ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 9547

Д.Янссен

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

1976

P4 - 9547

Д.Янссен

КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

Направлено в ЯФ

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Когерентные состояния гармонического осциллятора, их свойства и применение

Для многих задач квантовой механики многих тел оказалось очень удобным работать в базисе состояний, которые хотя и не ортогональны и линейно зависимы, но обладают тем свойством, что минимизируют произведения неопределенностей специфических для этой задачи канонически сопряженных операторов. Рассмотрим в качестве простейшего примера гармонический осциллятор

$$H = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}x^2 \ ; \quad \hat{p} = -i\frac{d}{dx} \quad (\hbar \equiv 1) \qquad /1а/$$

$$[\hat{p}, x] = -i \ . \qquad /1б/$$

Дискретный спектр этого гамильтониана и квантовомеханические свойства осциллятора связаны с некоммутативностью операторов импульса $\hat{p}$ и координаты x . Соответствующее произведение неопределенностей имеет следующий вид:

$$\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle\langle(\Delta x)^2\rangle \geqq \frac{1}{4}, \qquad /2/$$

где

$$\Delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle \ ; \quad \langle(\Delta\hat{A})^2\rangle = \langle\Psi|(\Delta\hat{A})^2|\Psi\rangle$$

и Ψ - произвольная волновая функция. Левую часть /2/ минимизирует следующая волновая функция, построенная из собственных функций гамильтониана /1/:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{\alpha b^+} |0\rangle$$

$$(b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - i\hat{p})). \qquad /3/$$

Здесь $|n\rangle$ - собственная нормированная функция гармонического осциллятора и α - произвольное комплексное число. Такой набор когерентных состояний /3/ является переполненным и неортогональным. Он впервые был найден Шредингером[/1/] и нашел широкое применение при квантовомеханическом описании когерентных источников света[/2/], а также использовался при исследовании сверхпроводимости, сверхтекучести[/3/] и фононов в кристаллах[/4/]. Отметим еще одно важное свойство когерентных состояний /3/. Если мы напишем уравнения движения в представлении Гейзенберга и усредним их в базисе когерентных состояний, то получим с помощью /1/, /3/

$$i\frac{d}{dt}\langle\alpha|x|\alpha\rangle = \langle\alpha|[x,H]|\alpha\rangle = i\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle$$

$$i\frac{d}{dt}\langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = \langle\alpha|[\hat{p},H]|\alpha\rangle = -i\langle\alpha|x|\alpha\rangle$$

$$\langle\alpha|x|\alpha\rangle = A_0\sin(t-t_0);\ \langle\alpha|\hat{p}|\alpha\rangle = A_0\cos(t-t_0), \qquad /4/$$

т.е. средние значения операторов импульса и координаты изменяются во времени как соответствующие классические величины.

1.2. *Понятия когерентных состояний, обобщенные Переломовым, и когерентные спиновые состояния*

После успешного применения когерентных состояний типа /3/ были сделаны многочисленные попытки обобщить понятия "когерентных состояний" на случай более сложных, чем /1/, коммутационных соотношений, т.е. на случай более сложной алгебры. В этой работе мы будем использовать только результаты Переломова[/5/]. Пусть G - произвольная группа Ли и T - ее неприводимое унитарное представление, действующее в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Если $|\Psi_0\rangle$ - определенный элемент этого пространства, то все элементы h группы G, удовлетворяющие уравнению

$$T(h)|\Psi_0\rangle = e^{i\lambda(h)}|\Psi_0\rangle,$$

образуют стационарную подгруппу H группы G относительно $|\Psi_0\rangle$. Если мы обозначим $|\Psi_{g(x)}\rangle = T(g(x))|\Psi_0\rangle$, где $g(x)$ - один из представителей всех элементов группы G, для которых векторы $|\Psi_g\rangle = T(g)|\Psi_0\rangle$ отличаются друг от друга только фазовым фактором, то Переломов называет $|\Psi_{g(x)}\rangle$ набором когерентных состояний этой группы. Это определение содержит, как частный случай, когерентные состояния /3/ гармонического осциллятора. В случае простой компактной группы $SU(2)$, выбирая в качестве $|\Psi_0\rangle$ состояние с минимальной проекцией спина на z-оси, мы получаем

$$|\alpha\rangle = \sum_M \sqrt{\frac{(2S)!}{(S-M)!(S+M)!}}\,\alpha^{S+M}\,|SM\rangle(1+|\alpha|^2)^{-S} =$$

$$= (1+|\alpha|^2)^{-S}\exp(\alpha\hat{S}_+)|S-S\rangle. \qquad /5/$$

Здесь $\hat{S}_+ = \hat{S}_x + i\hat{S}_y$, $\hat{S}_x, \hat{S}_y, \hat{S}_z$ - генераторы $SU(2)$, S - полный спин рассмотренной системы. Эти состояния, названные когерентными спиновыми состояниями, были впервые найдены Радклиффом[/6/] и использовались в работах[/7/].

