ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р4 - 9507

Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОДНОПОЛЕВЫХ СОЛИТОНОВ

1976

P4 - 9507

Ю.В.Катышев, В.Г.Маханьков

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОДНОПОЛЕВЫХ СОЛИТОНОВ

Направлено в "Physics Letters"

I. Изучению свойств солитонов и их "применению" в различных областях физики посвящается в последнее время изрядное количество работ. Сюда относятся публикации, касающиеся волновых явлений в гидродинамике жидкости и плазмы, твердого тела, а также теоретико-полевых. В первом случае, кроме исследования вида солитонных решений, есть результаты, касающиеся также вопросов их устойчивости. Это относится к солитонам уравнения Кортевега-де Вриса (КдВ) /I/ и уравнения Шредингера с кубической нелинейностью /2/.

Иногда солитоны рассматриваются как квазичастичные решения классической нелинейной теории поля и привлекаются для интерпретации "эффектов удержания" (confinement problem) с точки зрения коллективных степеней свободы, в этом случае вопросы их устойчивости остаются, как правило, вне внимания авторов /3/ ж).

Поэтому представляет интерес обсудить вопросы устойчивости солитонов для некоторых нелинейных уравнений. Мы используем метод, основанный на лагранжевом формализме /2/.

В разделе 2 будет рассмотрена устойчивость солитонов уравнения КдВ, раздел 3 посвящен исследованию устойчивости солитонов уравнения типа Клейна-Гордона с кубической нелинейностью (так называемая φ^4 - теория поля). В заключение (раздел 4) мы обсудим полученные результаты и вопросы, возникающие в связи с ними.

2. Уравнение КдВ

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x + u_{xxx} = 0 \qquad (I)$$

может быть получено варьированием действия

======================

ж) Исключение, по-видимому, составляет работа /4/, где рассмотрена устойчивость солитонов в φ^4 - теории поля в направлении их движения.

$$S=\int \mathcal{L}\,dx\,dt,\quad \mathcal{L}(\psi,\theta)=\frac{1}{2}\theta_x\theta_t+\frac{1}{6}\theta_x^3+\theta_x\psi_x+\frac{1}{2}\psi^2, \tag{2}$$

где $u=\theta_x$, $\psi=\theta_{xx}$.

Члены, появляющиеся при слабо косом распространении, могут быть найдены из линейного дисперсионного уравнения /I/, которое в лабораторной системе координат есть

$$\omega=\frac{kC}{\sqrt{1+k^2}}=C\sqrt{\frac{k_x^2+k_y^2}{1+k^2}}=Ck_x\left(1+\frac{1}{2}\frac{k_y^2}{k_x^2}-\frac{3}{2}k_y^2\right).$$

Переходя в систему, движущуюся со скоростью c в направлении оси x , получим

$$\omega'=kc-k_x c=\alpha\frac{c}{2}\frac{k_y^2}{k_x}\left(1-3k_x^2\right). \tag{3}$$

Величина α = - I соответствует положительной дисперсии, а α = = +I - отрицательной (см. /I/). При получении соотношения (3) предполагалось, что $k_y \ll k_x$.

Используя (3) и полагая c = I, легко получить уравнение

$$u_t+\frac{1}{2}(u^2)_x+u_{xxx}+\frac{\alpha}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int^x u\,dx'=-\frac{3}{2}\alpha\,u_{yyx}. \tag{4}$$

Это уравнение получается при варьировании действия с лагранжианом

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\int dx\,dy\left\{\theta_x\theta_t+\frac{\theta_x^3}{3}+2\theta_x\psi_x+\psi^2+\frac{3}{2}\alpha\theta_y\psi_y+\frac{\alpha}{2}\left[\theta_y^2-\theta_y^2(x=\pm\infty)\right]\right\},$$

