

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P4-95-372

Е.П.Величева\*, А.А.Сузько

ДВУМЕРНЫЕ ТОЧНО РЕШАЕМЫЕ МОДЕЛИ  
В АДИАБАТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

\*Гомельский государственный университет им.Ф.Скарыны, Беларусь

1995

Величева Е.П., Сузько А.А.

## Двумерные точно решаемые модели в адиабатическом представлении

На основе обратной задачи в адиабатическом подходе конструируется широкий класс двумерных точно решаемых моделей посредством обобщения метода баргмановских потенциалов на параметрическое семейство обратных задач и для систем уравнений с ковариантной производной. Разрабатывается алгебраическая техника восстановления в явном аналитическом виде потенциала и решений с использованием как метода Гельфанда—Левитана, так и Марченко, которая тестируется на ряде примеров. Конструируются точно решаемые модели с предписанными спектральными свойствами как на основе параметрической обратной задачи, так и в согласованной постановке решения двух обратных задач, к которым сводится исходная. В частности, представлены безотражательные потенциалы как по одной из переменных, так и по обеим.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

### Перевод авторов

Velicheva E.P., Suzko A.A.

P4-95-372

## Exactly Solvable Two-Dimensional Models in the Adiabatic Representation

On the basis of the inverse scattering problem in the adiabatic representation, a wide class of exactly solvable two-dimensional models is constructed by generalizing the method of Bargmann potentials to the parametric family of inverse problems and systems of equations with covariant derivatives. The algebraic technique is elaborated for the reconstruction of potential and corresponding solutions in closed analytic form with the use of both Gel'fand—Levitan and Marchenko methods. This technique is tested in the set of examples. Exactly solvable models with prescribed spectral properties are generated on the basis of parametric inverse problems and of a consistent formulation of both inverse problems, to which the initial task is reduced. In particular, the reflectionless potentials are determined both in one and in two variables.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995

# 1. Введение

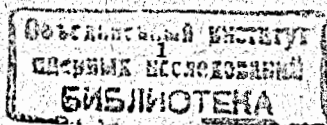
Особенность сложных систем, таких, как молекулярные, атомные, ядерные состоит в том, что они характеризуются несколькими степенями свободы, разделение которых в сильно взаимодействующих системах, как правило, не справедливо. Метод адиабатического представления [1], [2], [3] позволяет учесть взаимное влияние медленно изменяющегося внешнего (коллективного) и быстро изменяющегося внутреннего полей. Прямая задача рассеяния в адиабатическом подходе, начиная с работ Борна [1], имеет достаточно богатую историю развития, в то время как конструктивный подход к трехчастичной обратной задаче рассеяния предложен относительно недавно [4]–[6]. Он основан на глобальном адиабатическом представлении для трехчастичной волновой функции, построенном через локальные адиабатические разложения фаддеевских компонент [7], [8]. Одно из основных достоинств метода обратной задачи – это возможность получать аналитические решения как в линейной, так и нелинейной теории волн. Обратная задача в адиабатическом представлении, в свою очередь, расширяет возможности метода обратной задачи в исследовании многих реальных квантовых систем со сложной динамикой, характеризующейся взаимодействием медленных коллективных и быстрых внутренних полей. Такое взаимодействие может приводить к возникновению монополярных калибровочных потенциалов и как следствие к таким интересным явлениям, как неинтегрируемые геометрические фазы, открытые Берри [9], молекулярный эффект Ааронова–Бома [10] и хаос для коллективного движения [11]. Точно решаемые модели в адиабатическом подходе, на наш взгляд, позволят промоделировать эти процессы и послужат хорошим аппаратом для исследования монополярных калибровочных потенциалов в квантовых системах и связанной с ними проблемы пересечения уровней при влиянии быстрой динамики отдельных частиц на коллективное движение системы в целом [12].