Легко показать, что в случае $|\alpha| \ll S$ $\hat{S}_+$ можно заменить оператором b^+, и выражения /5/ и /3/ совпадут. Хотя определение Переломовым когерентных состояний в случае гармонического осциллятора и в случае группы SU(2) оказалось полезным, оно не позволяет построить однозначным образом набор когерентных состояний в случае несимметричного волчка.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ КВАНТОВОМЕХАНИЧЕСКОГО НЕСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА

2.1. Представление когерентных состояний

Гамильтониан несимметричного волчка имеет следующий вид:

$$H = A_x L_x^2 + A_y L_y^2 + A_z L_z^2 \quad (A_x \neq A_y \neq A_z) \qquad /6/$$

и коммутирует с квадратом оператора полного углового момента $\hat{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = J^2$ и с операторами J_x, J_y и J_z. Здесь $L_i (i = x, y, z)$ - проекции оператора углового момента на оси внутренней системы координат, а J_i - проекции того же оператора на оси лабораторной системы координат. Поэтому волновую функцию гамильтониана /6/ можно записать следующим образом:

$$\Psi_\alpha^{IM} = \sum_K C_K^{I\alpha} \, |IMK>, \qquad /7/$$

где $|IMK>$ - собственные состояния операторов $\hat{L}^2$, L_z и J_z с собственными значениями $I(I+1)$, K и M. Совокупность состояний $|IMK>$ образует неприводимое представление полупрямого произведения группы $SU(2) \times SU(2)$ и абелевой группы. Операторы L_i, J_i и $T^{1/2}_{\mu\nu} (\mu, \nu = \pm\frac{1}{2})$ являются генераторами этого произведения и выполняют следующие коммутационные соотношения

$$[L_i, L_k] = i\epsilon_{ik\ell} L_\ell, \quad [J_i, J_k] = i\epsilon_{ik\ell} J_\ell \quad [L_i, J_\ell] = 0$$

$$[T^{1/2}_{\mu\nu}, T^{1/2}_{\mu'\nu'}] = 0, \; [L_z, T^{1/2}_{\mu\nu}] = \nu T^{1/2}_{\mu\nu}, \; [L_\pm, T^{1/2}_{\mu\nu}] = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \nu\right)\left(\frac{3}{2} \pm \nu\right)} \; T^{1/2}_{\mu\nu\pm1/2} \qquad /8/$$

$$[J_z, T^{1/2}_{\mu\nu}] = \mu T^{1/2}_{\mu\nu}, \quad [J_\pm, T^{1/2}_{\mu\nu}] = \sqrt{\left(\frac{1}{2} \mp \mu\right)\left(\frac{3}{2} \pm \mu\right)} \, T^{1/2}_{\mu\pm1/2,\nu},$$

$$L_\pm = L_x \pm i L_y, \quad J_\pm = J_x \pm i J_y. \qquad /9/$$

Поскольку собственные состояния /7/ гамильтониана /6/ определены с помощью трех квантовых чисел, то каждый элемент набора когерентных состояний должен быть обозначен тремя комплексными числами, скажем x, y и z. Если мы предполагаем, что когерентные состояния волчка для $x = z = 0$ состоят из состояний $|I-I-I>$, аналогично тому, как когерентные состояния гармонического осциллятора - из состояний $|n>$, то получаем:

$$|x=0, y, z=0> = \sum_{I=0,\frac{1}{2},1} \frac{1}{\sqrt{(2I)!}} \, y^{2I} \, |I-I-I> e^{-\frac{1}{2}|y|^2}. \qquad /10/$$

Вспоминая, что в случае SU(2) когерентные состояния можно получить, действуя с оператором $e^{\alpha S_+}$ на состояния с минимальной проекцией спина, мы определяем когерентные состояния волчка следующим образом:

$$|xyz> = \exp\left(-\frac{1}{2} yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)\right) e^{xJ_+} e^{zL_+} \times$$

$$\times \sum_I \frac{y^{2I}}{\sqrt{(2I)!}} \, |I-I-I>$$

$$|xyz> = \exp\left(-\frac{1}{2} yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)\right) e^{xJ_+} e^{zL_+} \times$$

$$\times e^{y\sqrt{2\hat{I}+1}\, T^{1/2}_{-1/2\,-1/2}}\, |000> \qquad /11/$$

$$|xyz> = \exp\left(-\frac{1}{2}\, yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)\right) \times$$

$$\times \sum_{IMK} \sqrt{\frac{(2I)!}{(I+M)!\,(I-M)!\,(I+K)!\,(I-K)!}}\; x^{I+M}\, y^{2I}\, z^{I+K}\, |IMK>,$$

где оператор $\hat{I}$ определен уравнением

$$\hat{I}\,|IMK> = I\,|IMK>. \qquad 12/$$

Для интеграла перекрытия двух когерентных состояний получаем

$$<xyz|x'y'z'> = \exp\{y^*y'(1+x^*x')(1+z^*z') - \frac{1}{2}yy^*(1+xx^*)\times$$

$$\times(1+zz^*) - \frac{1}{2}y'y'^*(1+xx'^*)(1+z'z'^*)\}. \quad /13/$$

Используя равенство

$$\frac{1}{\pi^3}\int dx\, dz \int dy\, [x^m x^{*m'} y^n y^{*n'} z^{\ell} z^{*\ell'} \exp\{-yy^*(1+xx^*)\times$$

$$\times(1+zz^*)\}\times yy^*\times(yy^*\times(1+xx^*)(1+zz^*)-1)] =$$

$$= \delta_{mm'}\delta_{nn'}\delta_{\ell\ell'}\, \frac{m!\,\ell!\,(n-m)!\,(n-\ell)!}{n!} \qquad /14/$$

$$dx \equiv d\mathrm{Re}(x)\, d\mathrm{Im}(x),\quad dy \equiv d\mathrm{Re}(y)\, d\mathrm{Im}(y),\quad dz \equiv d\mathrm{Re}(z)\, d\mathrm{Im}(z),$$