если учитывать старшие члены разложения по параметру k_y^2/k_x^2. Перепишем $\mathcal{L}$ в удобном для дальнейшего виде

$$\mathcal{L}=\frac{1}{2}\int dx\,dy\left\{u\theta_t+\frac{4}{3}u^3+2uu_{xx}+u_x^2+\alpha\frac{3}{2}uu_{yy}+\alpha\frac{3}{2}u_x\theta_{yy}+\alpha\frac{3}{2}\theta_y u_{xy}+\frac{\alpha}{2}\left[\theta_y^2-\theta_y^2(x=\pm\infty)\right]\right\},\quad \theta=\int^x u\,dx. \tag{5}$$

Солитонное решение уравнения (I) есть

$$u=12A_0^2\,\mathrm{sech}^2\left[A_0(x-M_0)\right],\quad M_0=4A_0^2 t. \tag{6}$$

Будем предполагать, что как амплитуда A , так и фаза M являются функциями y и t . Подставляя пробную функцию

$$u=12A^2\,\mathrm{sech}^2\left[A(x-M)\right]$$

в (5), интегрируя по x и варьируя получающееся действие по A и M , имеем систему уравнений

$$\alpha A^2M_y^2-\frac{\alpha}{9}\frac{A_y^2}{A^2}-\frac{2\alpha}{9}\frac{\partial}{\partial y}\frac{A_y}{A}-2M_tA^2+8A^4-\frac{8\alpha}{3}A_y^2-4\alpha A^4M_y^2+\frac{16\alpha}{3}\frac{\partial}{\partial y}AA_y=0,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}A^3-\alpha\frac{\partial}{\partial y}A^3M_y+\frac{12\alpha}{5}\frac{\partial}{\partial y}A^5M_y=0. \tag{7}$$

Для исследования дисперсионных свойств системы (7) линеаризуем её вблизи солитонного решения (6)

$$A=A_0+\delta A,\quad M=M_0+\delta M.$$

Тогда в нулевом приближении по δA и δM получим связь A_0 и M_0 в виде $\dot{M}_0=4A_0^2$. В первом приближении имеем дисперсионное уравнение

$$\omega^2=\alpha k_y^2\left(\frac{1}{3}-\frac{4}{5}A_0^2\right)\left[8A_0^2+\frac{\alpha k_y^2}{9A_0^2}\left(1-24A_0^2\right)\right]. \tag{8}$$

Это уравнение описывает неустойчивости, исследованные в работе /I/ (КР) и работе /5/ (YSS). Более того, неустойчивость (КР), оказывается, носит пороговый характер и стабилизируется при

$$k_y^2>72A_0^4\approx 72k_x^4. \tag{9}$$

3. Нелинейные уравнения типа Клейна-Гордона

$$\varphi_{tt}-\varphi_{xx}\pm m^2\varphi\mp g^2\varphi^3=0 \tag{10}$$

получаются варьированием действий S_+ и S_- :

$$S_\pm=\frac{1}{2}\int\left\{(\varphi_t)^2-(\varphi_x)^2\mp m^2\varphi^2\pm\frac{g^2}{2}\varphi^4\right\}dx\,dt. \tag{11}$$

рии поля являются практически всегда неустойчивыми. Солитоны типа ступеньки являются весьма устойчивыми образованиями и поэтому могут представлять интерес с точки зрения построения моделей протяженных частиц (см. /6/ и цитированную там литературу).

Литература:

1. Б.Б.Кадомцев, В.И.Петвиашвили. ДАН СССР, 192, 753, 1970.
2. В.Е.Захаров, А.М.Рубенчик. ЖЭТФ, 65, 997, 1973;
   Л.М.Дегтярев, В.Е.Захаров, Л.И.Рудаков. ЖЭТФ, 68, 115, 1975.
3. P.Vinciarelly, Nucl.Phys., B89, 463 (1975);
   А.М.Поляков. Письма в ЖЭТФ, 20, 430, 1974.
4. Л.Г.Заставенко. Прикладная математика и механика, 29, 430, 1965.
5. M.Y.Yu, P.K.Shukla, K.H.Spatschek. Bull.Amer.Phys, Soc., 20, 1292 (1975); Phys.Lett., 54A, 419 (1975).
6. И.С.Шапиро. Письма в ЖЭТФ, 21, 624, 1975;
   Н.А.Воронов, И.Ю.Кобзарев, Н.Б.Конюхова. Письма в ЖЭТФ, 22, 590, 1975;
   А.М.Поляков. ЖЭТФ, 68, 1975, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
30 января 1976 года.