Многомерная обратная задача в адиабатическом подходе, который по математической сути своей представляет один из вариантов размерной редукции пространства  $M = B \times M$ , сводится к согласованному решению двух обратных задач в пространствах  $B$  и  $M$  меньшей размерности, чем исходное [4], [5], [6], [13], [14]. Одна из них – параметрическая – формулируется для уравнения Шредингера, описывающего быструю динамику при параметрической зависимости от медленных переменных, другая – многоканальная – для систем уравнений калибровочного типа, описывающих медленное движение. В данной работе конструируются двумерные точно решаемые модели на основе техники бармаповских потенциалов как для параметрического уравнения Шредингера, так и для многоканальной системы уравнений при согласованной постановке обратных задач для обоих этих случаев. Исследуется ряд двумерных точно решаемых моделей, построенных на основе параметрической обратной задачи в подходах Гельфанда–Левитана и Марченко с заданной зависимостью спектральных характеристик от внешней координатной переменной.

## 2. Адиабатическое представление многомерной задачи рассеяния

Адиабатическое представление, когда для гамильтониана  $H$  вводят разбиение

$$H = h^2 \otimes I + h^4, \quad (1)$$



формулируется на гильбертовом расслоенном пространстве  $\mathcal{H} = \int_B \oplus \mathcal{F}_x d\mu(x)$ , где  $B$  есть база,  $\mu(x)$  – положительная мера на  $B$ , слои  $\mathcal{F}_x \ni \{\psi_n(x, \cdot)\}$  образованы из собственных функций  $\psi_n(x, \cdot)$  самосопряженных операторов  $h^J(x)$ , параметризованных точками  $x \in B$

$$h^J(x)\psi_n(x, \cdot) = \mathcal{E}_n(x)\psi_n(x, \cdot); \quad (2)$$

$$h^J(x) = -\Delta_y + V(x, y).$$

Оператор  $h^s \otimes I$  действует как  $h^s$  по медленным "s" переменным  $x$  и как единичный оператор по быстрым "F" переменным  $y \in M$ . Например, для диатомной системы  $h^J(x) \equiv h^{el}$  есть электронный гамильтониан. Он включает кинетическую энергию электрона и все потенциальные взаимодействия, его собственные состояния образуют полный набор относительно электронных "быстрых" координат  $y$  при каждом фиксированном значении радиуса-вектора (медленной переменной  $x$ ) между двумя атомными центрами. Так что собственные состояния  $\psi_n(x, \cdot)$  гамильтониана  $h^J$  зависят параметрически от вектора  $x$  и имеют собственные значения  $\mathcal{E}_n(x)$ , также параметрически зависящие от  $x$ .

Полная волновая функция системы  $\Psi(X), X = \{x, y\} \in M$ , в таком подходе представляется в виде разложения

$$|\Psi(X)\rangle = |n\rangle \langle n| \Psi\rangle = \sum_n \int \psi_n(x, \cdot) F_n(x) \quad (3)$$

по собственным состояниям  $\psi_n(x, \cdot)$  гамильтониана быстрого движения  $h^J(x) \quad \forall x \in B$  (2), которые вследствие его самосопряженности образуют полный ортонормированный набор

$$\langle n | \langle m | = \delta(y - y'); \langle n | m \rangle = \int \psi_n^\dagger(x, y) \psi_m(x, y) dy = \delta_{nm} \quad \forall x. \quad (4)$$

Символ  $\sum \int$  в (3) обозначает суммирование по состояниям дискретного спектра  $\mathcal{E}_n(x) \in \sigma_d(h^J(x))$  и интегрирование по состояниям непрерывного спектра  $\mathcal{E}_k(x) \in \sigma_c(h^J(x))$ . Если функции заданы на компактном множестве значений  $y \in M$ , то они все квадратично интегрируемы и спектр чисто дискретный, как это имеет место в случае гиперсферической параметризации пространства, когда  $y \in S^M$  – набор углов. В общем случае, поскольку состояния рассеяния  $\psi_k(x, \cdot) \equiv \psi(k, x, \cdot)$  вместе с состояниями дискретного спектра образуют полный набор, их необходимо учитывать в разложении (3), хотя они и не из  $L_2$ . В зависимости от конкретной постановки задачи используется как компактное базовое многообразие, так и некомпактное.

