

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

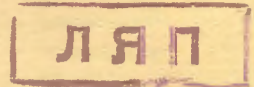


С342Г1

P4 - 9567

И-265

2204/4-76



В.К.Игнатович, Г.И.Терехов

УДЕРЖАНИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ
В ЯДЕРНЫХ ЛОВУШКАХ (теория)

1976

P4 - 9567

В.К.Игнатович, Г.И.Терехов*

**УДЕРЖАНИЕ УЛЬТРАХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ
В ЯДЕРНЫХ ЛОВУШКАХ (теория)**

* Научно-исследовательский институт атомных реакторов,
Димитровград, СССР.



Игнатович В.К., Терехов Г.И.

P4 - 9567

Удержание ультрахолодных нейтронов в ядерных ловушках

Рассмотрено влияние поля гравитации на время удержания ультрахолодных нейтронов (УХН) в замкнутых ловушках с отражающими стенками и на форму кривой интегрального спектра.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Ignatovich V.K. Terekhov G.I.

P4 - 9567

Storage of Ultracold Neutrons in Nuclear Traps

The effect of gravity on UCN storage time in closed traps and on the shape of integral spectrum curve has been considered.

The investigation has been performed at the Neutron Physics Laboratory, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1976

1. Время удержания ультрахолодных нейтронов /УХН/ в ловушках определяется числом соударений нейтронов со стенками в единицу времени и эффективным поглощением при однократном соударении. В общем случае уравнение баланса нейтронов может быть записано в следующем виде:

$$d \int_{(V) 0}^{v_{\text{Гр}}} n(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 r d^3 v = - \int_{(S) 0}^{v_{\text{Гр}}} \mu(\vec{v}) (\vec{v} \vec{n}_s) n(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$d \int_{(V) 0}^{v_{\text{Гр}}} dS \cdot dt, \quad /1/$$

где $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ - плотность УХН в единице объема и интервале скоростей $\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v}$; V - объем ловушки; S - площадь стенок ловушки; \vec{n}_s - внешняя нормаль в точке \vec{r}_s на поверхности ловушки; $\mu(\vec{v})$ - коэффициент поглощения УХН, имеющих скорость \vec{v} .

Для моноэнергетических нейтронов, распределенных однородно и изотропно в пространстве, в том случае, когда гравитационным полем можно пренебречь, имеем:

$$n(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{N_0(t)}{4\pi v_0^2 V} \delta(v - v_0), \quad /2/$$

где $N_0(t)$ - полное число частиц в ловушке в момент t .

При этом уравнение /1/ приводится к виду

$$\frac{dN_0(t)}{dt} = -\frac{Sv_0}{4V} \bar{\mu}(v_0) N_0(t), \quad /3/$$

где

$$\bar{\mu}(v) = \frac{1}{\pi} \int \mu(\vec{v}) \cos \theta d\Omega = 2\eta \frac{\kappa(y)}{y^2}, \quad /4/$$

θ - угол падения нейтрона; $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$; η - отношение мнимой части потенциала взаимодействия к действительной; $y = v/v_{гр}$; $v_{гр}$ - граничная скорость материала стенки; $\kappa(y) = \arcsin y - y\sqrt{1-y^2}$. Решением уравнения /3/ является функция

$$N_0(t) = N_0(0) e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad /5/$$

где $\tau = \frac{\bar{\ell}}{\bar{\mu}(v)v}$ - время удержания УХН; $\bar{\ell} = \frac{4V}{S}$ - средний пробег УХН между столкновениями со стенкой ловушки.

2. Большой интерес представляет исследование влияния гравитационного поля на удержание УХН в ловушках. В этом случае уравнение /1/ сохраняет свою силу, однако плотность $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ теперь не может быть однородной. Первая задача, которая здесь возникает, - это нахождение плотности УХН в моноэнергетическом случае. Ее можно решить следующим образом. Пусть ловушка представляет собой прямоугольный параллелепипед с зеркально отражающими стенками. Направим ось z вертикально вверх антипараллельно полю тяжести. Наличие поля тяжести приведет к тому, что плотность $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ окажется зависящей от z . Пусть у дна сосуда нейтроны распределены изотропно, то есть:

$$n(0, \vec{v}, t) d^3v = \frac{c(t)}{2\pi v_0 V} \delta(v^2 - v_0^2) d^3v, \quad /6/$$