Солитонное решение для S_+ имеет вид колокольчика, для S_- - ступеньки.

Исследуем с помощью описанной выше методики оба эти решения на устойчивость их по отношению к изгибанию и перетяжкам в y -направлении. Используя для S_+ пробную функцию в виде[ж)] $\varphi_s = \sqrt{2} A\, \mathrm{sch}\, Bx$, варьируя по A и B и линеаризуя полученные уравнения вблизи солитонного решения, получим

$$\omega^2 = k_y^2 - 2{,}93\, m^2, \qquad (12)$$

что при $k_y^2 < 2{,}93 m^2$ приводит к неустойчивости.

Аналогично можно получить дисперсионное уравнение для солитона огибающей вида колокольчик, используя пробную функцию $\varphi_s = \sqrt{2} A\, \mathrm{sch}(Ax) e^{-i\Phi}$ и варьируя по A и Φ :

$$\omega^2 - k_y^2 = \frac{9}{11}\left(1 - 2A_o^2 \pm \sqrt{(1-2A_o^2)^2 + \frac{22}{9} k_y^2 (1-A_o^2)}\right) \qquad (13)$$

Отсюда следует, что в области $A_o^2 > \frac{1}{2}$ солитон неустойчив, как в случае (12), даже при $k_y = 0$, точнее, $k_y^2 < \frac{9}{11}(2A_o^2 - 1)$. В области $A_o^2 \leqslant \frac{1}{2}$ из (13) легко найти, что инкремент $\gamma_k = \mathrm{Im}\,\omega$ становится пропорциональным либо $k_y^{1/2}$ при $A_o = \frac{1}{2}$, либо k_y при $A_o < \frac{1}{2}$ и обращается в нуль вместе с k_y. Условие неустойчивости теперь есть

$$k_y^2 < \frac{18}{11} A_o^2,$$

и

$$\gamma_k = k_y \frac{A_o}{\sqrt{1-2A_o^2}} \quad \text{при} \quad k_y^2 \ll \frac{18}{11}\frac{1-2A_o^2}{1-A_o^2}. \qquad (14)$$

========================

ж) Что соответствует покоящемуся солитону.

Эти результаты подтверждают выводы, полученные в работе /4/, а (14) совпадает с соответствующим выражением (30) работы Дегтярева, Захарова и Рудакова /2/ при $A_o \ll 1$.

Перейдем к исследованию устойчивости солитонов типа ступеньки. Используя пробную функцию в виде $\varphi_s = A\, \mathrm{th}\frac{B}{\sqrt{2}} x$ (стоячий солитон) и варьируя по A и B, после линеаризации вблизи одномерного солитонного решения получим

$$\omega^2 = k_y^2 + (1{,}69 \pm 0{,}14)\, m^2,$$

т.е. такой солитон оказывается устойчивым и в поперечном направлении.

Исследование на устойчивость комплексного солитона вида $\varphi_s = e^{i\Phi} A\, \mathrm{th}\frac{B}{\sqrt{2}} x$ приводит к громоздкому кубическому уравнению относительно величины $\omega^2 - k_y^2$. Его решения действительны ($\mathrm{Im}\,\omega = 0$) при всех возможных значениях $\dot{\Phi}_o$ и k_y, что означает устойчивость рассматриваемого солитона[ж)].

4. Полученные результаты показывают, что использованный метод является весьма плодотворным при исследовании поперечной устойчивости солитонов. Показано, что КР-неустойчивость носит пороговый характер, а солитоны типа колокольчиков в φ^4- тео-

=====================

ж) Более подробное обсуждение полученных результатов и сравнение их с уже опубликованными авторы предполагают сделать в другой работе.