СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P4 - 9589

И.М.Франк

О КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭФФЕКТА ДОППЛЕРА В ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

1976

P4 - 9589

И.М.Франк

О КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ЭФФЕКТА ДОППЛЕРА В ПРЕЛОМЛЯЮЩЕЙ СРЕДЕ

Классическая формула Допплера для измерения частоты источника света, движущегося в вакууме, получается элементарно из волновых соображений и имеет, как известно, простую квантовую аналогию. При квантовом рассмотрении необходимо учесть отдачу, которую получает излучатель в результате испускания фотона, и использовать законы сохранения энергии и импульса. В случае преломляющей среды классическое и квантовое рассмотрения эффекта Допплера даны в работах /1,2/. При квантовом рассмотрении использовано допущение, сделанное В.Л.Гинзбургом /3/ в теории Вавилова-Черенкова о том, что в среде при излучении энергии $E = \hbar\omega$ уносится импульс

$$P_{\omega} = \frac{n}{c}\hbar\omega, \qquad /1/$$

где n - показатель преломления света для частоты ω. В случае эффекта Вавилова-Черенкова из /1/ получается известное соотношение для угла излучения радиации /с точностью до пренебрежимо малой в случае видимого света поправки * /

$$\cos\Theta = \frac{c}{vn}. \qquad /2/$$

Применимость /1/ представляется естественной, так как она дает характерное для квантовой механики соотношение между импульсом и длиной волны $\lambda = h/p$. В течение многих лет /1/ используется в ряде задач, таких, как эффект Допплера, рассеяние света частицей, движущейся в среде , и т.п. Несмотря на это, вопрос о при-.

---

* Эта поправка порядка $\frac{\hbar\omega}{mc^2}$, где m - масса излучателя /3/.

менимости соотношения /1/ заслуживает обсуждения в связи с проблемой, возникшей еще в 1908-1914 гг. и до сих пор не получившей окончательного решения. Это проблема о тензоре энергии -импульса для излучения в среде /тензор Минковского или Абрагама/, причем работы последних лет показывают, что она не теряет своей актуальности[4–7]. Записанный в квантовой форме импульс по Минковскому равен /1/, в то время как по Абрагаму он в n^2 меньше, т.е.

$$P_A = \frac{\hbar\omega}{nc} . \qquad /3/$$

На протяжении десятилетий высказывались доводы как в пользу Абрагама, так и в пользу Минковского. В последнее время Д.В.Скобельцын[4,6] привел убедительные доводы, говорящие о том, что в этом старом споре прав Абрагам.

Отсюда следует, что применимость /1/ в рассмотренных с ее помощью задачах, по крайней мере, требует обоснования. Ответ на этот вопрос в значительной мере содержится в работах[4–6]. Действительно, при использовании /1/ в квантовых задачах имеют в виду отдачу, которую испытывает излучатель при испускании фотона. Эта величина по своей природе тождественна с давлением света, для которого, как в случае тензора Абрагама, так и Минковского, должно быть правильно соотношение /1/, что подтверждается и экспериментом[8]. Как отметил Д.В.Скобельцын[4], здесь речь идет о полном потоке количества движения - понятии, введенном еще в 1908 г. Планком[9]. В случае тензора Абрагама оно учитывает не только импульс электромагнитного поля, но и импульс, передаваемый среде. Сказанное здесь о применимости /1/, однако, не исчерпывает проблемы, поскольку оно относится к покоящейся среде. Как отмечено в цитированных работах Д.В.Скобельцына, для движущейся среды это требует дополнительного анализа. Очевидно, это замечание должно учитываться и для движущегося источника света.

Рассмотрим применимость /1/ в классическом пределе, когда энергия фотона мала по сравнению с полной энергией частицы $E = mc^2/\sqrt{1-\beta^2}$, и движение частицы можно считать заданным. Допустим, что движется заряд и энергия радиации Вавилова-Черенкова, испускаемая в единицу времени под углом Θ к скорости, равна E_ω. Эта энергия, очевидно, черпается из кинетической энергии частицы. Если это излучение уносит из излучателя импульс P_ω, то работа силы отдачи, тормозящая движение, равна $v P_\omega \cos\Theta$. Отсюда

$$v P_\omega \cos\Theta = E_\omega . \qquad /4/$$

В этой формуле нет ничего квантового - это просто использование закона сохранения энергии. Так как из волновых соображений $\cos\Theta$ равен /2/, то из /4/ с необходимостью следует, что полный импульс /по Планку/, который уносится вместе с энергией E_ω, связан с ней соотношением