где $c(t)$ - нормировочная константа. Сделанные предположения позволяют вычислить поток, направленный вверх вдоль оси z .

$$dJ_z = v_z n(0, \vec{v}) d^3v.$$

Высоты z достигнут те нейтроны, у которых $v_z^2 > 2gz$ / g - ускорение свободного падения/, так как при столкновении с боковыми стенками, вследствие зеркального отражения, компонента скорости v_z не меняется. Отсюда следует, что на высоте z поток, направленный вверх, равен, с одной стороны,

$$dJ'_z(z, \vec{v}') = v'_z n(0, \vec{v}') d^3v' \cdot \theta(v_z'^2 - 2gz), \quad /7/$$

где $\theta(x)$ - ступенчатая функция, равная 1 при $x > 0$ и 0 при $x < 0$, с другой стороны, согласно определению потока,

$$dJ'_z(z, \vec{v}') = v'_z n(z, \vec{v}') d^3v', \quad /8/$$

где \vec{v}' - скорость на высоте z . Учитывая, что

$$v_z' = \sqrt{v_z^2 - 2gz}; \quad v_x'^2 + v_y'^2 = v_x^2 + v_y^2,$$

перепишем выражение /7/ в виде

$$dJ'_z(z, \vec{v}') = v'_z n(0, \vec{v}') d^3v'. \quad /9/$$

Сравнивая /8/ и /9/, находим, что

$$n(z, \vec{v}') = n(0, \vec{v}'). \quad /10/$$

Принимая во внимание /6/, а также соотношение

$$v'^2 = v^2 - 2gz,$$

получим:

$$n(z, v) = \frac{c(t)}{2\pi v_0 V} \delta(v_0^2 - v^2 - 2gz). \quad /11/$$

В более общем случае, если распределение на высоте $z=0$ имеет вид

$$n(0, \vec{v}) = \rho_0(v^2), \quad /12/$$

то на высоте z

$$n(z, \vec{v}) = \rho_0(v^2 + 2gz). \quad /13/$$

Выражение /13/ показывает, что при изотропном распределении нейтронов у дна ловушки распределение по скоростям будет изотропно и на других высотах. Это позволяет исключить требование зеркального отражения УХН от стенок параллелепипеда, так как другие законы отражения, согласно общим законам термодинамики, не нарушают изотропного распределения. Более того, это позволяет рассматривать ловушки произвольной формы, так как форма стенок тоже не нарушает изотропного распределения.

В заключение этого пункта заметим, что выражение /13/ может быть формально получено из решения уравнения

$$\frac{dn(\vec{r}, \vec{v})}{dt} = \vec{v} \nabla n(\vec{r}, \vec{v}) - g \frac{\partial n(\vec{r}, \vec{v})}{\partial v_z} = 0,$$

исходя из условия, что $n(\vec{r}, \vec{v}) = n(z, \vec{v})$ и $n(0, \vec{v}) = \rho_0(v^2)$.

3. Рассмотрим предельный случай: поглощение моноэнергетических УХН, удерживаемых в поле тяжести плоскостью. Пользуясь выражением /11/, находим полное число частиц:

$$N(t) = \int n(\vec{r}, \vec{v}) d^3 v d^3 r = \frac{S v_0^2}{3gV} c(t),$$

где S - поверхность плоскости.

Правая часть выражения /1/ равна:

$$-\frac{1}{4} \bar{\mu}(v_0) S c(t) v_0.$$

Из уравнения баланса /1/ следует, что

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{3}{4} \frac{\bar{\mu}(v_0) g}{v_0} N(t), \quad /14/$$

то есть $N(t)$ имеет вид /5/, причем

$$\tau = \frac{4}{3} \frac{v_0}{g \bar{\mu}(v_0)}. \quad /15/$$

При $v \ll v_{гр}$ $\bar{\mu}(v)$ можно аппроксимировать величиной /1/

$$\frac{4}{3} \eta \frac{v_0}{v_{гр}} \quad \text{и, соответственно}$$

$$\tau_{max} = \frac{v_{гр}}{g \eta}. \quad /16/$$

Величина τ_{max} , определенная выражением /16/, представляет собой максимально достижимое время удержания УХН в ловушке, когда можно пренебречь поглощением при соударениях с боковыми и верхней стенками ловушки.