единичный оператор можем написать следующим образом:

$$\hat{E} = \sum_{IMK} |IMK><IMK| = \int dx\, dz \int dy\, \frac{1}{\pi^3}\, yy^*(yy^*(1+xx^*)(1+zz^*) -$$

$$-1)\times|xyz><xyz|. \qquad /15/$$

Базисные состояния $|IMK>$ можно разлагать в ряд по когерентным состояниям

$$|IMK> = \frac{1}{\pi^3}\int dx\, dz \int dy \exp\{-\frac{1}{2}yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)\}\times$$

$$\times yy^*(yy^*(1+xx^*)\times(1+zz^*)-1)\, x^{*I+M}\, y^{*2I}\, z^{*I+K}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2I)!}{(I-M)!\,(I+M)!\,(I-K)!\,(I+K)!}}\,|xyz>. \qquad /16/$$

Уравнения /15/ и /16/ доказывают, что когерентные состояния $|xyz>$ представляют собой полный набор состояний, эквивалентный набору $|IMK>$.

В заключение этого раздела мы приведём формулы для средних значений операторов /8/, /9/, /12/ в базисе когерентных состояний. Эти выражения легко проверяемы и потребуются нам в дальнейшем

$$<xyz|L_x|xyz> = \frac{z+z^*}{1+zz^*}<xyz|\hat{I}|xyz>;$$

$$<xyz|L_x^2|xyz> = <xyz|L_x|xyz>^2 + \frac{1}{2}<xyz|\hat{I}|xyz>$$

$$<xyz|L_y|xyz> = \frac{i(z-z^*)}{1+zz^*}<xyz|\hat{I}|xyz>;$$

$$<xyz|L_y^2|xyz> = <xyz|L_y|xyz>^2 + \frac{1}{2}<xyz|\hat{I}|xyz>$$

$$<xyz|L_z|xyz> = \frac{zz^*-1}{1+zz^*}<xyz|\hat{I}|xyz>;$$

$$<xyz|L_z^2|xyz> = <xyz|L_z|xyz>^2 + \frac{1}{2}<xyz|\hat{I}|xyz> \qquad /17/$$

$$<xyz|L_i L_k|xyz> + <xyz|L_k L_i|xyz> =$$

$$= 2<xyz|L_i|xyz><xyz|L_k|xyz> \quad (i \neq k = x, y, z)$$

$$<xyz|\hat{I}|xyz> = \frac{1}{2} yy^*(1+xx^*)(1+zz^*). \qquad /18/$$

Аналогичные выражения для операторов J_x, J_y, J_z можно получить, заменяя в /17/, /18/ z на x. Для оператора $T^{1/2}_{\mu\nu}$ получаем:

$$<xyz|T^{1/2}_{1/2\,1/2}|xyz> = (y + y^*x^*z^*) \sum_I \frac{(yy^*(1+xx^*)(1+zz^*))^{2I}}{(2I)!\sqrt{2I+2}} \times$$

$$\times \exp\{-yy^*(1+xx^*) \times (1+zz^*)\}$$

$$<xyz|T^{1/2}_{1/2\,-1/2}|xyz> = (x^*y^* - zy) \sum_I \frac{(yy^*(1+xx^*)(1+zz^*))^{2I}}{(2I)!\sqrt{2I+2}} \times$$

$$\times \exp\{-yy^*(1+xx^*) \times (1+zz^*)\} \qquad /19/$$

$$<xyz|T^{1/2}_{-1/2\,-1/2}|xyz> = <xyz|T^{1/2}_{1/2\,1/2}|xyz>^*;$$

$$<xyz|T^{1/2}_{-1/2\,1/2}|xyz> = <xyz|T^{1/2}_{1/2\,-1/2}|xyz>^*.$$

2.2. *Интерпретация параметров когерентных состояний*

Вводя угловые переменные α, β, γ, θ, ϕ и радиальную переменную r

$$x = -e^{-i\alpha}\tan\frac{\beta}{2}, \quad z = -e^{-i\phi}\tan\frac{\theta}{2},$$

$$y = \sqrt{2r}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\, e^{\frac{i}{2}(\alpha+\gamma+\phi)}, \qquad /20/$$

мы можем записать когерентное состояние /11/ следующим образом:

$$|xyz> = |\alpha\beta\gamma\theta\phi r> = \hat{R}_J(\alpha,\beta,\gamma)\hat{R}_L(\phi,\theta,0)e^{-r} \times$$

$$\times \sum_I \frac{(2r)^I}{\sqrt{(2I)!}}|I-I-I> =$$

$$= \sum_{IMK} D^I_{M-I}(\alpha\beta\gamma) D^I_{K-I}(\phi,\theta,0) \frac{(2r)^I}{\sqrt{(2I)!}}|I-MK> e^{-r},$$