Подстановка разложения (3) для  $\Psi$  в исходное многомерное уравнение Шредингера и усреднение по быстрым переменным внутреннего движения приводит к многоканальной системе уравнений с удлиненной производной для коэффициентов разложения  $F = \{F_n\}$

$$[-(\nabla \otimes I - iA(x))^2 + V(x) \otimes I - P^2]F(x) = 0, \quad (5)$$

$$P = \text{diag}(p_n).$$

где операторы  $A(x)$  и  $V(x)$  действуют как оператор-значные для матричных компонент эффективных векторного и скалярного потенциалов, генерируемых функциями базиса

$$A_{nm}(x) = \langle \psi_n | i\nabla_x | \psi_m \rangle, \quad V_{nm}(x) = \langle \psi_n(x, \cdot) | h^J(x) | \psi_m(x, \cdot) \rangle = \mathcal{E}_n(x) \delta_{nm}. \quad (6)$$

В этом случае потенциальная матрица диагональна,  $V(x) = \text{diag}\{\mathcal{E}(x)\}$ , и ее элементы совпадают с энергетическими уровнями  $\mathcal{E}_m(x)$  мгновенного гамильтониана  $h^J(x)$  (2). В общем случае ее необходимо дополнить некоторой потенциальной матрицей  $V^s(x)$ , содержащейся только в системе уравнений (5)

$$V_{nm}^s(x) = \langle \psi_n(x, \cdot) | V^s(x, \cdot) | \psi_m(x, \cdot) \rangle. \quad (7)$$

Отметим, что представление (3) полной волновой функции  $\Psi$  должно быть инвариантно относительно выбора базисного набора функций

$$|\Psi\rangle = |n\rangle \langle n| \Psi\rangle = |n\rangle \langle n| U^\dagger U \langle n| \Psi\rangle. \quad (3.a)$$

Тогда, как следует из (3),  $|\psi(x, \cdot)\rangle$  заменяется на  $|\psi'(x, \cdot)\rangle = U F(x)$  – на  $F'(x)$ :

$$|\psi'(x, y)\rangle = |\psi(x, y)\rangle U^\dagger(x), \quad F'(x) = U(x)F(x). \quad (8)$$

Легко показать, что при таком преобразовании эффективные матрицы  $V(x)$  и  $A(x)$  преобразуются как калибровочные скалярные и векторные потенциалы

$$V'(x) = U(x)V(x)U^{-1}(x), \quad A'_v(x) = UAU^{-1} - iU^{-1}\partial_v U, \quad (9)$$

а удлиненная производная  $D_v \equiv \partial_v \otimes I - iA_v(x)$  в (5) – как ковариантная производная. Здесь  $U(x)$  – калибровочное преобразование. Унитарность  $U$  следует из условия полноты наборов  $\{\psi\}$  и  $\{\psi'\}$  в каждом слое  $\mathcal{F}_x$

$$U(x)U^{-1}(x) = 1, \quad U^\dagger(x) = U^{-1}(x), \quad \forall x \in B. \quad (10)$$

Используя соотношения ортогональности и полноты (4), определим репер  $|e(y)\rangle \equiv |\psi(x_0, y)\rangle$  в некоторой фиксированной точке  $x = x_0$ . Движущийся репер  $|\psi(x, \cdot)\rangle$  связан с фиксированным  $|e(\cdot)\rangle$  с помощью унитарного билакального оператора  $U(x) \equiv U(x, x_0)$

$$|\psi(x, \cdot)\rangle = |e(\cdot)\rangle U(x, x_0), \quad U(x, x_0) = \langle e(\cdot) | \psi(x, \cdot) \rangle, \quad (11)$$

осуществляющего параллельный перенос репера из  $x_0$  в  $x$ . Из определения (6) оператора  $A$  с учетом (11) и (4) получаем

$$A_v = iU^{-1}\partial_v U. \quad (12)$$

Тогда ковариантная производная может быть записана через  $U$ :  $D_v = \partial_v \otimes I + U^{-1}\partial_v U$ . Теперь, используя унитарное калибровочное преобразование, мы можем аннигилировать  $A$ , как легко показать при подстановке (12) в ((9). При этом система уравнений (5) сводится к обычной многоканальной системе уравнений с потенциальным зацеплением для новых коэффициентов  $F'$ , связанных со старыми  $F$  соотношением (8)

$$[-(1/2)\Delta + U(x)V(x)U^{-1}(x) - P^2]F'(x, P) = 0. \quad (13)$$

После этого к системе уравнений (13) мы можем применить стандартные методы многоканальной обратной задачи при условии, что мы знаем соответствующую матрицу рассеяния и информацию по состояниям дискретного спектра: их положения и нормировкам. Отметим, это возможно в отсутствие сингулярностей  $A(x)$ , что и предполагается в данной статье.