4. Рассмотрим случай, когда моноэнергетические УХН удерживаются в кубической ловушке. Пусть поле тяжести направлено параллельно оси z и нормально к одной из граней куба. Тогда, согласно /11/, плотность УХН можно записать в виде:

$$n(z, v) = c(t) \delta(v_0^2 - v^2 - 2gz), \quad /17/$$

где v_0 - скорость УХН у дна куба /то есть при $z=0$ /. Константа $c(t)$ определяется из условия

$$N_{v_0}(t) = c(t) \int \delta(v_0^2 - v^2 - 2gz) d^3 v d^3 r. \quad /18/$$

Здесь $N_{v_0}(t)$ - полное число УХН в ловушке в момент времени t . Выполнив интегрирование в /18/, получим:

$$c(t) = \frac{3g N_{v_0}(t)}{2\pi a^2 [v_0^3 - (v_0^2 - 2ga)^{3/2}]}, \text{ где } a - \text{ребро куба.} \quad /19/$$

Используя /17/ и /1/, можно определить поглощение УХН на нижней грани куба:

$$\gamma_1(v_0) = \pi a^2 c(t) \int \delta(v_0^2 - v^2) \bar{\mu}(v) v^3 dv = \pi \eta c(t) a^2 v_{гр}^2 \kappa(y_0), \quad /20/$$

на верхней грани:

$$\gamma_2(v_0) = \pi \eta c(t) a^2 v_{гр}^2 \kappa(y_1), \quad /21/$$

и на боковой поверхности:

$$\gamma_3(v_0) = 4\pi a c(t) \int \delta(v_0^2 - v^2 - 2gz) \bar{\mu}(v) v^3 dv dz = \frac{1}{g} 2\pi a c(t) \eta v_{гр}^4 [f_1(y_0) - f_1(y_1)], \quad /22/$$

где

$$y_0 = v_0 / v_{гр}, \quad y_1 = \sqrt{y_0^2 - \hat{a}}, \quad \hat{a} = 2ga / v_{гр}^2, \\ f_1(y) = \int \kappa(y) dy = \frac{1}{2} [(y^2 - \frac{3}{4}) \kappa(y) + \frac{1}{2} y^3 \sqrt{1-y^2}].$$

Складывая /20/, /21/ и /22/ и используя /19/, приведем соотношение /1/ к виду

$$\frac{dN_{v_0}(t)}{dt} = -\gamma_k(v_0) N_{v_0}(t), \quad /23/$$

где

$$\gamma_k(v_0) = \frac{3g\eta}{2v_{гр}^2 [y_0^3 - y_1^3]} [\kappa(y_0) + \kappa(y_1) + \frac{4v_{гр}^2}{ag} (f_1(y_0) - f_1(y_1))] - /24/$$

- вероятность поглощения УХН, имеющих скорость v_0 .

Следует отметить, что уравнения /3/ и /14/ могут быть получены из /24/ как частные случаи при $g \rightarrow 0$ и при $a \rightarrow \infty$ соответственно. Решение уравнения /23/ имеет вид:

$$N_{v_0}(t) = N_{v_0}(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

где $N_{v_0}(0)$ - полное число УХН в ловушке в момент

времени $t = 0$, $\tau = 1/\gamma_k(v_0)$ - время удержания УХН в ловушке. Для удобства введем отношение τ/τ_{\max} /см. /16//, которое показывает, насколько близко время удержания моноэнергетических УХН в кубической ловушке к максимально достижимому /рис. 1/.

Аналогично можно найти время удержания УХН в цилиндрической ловушке радиусом R и высотой H , когда поле тяжести направлено вдоль оси цилиндра. Подставляя /17/ в /1/ и проводя интегрирование по объему и поверхности цилиндра, нетрудно получить

$$\frac{dN_{v_0}(t)}{dt} = -\gamma_{ц}(v_0) N_{v_0}(t),$$

где

$$\gamma_{ц}(v_0) = \frac{3g\eta}{2v_{гр}^2 [y_0^3 - y_1^3]} [\kappa(y_0) + \kappa(y_1) + \frac{2v_{гр}^2}{gR} (f_1(y_0) - f_1(y_1))] - /25/$$

- вероятность поглощения УХН со скоростью v_0 в цилиндрической ловушке.