где $\hat{R}_J(\alpha,\beta,\gamma) = e^{-i\alpha\hat{J}_z} e^{-i\beta\hat{J}_y} e^{-i\gamma\hat{J}_z}$; D^I_{MK} D - функция Вигнера. Из /17/, /18/, /20/ следует ($|xyz> \equiv |\alpha\beta\gamma\theta\phi r> \equiv |$ког$>$)

$$< \text{ког.}\,|\,L_x\,|\,\text{ког.}> = -r\cos\phi\cos\theta,$$

$$< \text{ког.}\,|\,J_x\,|\,\text{ког.}> = -r\cos\alpha\sin\beta$$

$$< \text{ког.}\,|\,L_y\,|\,\text{ког.}> = -r\sin\phi\sin\theta,$$

$$< \text{ког.}\,|\,J_y\,|\,\text{ког.}> = -r\sin\alpha\sin\beta \qquad /21/$$

$$< \text{ког.}\,|\,L_z\,|\,\text{ког.}> = -r\cos\theta, \quad <\text{ког.}|\,J_z\,|\,\text{ког.}> = -r\cos\beta$$

$$< \text{ког.}\,|\,\hat{I}\,|\,\text{ког.}> = r, \; <\text{ког.}\,|\,L_x^2+L_y^2+L_z^2\,|\text{ког.}> =$$

$$= < \text{ког.}\,|\,J_x^2+J_y^2+J_z^2\,|\,\text{ког.}> = r\,(r+\frac{3}{2}).$$

Видно, что параметр r - это среднее значение оператора углового момента в базисе когерентных состояний, т.е. абсолютная величина вектора $\vec{J}$. Углы ϕ и θ определяют направление этого вектора во внутренней, углы α и β - в лабораторной системе координат. Они также определяют положение внутренней системы координат относительно лабораторной системы с точностью до поворота вокруг оси вектора углового момента. Чтобы однозначно фиксировать положение внутренней системы координат, нужен еще один угол γ, который содержится в комплексном числе y. Для среднего значения операторов $T^{1/2}_{\mu\nu}$ из /19/, /2О/ следует:

$$< \text{ког.}\,|\,T^{1/2}_{\mu\nu}\,|\,\text{ког.}> = D^{1/2}_{\mu\nu}(\alpha'',\beta'',\gamma'')\sqrt{2r}\,e^{-2r}\sum_I \frac{(2r)^{2I}}{(2I)!\sqrt{2I+2}}$$

$$D^{1/2}_{\mu\nu}(\alpha'',\beta'',\gamma'') = \sum_\rho D^{1/2}_{\mu\rho}(-\alpha,\beta,-\gamma)D^{1/2}_{\rho\nu}(0,-\theta,-\phi) \qquad /22/$$

и для интеграла перекрытия двух когерентных состояний мы получаем:

$$<\alpha\beta\gamma\theta\phi r\,|\,\alpha'\beta'\gamma'\theta'\phi'r'> = \exp\{2\sqrt{rr'}\,(\cos\frac{\bar{\beta}}{2}\cos\frac{\bar{\theta}}{2}\times$$

$$\times e^{\frac{i}{2}(\bar{\alpha}+\bar{\gamma}+\bar{\phi})} - 1)\}, \qquad /23/$$

причем $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$, $\bar{\gamma}$, $\bar{\phi}$, $\bar{\theta}$ определены с помощью следующего уравнения:

$$\hat{R}_J(\bar{\alpha},\bar{\beta},\bar{\gamma}) = \hat{R}_J(-\gamma,-\beta,-\alpha)\hat{R}_J(\alpha',\beta',\gamma')$$

$$\hat{R}_L(\bar{\phi},\bar{\theta},0) = \hat{R}_L(0,-\theta,-\phi)\hat{R}_L(\phi',\theta',0). \qquad /24/$$

2.3. Бозонное представление операторов в базисе когерентных состояний

Бозонное представление операторов $T^{1/2}_{\mu\nu}$, J_i, L_i рассматривалось подробно в работе /8/. Здесь мы получим представление для этих операторов в базисе когетентных состояний /11/ с помощью дифференциальных операторов d/dx, d/dy и d/dz. Это представление отличается от представления /8/ тем, что в /8/ рассматривалось пространство состояний, отличных от $|\,xyz>$. Используя /8/, /16/, мы получаем, например, для оператора J_z

$$J_z\,|\,IMK> = M\,|\,IMK>$$

$$= \int dx\,dz \int dy\,y\,y^*(yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)-1)\times$$

$$\times(x^*\frac{d}{dx^*} - \frac{1}{2}y^*\frac{d}{dy^*}) \times x^{*\,I+M}\,y^{*\,2I}\,z^{*\,I+K}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{(2I)!}{(I-M)!\,(I+M)!\,(I-K)!\,(I+K)!}}\,|\,xyz>\times$$

$$\times\exp(-\frac{1}{2}yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)). \qquad /25/$$

Из /11/, /14/, /25/ следует:

$$J_z|IMK> = \int dx\, dz \int dy\, yy^*(yy^*(1+xx^*)(1+zz^*)-1) \times$$

$$\times x^{*\,I+M}\, y^{*2I}\, z^{*\,I+K} \sqrt{\frac{(2I)!}{(I-M)!(I+M)!(I-K)!(I+K)!}} \times$$

$$\times \exp(-\frac{1}{2}yy^*(1+xx^*)(1+yy^*))(x\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}y\frac{d}{dy})|xyz>, \qquad /26/$$