$$P_\omega = \frac{n}{c} E_\omega . \qquad /5/$$

Здесь сделано единственное предположение, что энергию излучения можно приравнивать работе силы реакции поля, действующей на движущийся заряд. Прямой расчет в рамках классической электродинамики показывает, что это правильно[10]. Таким образом, из классической электродинамики однозначно следует применимость /5/ в случае излучения Вавилова-Черенкова. Если от классического рассмотрения перейти к квантовому, положив $E_\omega = \hbar\omega$, то из /5/ получим сразу /1/. Квантовая формула /1/ в этом случае имеет тот же физический смысл, что и /5/, т.е. это полный поток импульса, который уносится вместе с энергией $\hbar\omega$. Отсюда еще нельзя сделать вывода о том, что в тензоре плотности энергии и импульса следует предпочесть Минковского Абрагаму. То же самое относится и к эффекту Допплера. В этом случае в балансе энергии принимает участие изменение энергии возбуждения излучателя. При нормальном эффекте Допплера происходит спонтанный переход из возбужденного состояния излучателя в энергетическое состояние, лежащее ниже, с выделением энергии.

$$E_0 = \hbar\omega_0 , \qquad /6/$$

где ω - собственная частота, измеренная в неподвижной системе координат.

Если допплеровская частота равна ω, то энергия излучаемого фотона равна

$$E_\omega = \hbar\omega, \qquad /7/$$

а разность E_ω и E_0 очевидно, заимствуется из кинетической энергии излучателя при $E_\omega > E_0$, либо передается ей, если $E_\omega < E_0$. Она должна быть равна работе, совершаемой силой отдачи, возникающей при излучении энергии E_ω и воздействующей на поступательное движение, т.е. $vP_\omega\cos\Theta$. Полагая P_ω равным /5/, получим формулу

$$v\frac{n}{c}\omega\cos\Theta = \omega - \omega_0, \qquad /8/$$

тождественную с формулой нормального эффекта Допплера, однозначно вытекающей из волновых соображений

$$\omega = \frac{\omega_0}{1-\beta n\cos\Theta}; \quad \beta n\cos\Theta < 1. \qquad /9/$$

Здесь ω_0 - собственная частота, измеренная в покоящейся системе координат.

В случае аномального эффекта Допплера происходит спонтанное возбуждение излучателя [2], и из кинетической энергии черпается энергия $E_\omega + E_0 = \hbar(\omega + \omega_0)$ и вместо /8/ получим

$$n\frac{v}{c}\omega\cos\Theta = \omega + \omega_0, \qquad /10/$$

и, следовательно, известную формулу аномального эффекта Допплера [1]

$$\omega_0 = \frac{\omega_0}{\beta n\cos\Theta - 1}; \quad \beta n\cos\Theta > 1. \qquad /11/$$

Формулы /8/ и /10/, из которых следуют формулы Допплера в среде, были положены в основу лекции автора [11].

Рассмотренный здесь вывод формулы Допплера представляется существенно квантовым, так как в /6/ и /7/ входит величина фотона. Поскольку, однако, $\hbar$ в дальнейших формулах исчезает, то это рассмотрение должно иметь и классическую аналогию. Ее нетрудно найти, рассмотрев вопрос об энергии излучения и о реакции излучения на движущуюся частицу.

В работе автора [1] определена энергия излучения диполя с амплитудой колебания P_0 и частотой ω_0 /P_0 и ω_0 измерены в неподвижной системе координат/ на пути $\ell = 2vT$. Для диполя, ориентированного по направлению скорости, была найдена энергия излучения через единицу площади на расстоянии R_0 и в единичном интервале частот ω /формула /7.7/ работы [1]/

$$W d\omega = \frac{P_0^2 n(\omega)\omega^4}{4\pi^2 R_0^2 c^3}\,\frac{\sin^2[(\omega|\kappa(\omega)| - \omega_0)T]}{(\omega|\kappa(\omega)| - \omega_0)^2}\sin^2\Theta\, d\omega \qquad /12/$$

и для P_0, ориентированного перпендикулярно v /формулы /7,8/ работы [1]/.