### 3. Обратная задача рассеяния в адиабатическом представлении

Таким образом, обратная задача в адиабатическом подходе сводится к согласованному решению многоканальной обратной задачи для системы уравнений калибровочного типа (5) и параметрической задачи в слое (2).

На основе многоканальной и одноканальной техники баргмановских потенциалов в статьях [13], [14], [5], [6] был сформулирован метод аналитического моделирования эффективных взаимодействий и соответствующих решений в сложных квантовых системах с несколькими степенями свободы. Для потенциалов баргмановского типа ядра уравнений обратной задачи представимы как сумма факторизованных членов — техника вырожденных ядер — в результате, интегральные уравнения обратной задачи сводятся к системам алгебраических и решаются в замкнутом виде.

В данной работе мы демонстрируем возможности метода на примерах двумерных точно решаемых моделей,  $X = \{x, y\}$ . Восстановить потенциал  $V(X)$  и найти функции движущегося репера можно с помощью формализма обратной задачи для "быстрого" уравнения (2) при параметрической зависимости данных рассеяния от медленных переменных  $x$ , определяемой, в свою очередь, при решении обратной задачи для "медленной" системы уравнений (5). При заранее заданной зависимости от параметра спектральных данных  $\{S(x, k), \mathcal{E}_i(x), \gamma_i^2(x)\}$  вначале восстанавливается двумерный потенциал  $V(x, y)$  при решении параметрической обратной задачи и определяются базисные функции  $\psi_i(x, y)$ , по которым из (6) можно найти матрицу индуцированного векторного потенциала  $A(x)$ , и далее решение системы уравнений (5) относительно коэффициентов разложения (функций медленного движения) дает, как и в предыдущем случае, полное решение проблемы. Такого рода модели могут быть использованы для исследования геометрических аспектов квантовой теории рассеяния, а также при поиске аналитических решений нелинейных эволюционных уравнений.

#### 3.1 Двумерные потенциалы Баргмана с параметрической зависимостью от медленной переменной

Точно решаемые модели, генерируемые для "быстрого" параметрического уравнения, не только помогают при согласованном получении класса многомерных точно решаемых моделей, но и представляют самостоятельный интерес, так как позволяют восстанавливать многомерный  $V(x, y)$  потенциал, даже без решения системы медленных уравнений, и находить базисные волновые функции  $\psi(x, y)$  по известным или заранее заданным по определенному закону параметрическим данным рассеяния  $\{S(k, x), \gamma(x), \kappa(x)\}$ . Полученные таким образом волновые функции базиса можно использовать при исследовании ряда проблем атомной, ядерной, молекулярной физики. Рассмотрим параметрическую обратную задачу на примере восстановления двумерного потенциала. В декартовых координатах уравнение по быстрой переменной  $y$  при каждом фиксированном значении медленной переменной  $x$  запишется в виде

$$\left[ -\frac{d^2}{dy^2} + V(x; y) \right] \psi(x; y) + \dot{V}(y) \psi(x; y) = \varepsilon(x) \psi(x; y). \quad (14)$$

Физические  $\psi(x; k, y)$  и регулярные решения  $\phi(x; k, y)$  при каждом фиксированном значении  $x$ , как обычно [17], определяются через решения Йоста  $f_{\pm}(x; k, y)$  уравнения (14)

$$\psi(x; k, y) = f_{-}(x; k, y) - S(x; k) f_{+}(x; k, y); \quad (15)$$

$$\psi(i\kappa_n(x), y) = \gamma_n(x) f_{+}(i\kappa_n(x), y); \quad (16)$$

$$\phi(x; k, y) = \frac{1}{2ik} [f_{-}(x; k) f_{+}(x; k, y) - f_{+}(x; k) f_{-}(x; k, y)]. \quad (17)$$