т.е. в базисе когерентных состояний $|xyz>$ J_z действует как оператор $x\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}y\frac{d}{dy}$. Аналогичным образом для операторов J_i, L_i, $\hat{I}$ и $T^{1/2}_{\mu\nu}$ мы получаем: $\hat{I}=y\frac{d}{dy}$

$$L_z = z\frac{d}{dz}-\frac{1}{2}\hat{I}; \quad L_+ = \frac{d}{dz}, \quad L_- = z(\hat{I}-z\frac{d}{dz})$$

$$J_z = x\frac{d}{dx}-\frac{1}{2}\hat{I}; \quad J_+ = \frac{d}{dx}; \quad L_+ = x(\hat{I}-x\frac{d}{dx})$$

$$T^{1/2}_{1/2\,1/2} = y\frac{1}{\sqrt{2+\hat{I}}} + \frac{1}{(1+\hat{I})^2\sqrt{1+\hat{I}}}\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\frac{d}{dz} \qquad /27/$$

$$T^{1/2}_{-1/2\,-1/2} = xyz\frac{1}{\sqrt{2+\hat{I}}} + \frac{1}{(1+\hat{I})^2\sqrt{1+\hat{I}}}xz\frac{d}{dx}\frac{d}{dy}\frac{d}{dz} -$$

$$-\frac{1}{(1+\hat{I})\sqrt{2+\hat{I}}}(z\frac{d}{dz}+x\frac{d}{dx})\frac{d}{dy} + \frac{1}{\sqrt{2+\hat{I}}}\frac{d}{dy}$$

$$T^{1/2}_{1/2\,-1/2} = zy\frac{1}{\sqrt{2+\hat{I}}} + \frac{z}{(1+\hat{I})^2\sqrt{2+\hat{I}}}\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\frac{d}{dz} - \qquad /28/$$

$$-\frac{1}{(1+\hat{I})\sqrt{2+\hat{I}}}\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}$$

$$T^{1/2}_{-1/2\,1/2} = xy\frac{1}{\sqrt{2+\hat{I}}} + \frac{x}{(1+\hat{I})^2\sqrt{2+\hat{I}}}\frac{d}{dy}\frac{d}{dx}\frac{d}{dz} -$$

$$-\frac{1}{(1+\hat{I})\sqrt{2+\hat{I}}}\frac{d}{dy}\frac{d}{dz}.$$

Здесь $J_\pm = J_x \pm iJ_y$, $L_\pm = L_x \pm iL_y$. Можно показать, что операторы /27/, /28/ удовлетворяют коммутационным отношениям /8/, /9/ и в пространстве состояний $|xyz>$ с единичным оператором /15/ имеет место следующее равенство:

$$(J_+)^+ = J_-, \quad (L_+)^+ = L_-, \quad J_z^+ = J_z, \quad L_z^+ = L_z$$

$$T^{+}_{1/2\,1/2} = T^{1/2}_{-1/2\,-1/2}, \quad (T^{1/2}_{1/2\,-1/2})^+ = -T_{-1/2\,1/2}. \qquad /29/$$

Уравнение /27/ представляет собой обобщение бозонного представления Дайсона [9] для полупрямого произведения группы $SU(2)\times SU(2)$ и абелевой группы. Если мы введем вместо z новую переменную $\bar{z}=z\cdot y$, то с помощью /27/ получаем

$$L_z = \frac{1}{2}(\bar{z}\frac{d}{d\bar{z}}-y\frac{d}{dy}), \quad L_+ = y\frac{d}{d\bar{z}}, \quad L_- = \bar{z}\frac{d}{dy}., \qquad /30/$$

а заменяя $\bar{z}\to b^+$, $\frac{d}{d\bar{z}}\to b$, $y\to a^+$, $\frac{d}{dy}\to a$, мы убедимся, что /30/ совпадает с бозонным представлением Швингера [10] для оператора углового момента.

3. *ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ ВОЛЧКА*

3.1. Произведение неопределенностей

Поскольку найденный нами набор состояний $|xyz\rangle$ является набором когерентных состояний гамильтониана /6/, этот набор должен минимизировать произведение неопределенностей тех операторов, коммутативность которых однозначно определяет дискретный спектр гамильтониана волчка /6/. В этой задаче некоммутативность разных компонент оператора углового момента L_i играет ту же роль, что и некоммутативность операторов координаты и импульса в случае гармонического осциллятора. Определим оператор $\Delta L_i = L_i - \langle \text{ког}|L_i|\text{ког}\rangle$. С помощью неравенства Шварца для произведения неопределенностей в значении разных компонент оператора углового момента получаем

$$\langle \text{ког.}\,|(\Delta L_i)^2|\,\text{ког.}\rangle\cdot\langle \text{ког.}\,|(\Delta L_k)^2|\,\text{ког.}\rangle \geq$$

$$\geq |\langle \text{ког.}\,|\Delta L_i\,\Delta L_k\,|\text{ког.}\rangle|^2. \qquad /31/$$