В /25/ первый член описывает поглощение УХН на нижнем торце, второй - на верхнем, а третий член -

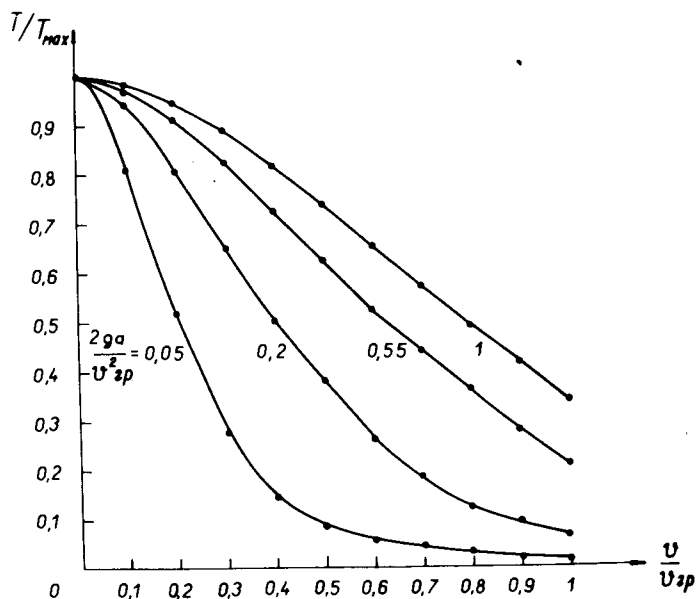


Рис. 1. Зависимость τ/τ_{\max} для кубической ловушки.

поглощение на боковой поверхности. На рис. 2 представлена зависимость τ/τ_{\max} от относительной скорости УХН и размеров цилиндра.

Несколько более сложным получается выражение для вероятности поглощения УХН в цилиндрической ловушке, когда поле тяжести направлено нормально к оси цилиндра. С помощью соотношения /17/ уравнение /1/ приводится к виду /23/. Для вероятности поглощения УХН в этом случае получим

$$\nu(v_0) = \frac{\eta v_{gp}}{2H} \frac{1}{J_3(R, y_0)} [RH J_1(R, y_0) + 2J_2(R, y_0)],$$

где

$$J_1(R, y) = \int \kappa(\sqrt{y^2 - 2gR(1 - \cos\phi)}/v_{gp}^2) d\phi$$

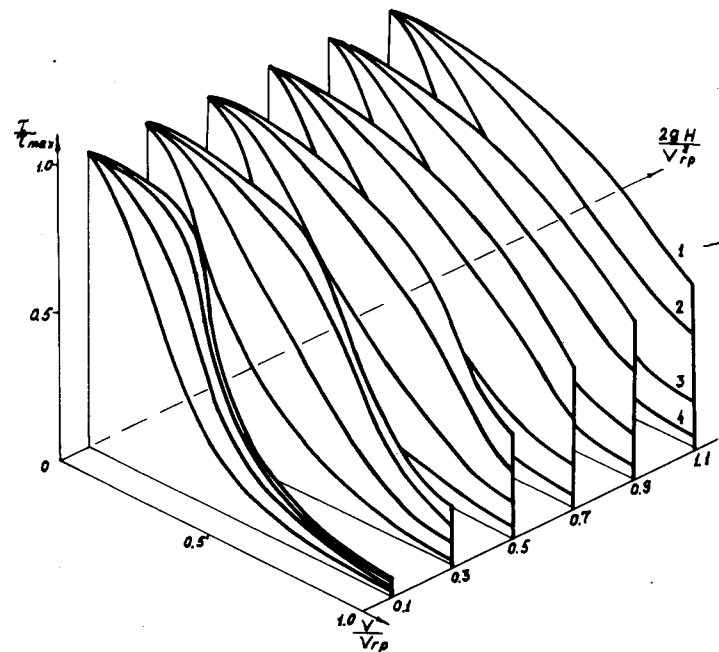


Рис. 2. Зависимость τ/τ_{\max} для цилиндрической ловушки. Поле тяжести направлено вдоль оси цилиндра.

$$\hat{R} = \frac{2gR}{v_{gp}^2} = 1) 10; 2) 0,5; 3) 0,2; 4) 0,05.$$

$$J_2(R, y) = \int \kappa(\sqrt{y^2 - 2gz}/v_{gp}^2) \sqrt{2Rz - z^2} dz.$$

$$J_3(R, y) = \int \sqrt{y^2 - 2gz}/v_{gp}^2 \sqrt{2Rz - z^2} dz.$$

На рис. 3 приведена зависимость τ/τ_{\max} от размеров цилиндра и относительной скорости УХН.

