{Re} \Delta\sigma_l^{\pm} &= \gamma \left[I_l(a) + \int_a^2 dy P_l(1-y) \Phi(q^2) \sin(\eta \ln \frac{y}{2} - 2\sigma_0) \right], \\ \text{Im} \Delta\sigma_l^{\pm} &= \pm \gamma \left[J_l(a) + \int_a^2 dy P_l(1-y) \Phi(q^2) \cos(\eta \ln \frac{y}{2} - 2\sigma_0) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

где $y \equiv 1 - x$, $x \equiv \cos \theta$. Здесь

$$\begin{aligned} I_l^{\pm} &\equiv \pm \frac{a}{1+\eta^2} [\sin(\eta \ln \frac{a}{2} - 2\sigma_0) - \eta \cos(\eta \ln \frac{a}{2} - 2\sigma_0)] = \pm I_l(a), \\ J_l^{\pm} &\equiv \frac{a}{1+\eta^2} [\cos(\eta \ln \frac{a}{2} - 2\sigma_0) + \eta \sin(\eta \ln \frac{a}{2} - 2\sigma_0)] = I_l(a). \end{aligned} \quad (46)$$

Приведем явные выражения для зарядовых формфакторов ядра и пиона. Для случая ядер s - и p -оболочки зарядовый формфактор ядра можно записать в гауссовой форме:

$$F_A^{ch}(q^2) = (1 - 4\alpha z) e^{-z}, \quad z = q^2 a_{ch}^2 / 4, \quad (47)$$

где $\alpha = (A - 4)/6A$. Параметр зарядового распределения a_{ch} связан с зарядовым радиусом ядра $R_{ch} = \langle r^2 \rangle_A^{1/2}$, извлекаемым из данных по рассеянию электронов, следующим образом:

$$a_{ch}^2 = \frac{2}{3} [3A/(5A - 8)] R_{ch}^2 \quad (48)$$

в соответствии с определением: $F_{ch}(q^2) = 1 - R_{ch}^2 q^2 / 6$, при $q^2 \rightarrow 0$.

Выражение для формфактора пиона имеет вид

$$F_{\pi}^{ch}(q^2) = (1 - q^2/m_{\nu}^2)^{-1}, \quad m_{\nu} = 0.462(12) \text{ (ГэВ/}c\text{)}^2, \quad (49)$$

что отвечает зарядовому радиусу пиона $\langle r_{\pi}^2 \rangle^{1/2} = 0.711(9)$ фм.

4 Заключение

В настоящей работе проведено обобщение формализма унитарного подхода, основанного на эволюционном по константе связи методе Киржница, для описания упругого рассеяния пионов низких энергий на ядрах со спином и изоспином, равными $1/2$. Получено выражение для расчета парциальных фаз потенциального пион-ядерного рассеяния в первом порядке теории. Проведен приближенный учет эффектов второго порядка, связанных с влиянием неупругих процессов и канала поглощения, а также кулоновских поправок к ядерным фазам.

В последующей работе мы предполагаем применить предложенный формализм для рассмотрения упругого $\pi^3\text{He}$ рассеяния при низких энергиях в первом порядке теории. Представляется также интересным изучить эффекты второго порядка более детально. Это может оказаться особенно важным при исследовании величины спиновой асимметрии.

Литература

- [1] Эриксон Т., Вайзе В., *Пионы и ядра*. М.: Наука, 1991.
- [2] Гольдбергер М.Л., Ватсон К.М., *Теория столкновений*. М.: Мир, 1967.
- [3] Eisenberg J.M. and Koltun D.S., *Theory of Meson Interactions with Nuclei*. N.Y.: Wiley, 1980.
- [4] Копалейшвили Т.И., *Вопросы теории пион-ядерного взаимодействия*. М.: Энергоатомиздат, 1984.
- [5] Киржниц Д.А., *ЖЭТФ* **49** (1965) 1544.
- [6] Киржниц Д.А., В кн.: *Проблемы теоретической физики. Памяти П.Е. Тамма*. М.: Наука, 1972, с. 74.
- [7] Киржниц Д.А., Крючков Г.Ю., Такибаев Н.Ж., *ЭЧАЯ* **10** (1979) 741.
- [8] Беляев В.Б., Соловцова О.П., *ЯФ* **35** (1982) 868.
- [9] Киржниц Д.А., Пеньков Ф.М., Такибаев Н.Ж., *ЯФ* **38** (1983) 1145.
- [10] Беляев В.Б., Киржниц Д.А., Такибаев Н.Ж., Ханхасаев М.Х., *ЯФ* **32** (1980) 1120.
- [11] Ханхасаев М.Х., *ЯФ* **36** (1982) 633; **37** (1983) 1196.
- [12] Belyaev V.B. and Khankhasayev M.Kh., *Phys. Lett. B* **137** (1984) 299.
- [13] Ханхасаев М.Х., *ЭЧАЯ* **16** (1985) 1223.
- [14] Khankhasayev M.Kh., Nichitiu F., and Sapozhnikov M.G., *Phys. Lett. B* **175** (1986) 261.
- [15] Khankhasayev M.Kh. and Sapozhnikov A.P., *Phys. Lett. B* **201** (1988) 17.
- [16] Khankhasayev M.Kh., *Nucl. Phys. A* **505** (1989) 717.
- [17] Ханхасаев М.Х., Курманов Ж.Б., *ЯФ* **56** (1993) 211.
- [18] Landau R.H., Phatak S.C., and Tabakin F., *Ann. Phys.* **78** (1973) 299.
- [19] Landau R.H. and Thomas A.W., *Nucl. Phys. A* **302** (1978) 461.
- [20] Thomas A.W. and Landau R.H., *Phys. Rep.* **58** (1980) 121.
- [21] Mach R. and Sapozhnikov M.G., *J. Phys. G: Nucl. Phys.* **10** (1984) 147.
- [22] Fröhlich J. et al., *J. Phys. G* **6** (1980) 841; *Nucl. Phys. A* **435** (1985) 738.
- [23] Fröhlich J. et al., *Z. Phys. A* **302** (1981) 89; Dumbrajs O. et al., *Phys. Rev. C* **29** (1984) 581.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 марта 1996 года.