Легко увидеть, что

$$|\langle \text{ког.}|\Delta L_i\ \Delta L_k|\ \text{ког.}\rangle|^2 = \frac{1}{4}\,|\langle \text{ког.}|[L_i, L_k]|\text{ког}\rangle|^2 +$$

$$+\frac{1}{4}\,|\,\frac{1}{2}\langle \text{ког.}\,|L_i\ L_k|\ \text{ког.}\rangle + \frac{1}{2}\langle \text{ког.}|L_k\ L_i\,|\text{ког.}\rangle -$$

$$-\langle \text{ког.}\,|L_i|\ \text{ког.}\rangle\langle \text{ког.}|L_k\ |\text{ког.}\rangle|^2. \qquad /32/$$

Используя свойства /18/ когерентных состояний, из /31/, /32/ получаем:

$$\frac{\langle \text{ког.}\,|(\Delta L_i)^2|\text{ког.}\rangle\langle \text{ког.}\,|(\Delta L_k)^2|\text{ког.}\rangle}{|\langle \text{ког.}\,|\,L_\ell\,|\,\text{ког.}\rangle|^2} \geq \frac{1}{4}$$

$$(i \neq k \neq \ell). \qquad /33/$$

Если мы используем конкретные выражения /17/ для средних значений операторов L_i и L_i^2, то для случая, когда

$$\langle \text{ког.}|\,L_i\,|\,\text{ког.}\rangle = \langle \text{ког.}\,|\,L_k\,|\text{ког.}\rangle = 0$$

$$\langle \text{ког.}\,|\,L_\ell\,|\,\text{ког.}\rangle = \langle \text{ког.}\,|\,\hat{I}\,|\ \text{ког.}\rangle,$$

из /33/ следует

$$\frac{\langle \text{ког.}\,|(\Delta L_i)^2|\,\text{ког.}\rangle\langle\text{ког.}\,|(\Delta L_k)^2|\text{ког.}\rangle}{|\langle \text{ког.}\,|\,L_\ell\,|\,\text{ког.}\rangle|^2} = \frac{1}{4}. \qquad /34/$$

В общем случае можно показать, что состояние $|xyz\rangle$ минимизирует произведение /31/ для всех компонент вектора углового момента $\vec{L}$, находящихся в плоскости, перпендикулярной к направлению вектора $\langle xyz|\vec{L}\,|\,xyz\rangle$. Это значит, что найденный нами набор когерентных состояний минимизирует флуктуации направления вектора углового момента. Интересно отметить, что для $\langle\text{ког}|(\Delta\hat{I})^2\,|\text{ког}\rangle$ мы получаем

$$\langle\text{ког}\ |(\Delta\hat{I})^2|\text{ког}\rangle = \langle\text{ког}\ |\hat{I}|\text{ког}\rangle.$$

Этот результат аналогичен результату для гармонического осциллятора, где

$$\langle \alpha | (\Delta \hat{N})^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | \hat{N} | \alpha \rangle$$

и $\hat{N}$ - оператор числа фононов.

3.2. *Переход к уравнению Эйлера для несимметричного волчка*

В представлении Гейзенберга уравнение движения для операторов L_i и гамильтониана волчка /6/ имеет следующий вид:

$$\dot{L}_i = i\,[H, L_i]$$

$$\dot{L}_i = \sum_{k\ell} (L_\ell L_k + L_k L_\ell)\, \epsilon_{ik\ell} A_k . \qquad /35/$$

Усредняя это уравнение по когерентному состоянию и используя свойство /18/, получаем:

$$\langle \text{ког.} | \dot{L}_i | \text{ког.} \rangle = 2 \sum_{\ell k} \langle \text{ког.} | L_\ell | \text{ког.} \rangle \times$$

$$\times \langle \text{ког.} | L_k | \text{ког.} \rangle\, \epsilon_{ik\ell} A_k . \qquad /36/$$

После определения $\langle \text{ког} | L_i | \text{ког} \rangle = \dfrac{\omega_i}{2A_i}$ уравнение /36/

можно представить следующим образом:

$$\dot{\omega}_x = A_x \omega_y \omega_z \left(\frac{1}{A_y} - \frac{1}{A_z} \right)$$

$$\dot{\omega}_y = A_y \omega_x \omega_z \left(\frac{1}{A_x} - \frac{1}{A_y} \right) \qquad /37/$$

$$\dot{\omega}_z = A_z \omega_x \omega_y \left(\frac{1}{A_x} - \frac{1}{A_y} \right).$$

Это как раз уравнение Эйлера для волчка в классической механике.

4. *ПРИМЕНЕНИЕ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ*

4.1. *Энергия и вероятности переходов в неаксиальном ротаторе*

Поскольку, как показано в разделе 3, когерентные состояния близки по своим свойствам к классическим, можно считать, что состояние $\Psi_{IM} = P^{IM} | xyz \rangle$ является хорошим приближением для волновой функции гамильтониана /6/ при $I \gg 2$. Здесь $P^{IM} = \int d\Omega\, \hat{R}_J(\Omega) \sum_K D^{*I}_{MK}(\Omega)$ - оператор проектирования на состояние с полным угловым моментом I. Можно показать, что благодаря проектированию на состояние с определенным значением углового момента и инвариантности гамильтониана /6/ относительно вращения среднее значение гамильтониана зависит только от z.