5. Интегральный спектрометр /1/, как известно, имеет конструкцию, изображенную на рис. 4. Колено его может вращаться вокруг оси OO' . Принцип действия спектрометра основан на том, что при подъеме колена на высоту z в рукав 2 могут попасть нейтроны со скоростями $v^2 > 2gz$. Представим себе, что рукав 2 имеет

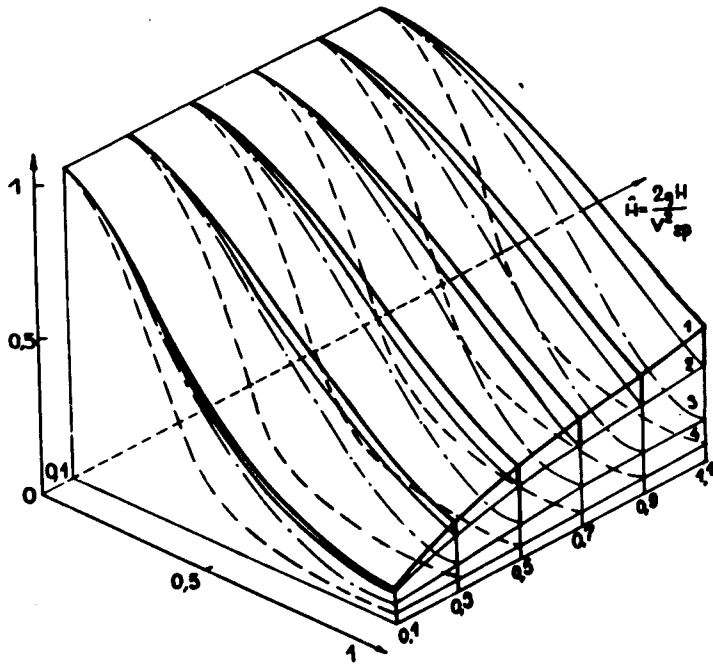


Рис. 3. Зависимость τ/τ_{\max} для цилиндрической ловушки. Поле тяжести направлено нормально к оси цилиндра.

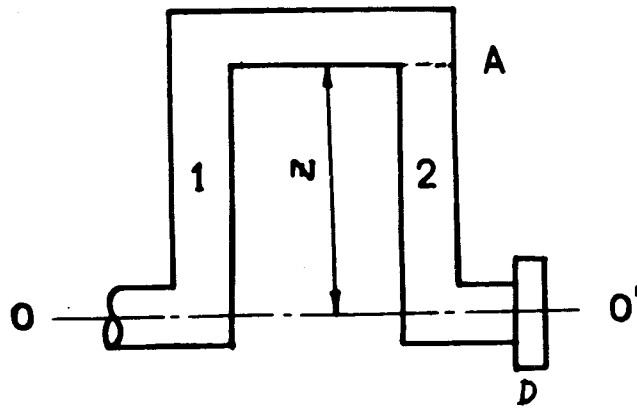


Рис. 4. Интегральный спектрометр УХН.

абсолютно зеркальные стенки. Тогда поток на детекторе D должен равняться потоку в сечении A/проточный вариант/.

Пусть спектр УХН $\rho_0(v^2)$, соответствующий /13/, имеет вид

$$\rho_0(v^2) = \frac{c}{4\pi} \theta(v_{\text{гр}}^2 - v^2) \theta(v^2 - v_0^2). \quad /26/$$

Тогда поток в сечении A будет равен

$$J_A = \frac{c}{4\pi} \int \theta(v_{\text{гр}}^2 - v^2 - 2gz) \theta(v^2 + 2gz - v_0^2) \theta(v^2) v_z d^3v =$$

$$\frac{c}{16} (v_{\text{гр}}^4 - v_0^4 - 4g(v_{\text{гр}}^2 - v_0^2)z); \quad \text{при } 0 < z < \frac{v_0^2}{2g};$$

$$\frac{c}{16} (v_{\text{гр}}^4 - 4gv_{\text{гр}}^2z + 4g^2z^2), \quad \text{при } \frac{v_0^2}{2g} < z < \frac{v_{\text{гр}}^2}{2g},$$

$$0 \quad \text{при } z > \frac{v_{\text{гр}}^2}{2g}. \quad /27/$$

При этом зависимость счета на детекторе, от высоты подъема колена имеет вид, изображенный на рис. 5, в то время как экспериментальная кривая имеет вид, изображенный на рис. 6. Этот факт может объясняться тем, что поток на детекторе создается не потоком в сечении A, а установившимся распределением плотности УХН в рукаве 2, то есть отток частиц в детектор оказывается более медленным, чем скорость наполнения рукава 2. В этом случае плотность УХН в рукаве 2 у детектора будет иметь вид

$$\rho_0(v^2) = \frac{c}{4\pi} \theta(v_{\text{гр}}^2 - v^2) \theta(v^2 - v_0^2) \theta(v^2 - 2gz), \quad /28/$$