$$W d\omega = \frac{P_0^2 n(\omega)\omega^4}{4\pi^2 R_0^2 c^3}\,\frac{\sin^2[(\omega|\kappa(\omega)| - \omega_0)T]}{(\omega|\kappa(\omega)| - \omega_0)^2}\times \qquad /13/$$

$$\times\{\kappa^2(\omega) - \sin^2\Theta\cos^2\zeta\,(1-\beta^2 n^2(\omega))\}\,d\omega.$$

Здесь κ - обратная величина коэффициента когерентности α, а именно:

$$|\kappa(\omega)| = \frac{1}{\alpha} = 1 - \beta n(\omega)\cos\Theta \qquad /14/$$

в случае нормального эффекта Допплера и

$$|\kappa(\omega)| = \frac{1}{\alpha} = \beta n(\omega)\cos\Theta - 1 \qquad /15/$$

для аномального эффекта Допплера. При этом Θ - угол между направлениями излучения и скорости v, а ζ - азимутальный угол, отсчитываемый в случае /13/ от плоскости, определяемой P_0 и v. Ввиду конечности пути $\ell = 2vT$ каждому углу Θ соответствует спектр частот, охватывающий интервал $\Delta\omega$, близких к допплеровской, а данная допплеровская частота излучается в конечном интервале углов $\Delta\Theta$. При увеличении ℓ эти интервалы сжимаются. Особенно просто дело обстоит с $\Delta\Theta$. Как было показано в [1] формулы /7,12/ работы [1] /,

$$\Delta\Theta = \frac{\pi}{\omega\beta n(\omega)\sin\Theta}\frac{1}{T}, \qquad /16/$$

т.е. $\Delta\theta$ сжимается обратно пропорционально T и притом не зависит от величины дисперсии. При $T\to\infty$ зависимость Θ от ω становится точной, а угловое распределение для каждой излучаемой частоты ω все более стремится к δ -функции. Умножая /12/ на $d\Omega = R_o^2\sin\Theta\, d\Theta\, d\zeta$ и выполняя интегрирование по Θ и ζ, в предельном случае $T\to\infty$ получим для диполя, ориентированного по скорости

$$E_\omega d\omega = \frac{P_o^2}{4c^3\beta}\omega^3\sin^2\Theta_\omega d\omega\,. \qquad /17/$$

Здесь Θ_ω однозначно связано с ω либо уравнением /9/, либо /11/. Изучение E_ω отнесено к единице интервала частоты ω и единице времени /делением /12/ на $2T$ /. Поскольку спектр допплеровских частот сжимается при уменьшении скорости, то величина энергии в единичном интервале ω растет как $1/\beta$. Естественно, что формула отличается от обычной, в которой излучение осциллятора относят к элементу угла Θ, а не ω. Аналогично из /13/ получаем для диполя, ориентированного перпендикулярно скорости,

$$E_\omega d\omega = \frac{P_o^2}{4c^3\beta}\omega^3\left[(1-\beta n\cos\Theta_\omega)^2 - \frac{1}{2}\sin^2\Theta(1-\beta^2n^2)\right]d\omega \qquad /18/$$

или после элементарного преобразования

$$E_\omega d\omega = \frac{P_o^2}{8c^3\beta}\omega^3\left[(1-\beta n\cos\Theta_\omega)^2 + (\cos\Theta_\omega - \beta n)^2\right]d\omega\,. \qquad /19/$$

Здесь излучение также отнесено к единице интервала частоты и времени, и Θ_ω однозначно связано с ω.

Пользуясь связью Θ с ω в формулах /9/ и /11/, можно формулы /17/ и /18/ записать так:

В случае диполя, ориентированного по скорости,

$$E_\omega = \frac{P_o^2}{4c^3\beta}\omega^3\left[1-\frac{1}{\beta^2n^2}\left(1\mp\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right], \qquad /20/$$

знак минус соответствует нормальному эффекту Допплера /9/, а знак плюс - аномальному.

Аналогично, в случае диполя, ориентированного перпендикулярно скорости, из /9/ с помощью /9/ или /11/, получаем

$$E_\omega = \frac{P_o^2}{8c^3\beta}\omega^3\left[\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)^2 + \frac{1}{\beta^2n^2}\left(\beta^2n^2 - 1 \pm \frac{\omega_o}{\omega}\right)^2\right]. \qquad /21/$$

Знак плюс соответствует нормальному эффекту Допплера, а знак минус - аномальному.

Для получения из этих формул полной энергии излучения необходимо интегрировать /20/ и /21/ по частоте в пределах, удовлетворяющих соответственно /9/ и /11/.