$$E_I(z) = \frac{\langle \Psi_{IM} | \sum_i A_i L_i^2 | \Psi_{IM} \rangle}{\langle \Psi_{IM} | \Psi_{IM} \rangle}$$

$$= \frac{1}{2} A_x (I(2I-1)\cos^2\phi \sin^2\theta + I) +$$

$$+ \frac{1}{2} A_y (I(2I-1)\sin^2\phi \sin^2\theta + I) + \frac{1}{2} A_z (I(2I-1)\cos^2\theta + I),$$

$$\left(z = -e^{-i\phi} \tan\frac{\theta}{2} \right). \qquad /38/$$

Из условия $\dfrac{dE_I(z)}{d\phi} = 0$, $\dfrac{dE_I(z)}{d\theta} = 0$ мы получаем для $\dfrac{1}{A_x} > \dfrac{1}{A_y}$, $\dfrac{1}{A_x} > \dfrac{1}{A_z}$ $\cos^2\phi = 1$, $\sin^2\theta = 1$, т.е. волчок вращается вокруг оси x и

$$E_I = \frac{1}{2}(A_z + A_y) + I^2 A_x ;$$

$$\Psi_{IM} = \frac{1}{2^I} \sum_k \sqrt{\frac{(2I)!}{(I-K)!\,(I+K)!}}\, | IMK \rangle . \qquad /39/$$

Если мы предполагаем, что оператор квадрупольного момента имеет вид:

$$Q_{2\mu} = T^2_{\mu 0} q_0 + (T^2_{\mu 2} + T^2_{\mu -2}) q_2 ,$$

то для приведенных вероятностей E2-переходов получаем:

$$B(E2, I \to I') = \sum_{\mu M'} |\langle \Psi_{IM} | Q_{2\mu} | \Psi_{IM'} \rangle|^2$$

$$= \begin{cases} \langle II20|I0\rangle^2 \left(\frac{q_0}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}}\, q_2\right)^2 & \text{если } I = I' \\ 0 & I' = I-1 \\ (2I-3)/(2I+1)\, \frac{1}{4} \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\, q_0 + q_2\right)^2 & \text{если } I' = I-2. \end{cases} \qquad /40/$$

Результаты /39/, /40/ совпадают с точностью до флуктуационных колебаний с результатами, полученными в работах /11,12/. Эти члены приближенно можно учесть, используя бозонное представление /27/ операторов углового момента так же как в работе /11/.

4.2. *Когерентные состояния и модель принудительного вращения*

Исходя из одночастичного гамильтониана

$$H_{Cr.} = H_{sp} - \beta \cos\gamma\, Q_0 - \frac{\beta}{\sqrt{2}} \sin\gamma\, (Q_2 + Q_{-2}) \mp \omega J_i$$

$$(i = x, y, z), \qquad /41/$$

можно вычислить полную энергию вращающегося ядра, как это сделано в работе /13/. Функции $E_i(\omega)$ и $f_i(\omega)$, где $E_i(\omega)$ - энергия ядра, вращающегося вокруг оси i с частотой ω, $f_i(\omega)$, среднее значение i-той компоненты оператора углового момента можно считать известными. Среднее значение остальных компонент оператора углового момента равно нулю. Используя бозонное представление Швингера /30/ для компонент оператора $\vec{L}$ во внутренней системе координат, гамильтониан, дающий дискретный спектр вращающегося ядра, инвариантный относительно вращения вокруг главных осей на угол π, можно записать следующим образом:

$$H = h_0 + h_1(a^+a + b^+b) + h_{20} a^+b^+ab + h_{21}(a^+a^+bb + b^+b^+aa) +$$
$$+ h_{22}(a^+a^+aa + b^+b^+bb) + h_{30}(a^+a^+b^+b\,bb + b^+b^+b^+baa +$$
$$+ a^+a^+a^+abb + b^+b^+a^+a\,aa) + h_{31}(a^+a^+a^+aaa + b^+b^+b^+bbb) + \ldots \qquad /42/$$

После усреднения этого гамильтониана по когерентным состояниям /11/ мы получаем следующее выражение для энергии состояния ядра, имеющего определенное среднее значение оператора углового момента

$$E(y, \bar{z}) = h_0 + h_1(yy^* + \bar{z}\bar{z}^*) + h_{20} yy^* \bar{z}\bar{z}^* + h_{21}(y^2 \bar{z}^{*2} + \bar{z}^2 y^{*2}) +$$
$$+ h_{22}(y^2 y^{*2} + \bar{z}^2 \bar{z}^{*2}) + h_{30}(y^2 \bar{z}\bar{z}^{*3} + \bar{z}^3 \bar{z}^* y^{*2} +$$
$$+ y^3 y^* \bar{z}^{*2} + \bar{z}^2 y y^{*3}) + h_{31}(y^3 y^{*3} + \bar{z}^3 \bar{z}^{*3}) + \ldots$$

$$\langle y\bar{z} | L_x | y\bar{z} \rangle = (\bar{z} y^* + y \bar{z}^*), \quad \langle y\bar{z} | L_y | y\bar{z} \rangle = i(\bar{z} y^* - y\bar{z}^*)$$

$$\langle y\bar{z} | L_z | y\bar{z} \rangle = \bar{z}\bar{z}^* - yy^*. \qquad /43/$$