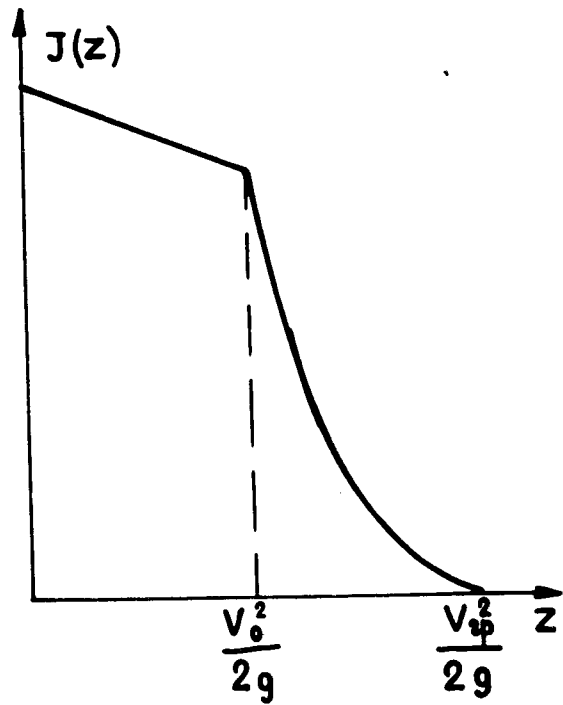


Рис. 5. Интегральный поток. Проточный вариант.

и поток на детектор будет равен

$$J_D = \frac{c}{4\pi} \int \theta(v_{гр}^2 - v^2) \theta(v^2 - v_0^2) \theta(v^2 - 2gz) v_z d^2v =$$

$$\frac{c}{16} (v_{гр}^4 - v_0^4) \quad \text{при} \quad 0 < z < \frac{v_0^2}{2g};$$

$$\frac{c}{16} (v_{гр}^4 - 2g^2 z^2) \quad \text{при} \quad \frac{v_0^2}{2g} < z < \frac{v_{гр}^2}{2g};$$

$$0, \quad \text{при} \quad z > \frac{v_{гр}^2}{2g}.$$

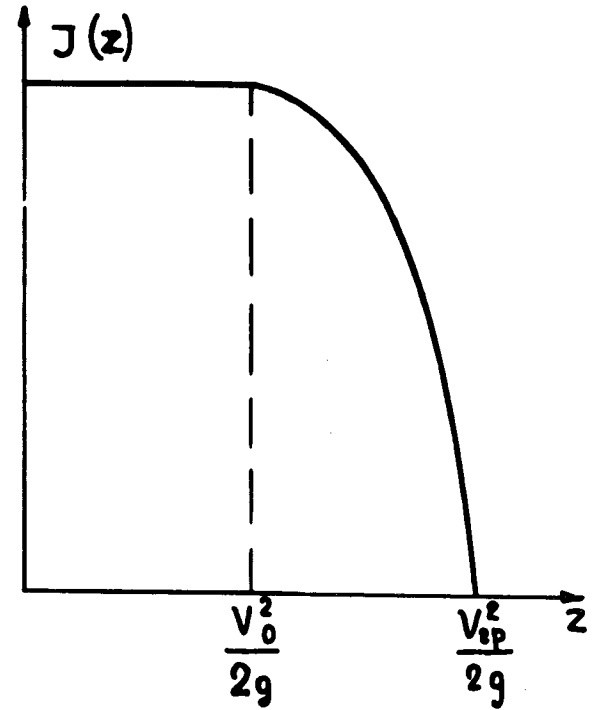


Рис. 6. Интегральный поток. Накопительный вариант.

Авторы искренне благодарны В.И. Морозову, Ю.А. Кушнiru, В.И. Луцикову и А.В. Стрелкову за полезные обсуждения и интерес к работе.

Литература

1. Ф.Л. Шапиро. Препринт ОИЯИ, РЗ-7135, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1976 года.