Приведенные здесь результаты можно сопоставить с полученными в работе В.Л.Гинзбурга и В.Я.Эйдмана 1959 г.[12]. В ней рассмотрена реакция поля на заряд, движущийся со скоростью v и совершающий по отношению к поступательному перемещению $z=vt$ небольшие колебания частоты ω_o и малой амплитуды. Такой случай эквивалентен, очевидно, излучению равномерно движущегося заряда с координатами $z=vt$ и совпадающим с ним колеблющегося диполя частоты ω_o. В этом нетрудно убедиться, если добавить в такую систему два фиктивных заряда e^+ и e^-, движущихся со скоростью v и по положению совпадающих с центром осцилляций. Поле от этого не изменится, но один из этих зарядов вместе с колеблющимся даст поле движущегося осциллятора, а второй - поле равномерно движущегося заряда. Последнему будет соответствовать излучение Вавилова-Черенкова, которое легко выделить. Суммарная работа поля, действующая на движущийся осциллятор, должна быть равна энергии излучения. Действительно, формула /22/ этой статьи, как для случая аномального, так и нормального эффекта Допплера тождественна с приведенной здесь формулой /20/. Суммарная работа сил поля при этом слагается из работы, идущей на раскачку или затухание колебаний частицы, и работы, затрачиваемой на изменение поступательного движения. Для колебаний перпендикулярно скорости частицы в работе [11] приведены обе эти компоненты - A_z /формула /28// и - $A_a^{\pm}$ /формула /30// в отдельности. Их сумма должна давать величину, приведенную здесь в формуле /21/, что действительно имеет место. Это совпадение результатов работы [1] и [12] осталось незамеченным, поскольку в [1] формулы не были приведены к предельному случаю $T \to \infty$. Авторы [12] могли поэтому констатировать согласие результатов только в частном случае отсутствия дисперсии, в котором это было непосредственно возможно для формул, приведенных в [1]. Таким образом, оба подхода и определение энергии излучения движущегося осциллятора и необходимый для квантового рассмотрения метод определения реакции поля на движение и колебания дают, как и следовало ожидать, совпадающие результаты. Более того, на несколько упрощенном примере в работе [12] было показано также, что аномальный эффект Допплера соответствует раскачке колебаний, а нормальный - их затуханию. Результаты [11], по-видимому, позволяют сделать и более общее утверждение в этом смысле. В самом деле, сопоставляя формулы /6/ и /7/ этой работы, сразу получаем, что полная энергия излучения E_ω и энергия E_0, затрачиваемая на раскачку колебаний, или, наоборот, получаемая из их затухания, должны быть связаны так:

$$E_\omega = \pm \frac{\omega}{\omega_0} E_0 . \qquad /22/$$

Рассмотрение результатов работы Гинзбурга и Эйдмана показывает, что это соотношение в самом деле выполняется и при рассмотрении реакции поля классическим методом.

Приведенные в этой статье результаты доказывают эквивалентность классического и квантового подхода с использованием формулы /1/, по крайней мере, в случае, когда излучатель движется равномерно и излучение не вносит существенных изменений в состояние его поступательного движения.

Литература

1. И.М.Франк. Известия АН СССР, сер. физ., 6, 3, 1942.
2. В.Л.Гинзбург, И.М.Франк. ДАН 56, 583, 1947.
3. В.Л.Гинзбург. ЖЭТФ, 10, 584, 1940.
4. Д.В.Скобельцын. Препринт Физического института им. П.Н.Лебедева №160, 1972.
   Д.В.Скобельцын. УФН, 110, 253, 1973.
5. Dmitry V.Skobelzyne C.R. Ac.Sc.Paris., 280, Serie B251, 1975.
6. Д.В.Скобельцын. Препринт Физического института им. П.Н.Лебедева №51, 1975.
7. O.Costa de Beauregard C.R. Ac.Sc., 274, 164, 1119, 1972. M.G.Burt and K.Peierls. Proc.Roy. Soc., A383, 149, 1973.
8. R.V.Jones and J.C.S.Richards. Proc. Roy. Soc., 221, 480, 1954.
9. M.Planck. Phys. Zs., 9, 828, 1908.
10. И.М.Франк. УФН, 30, 149, 1946.
11. И.М.Франк. Нобелевская лекция /см. напр., Нобелевские лекции. Физматгиз, 1960/.
12. В.Л.Гинзбург, В.Я.Эйдман. ЖЭТФ, 36, 1823, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел 4 марта 1976 года.