Рассмотрим частные случаи уравнения /43/

1. $y = \bar{z}$, $\langle L_x \rangle = \langle yy | L_x | yy \rangle = 2yy^*$

$$\langle yy | L_y | yy \rangle = \langle yy | L_z | yy \rangle = 0$$

$$E_1 = h_0 + h_1 \langle L_x \rangle + \frac{1}{4}(h_{20} + 2h_{21} + 2h_{22})\langle L_x \rangle^2 + $$
$$+ \frac{1}{4}(2h_{30} + h_{31})\langle L_x \rangle^3 + \dots \qquad /44a/$$

2. $z = -iy, \quad \langle L_y \rangle = \langle y, iy | L_y | y, iy \rangle = 2yy^*$

$$\langle y, iy | L_x | y, iy \rangle = \langle y, iy | L_z | y, iy \rangle = 0$$

$$E_2 = h_0 + h_1 \langle L_y \rangle + \frac{1}{4}(h_{20} - 2h_{21} + 2h_{22})\langle L_y \rangle^2 + $$
$$+ \frac{1}{4}(h_{31} - 2h_{30})\langle L_y \rangle^3 + \dots \qquad /44б/$$

3. $y = 0 \quad \langle 0\bar{z} | L_z | 0\bar{z} \rangle = \langle L_z \rangle = zz^*$

$$\langle 0\bar{z} | L_x | 0\bar{z} \rangle = \langle 0\bar{z} | L_y | 0\bar{z} \rangle = 0$$

$$E_3 = h_0 + h_1 \langle L_z \rangle + h_{22} \langle L_z \rangle^2 + h_{31} \langle L_z \rangle^3 + \dots . \qquad /44в/$$

Если мы считаем, что когерентные состояния при достаточно высоком спине являются хорошим приближением для волновой функции ядра, то энергии $E_i(\omega)$ должны совпадать с энергиями /44/, т.е.

$$E_x(\omega) = E_1, \quad f_x(\omega) = \langle L_x \rangle, \quad \langle L_y \rangle = \langle L_z \rangle = 0$$

$$E_y(\omega) = E_2, \quad f_y(\omega) = \langle L_y \rangle, \quad \langle L_x \rangle = \langle L_z \rangle = 0$$

$$E_z(\omega) = E_3, \quad f_z(\omega) = \langle L_z \rangle, \quad \langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0 \qquad /45/$$

для каждого значения ω. Поэтому, зная $E_i(\omega)$ и $f_i(\omega)$, мы можем из /45/ вычислить коэффициенты $h_{n,m}$ гамильтониана /42/ и после его диагонализации получить полный спектр состояний вращающегося ядра, включая возбуждения, связанные с нутационным движением. Эффективный гамильтониан типа /42/ обсуждался в работе [14].

5. *ЗАКЛЮЧЕНИЕ*

В заключение отметим следующий интересный факт. Набор когерентных состояний /11/ содержит состояние с целыми и полуцелыми значениями спина. Таким образом, при исследовании квазиклассических свойств вращающегося ядра мы должны рассматривать четные и нечетные ядра одновременно.

После того как эта работа была закончена, появилась статья [15], в которой рассматривались аналогичные вопросы. Результаты, полученные в [15], следуют из результатов настоящей работы, если параметр $z = 0$. Кроме того, в [15] не рассматривались вопросы, связанные с описанием движения асимметричного волчка.

Автор благодарен И.Н.Михайлову за многочисленные обсуждения вопросов, связанных с теорией когерентных состояний, в результате которых возникла эта работа. Кроме того, он благодарен Р.В.Джолосу, просмотревшему рукопись и сделавшему полезные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *E.Schrodinger. Zs. Phys., 14, 664 /1926/.*
2. *R.J.Glauber. Phys.Rev., 130, 2529 /1963/; Phys.Rev., 131, 2766 /1963/.*
3. *F.W.Cummings, I.R.Johnston. Phys.Rev., 151, 105 /1966/.*
4. *P.Carruthers, K.S.Dy. Phys.Rev., 147, 214 /1966/.*
5. *A.M.Perelomov. Commun. Math. Phys., 26, 222 /1972/.*
6. *I.H.Raddiffe. J.Phys. A: Gen.Phys., 4, 313 /1971/.*
7. *R.Holtz, I.Hanus. J.Phys. A: Gen.Phys., 7, No. 4 /1974/.*
8. *E.R.Marshalek. Phys.Rev. C. Vol. 11, No. 4, 1426 /1975/.*
9. *F.J.Dayson. Phys.Rev., 102, 1217 /1956/.*
10. *I.Schwinger. In Quantum Theory of Angular Momentum, ed. by L.C.Biedenharn and N.J.Van Dam (Academic, New York, 1965/.*

11. *О.Бор, Б.Моттельсон. Структура атомного ядра. т. 2, М., Мир, 1975.*
12. *И.Н.Михайлов. Сообщение ОИЯИ, Р4-7862, Дубна, 1974.*
13. *К.Неергорд, В.В.Пашкевич. Сообщение ОИЯИ, Р4-8947, Дубна, 1975.*
14. *И.Н.Михайлов, Е.Н.Наджаков, Д.Караджов. ЭЧАЯ, т. 4, вып. 2 /1973/.*
15. *D.Baumik, T.Nag, B.Dutta-Roy. Journal of Physics A., vol. 8, No. 12 /1975/.*

Рукопись поступила в издательский отдел
17 февраля 1976 года.