Матрица рассеяния

$$S(x; k) = f_{-}(x; k) / f_{+}(x; k) \quad (18)$$

определяется функциями Йоста  $f_{\pm}(x; k)$ , зависящими от  $x$  как от параметра:

$$f_{\pm}(x; k) = \lim_{y \rightarrow 0} f_{\pm}(x; k, y). \quad (19)$$

Нормировки  $\gamma_n^2(x)$  и  $c_n^2(x)$  термов  $\mathcal{E}_n(x)$  определяются, как обычно, решениями Йоста  $f(x; k, y) \equiv f_{+}(x; k, y)$  и регулярными решениями  $\phi(x; k, y)$  при  $k = i\kappa_n(x)$ :

$$\gamma_n^2(x) = \left\{ \int_0^{\infty} |f(i\kappa_n(x), y)|^2 dy \right\}^{-1}, \quad c_n^2(x) = \left\{ \int_0^{\infty} |\phi(i\kappa_n(x), y)|^2 dy \right\}^{-1}. \quad (20)$$

Связь с обычными нормировочными коэффициентами фиксированного базиса легко устанавливается после подстановки соотношения связи подвижного с фиксированным репером (11) в (20)

$$\gamma_n^{-2}(x) = \sum_j^m \mathcal{U}_{nj}(x) \int_0^{\infty} |c_j^M(y)|^2 dy, \quad \mathcal{U}_{jn}(x) = \sum_j^m \mathcal{U}_{nj}(x) M_j^{-2} \mathcal{U}_{jn}(x),$$

$$c_n^{-2}(x) = \sum_j^m \mathcal{U}_{nj}(x) N_j^{-2} \mathcal{U}_{jn}(x), \quad N_j^{-2} = \int_0^{\infty} |c_j^{\Gamma j}(y)|^2 dy. \quad (21)$$

Обобщенные уравнения параметрической обратной задачи представляются в следующем виде [13]:

$$K(x; y, y') + Q(x; y, y') + \int_{y(0)}^{\infty(y)} K(x; y, y'') Q(x; y'', y') dy'' = 0, \quad (22)$$

$$V(x; y) = \dot{V}(y) \mp 2 \frac{d}{dy} K(x; y, y), \quad (23)$$

$$\psi(x; k, y) = \dot{\psi}(k, y) + \int_{y(0)}^{\infty(y)} K(x; y, y') \dot{\psi}(k, y') dy'. \quad (24)$$

Пределы интегрирования в (22), (24) и знаки в (23) зависят от конкретного подхода обратной задачи. Пределы от  $y$  до  $\infty$  (от  $y$  до  $a$ ) в (22), (24) и знак „ $\mp$ “ в (23) отвечают

формулировке Марченко ( $R$ -матричной ОЗ [16]). Пределы  $[0, y]$  в (22), (24) и знак "+" в (23) отвечают подходу Гельфанда - Левитана.

В рамках обобщенного подхода Марченко [13, 5, 6] интегральные ядра  $Q^M(x; y, y')$ , зависящие параметрически от  $x$

$$Q^M(x; y, y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\mathring{S}(k) - \mathcal{S}(x; k)] \mathring{f}(k, y) \mathring{f}(k, y') dk + \sum_n^m \gamma_n^2(x) \mathring{f}(i\kappa_n(x), y) \mathring{f}(i\kappa_n(x), y') - \sum_n^m \dot{\gamma}_n^2(x) \mathring{f}(i\dot{\kappa}_n(x), y) \mathring{f}(i\dot{\kappa}_n(x), y'), \quad (25)$$

строятся по двум наборам данных рассеяния:  $\{\mathcal{S}(x, k), \mathcal{E}_n(x), \gamma_n^2(x)\}$ , соответствующим уравнению (14) при каждом значении параметра  $x$ , и обычным данным рассеяния  $\{\mathring{S}(k), \mathring{E}_n, \mathring{\gamma}_n^2\}$ , отвечающим (14) с  $V(x; y) = 0$ , т.е. данным рассеяния обычного одномерного уравнения Шредингера

$$\left[-\frac{d^2}{dy^2} + \mathring{V}(y)\right] \mathring{\psi}(k, y) = \mathcal{E}(x) \mathring{\psi}(k, y). \quad (26)$$

Функции  $\mathring{f}(k, y)$  - обычные решения Йоста уравнения (26) с известным потенциалом  $\mathring{V}(y)$ . По интегральным ядрам  $K^M(x; y, y')$ , относительно которых при каждом фиксированном значении  $x$  решается линейное интегральное уравнение (22), определяются потенциалы (23) и решения Йоста (24).

Аналогично строится параметрическое семейство ядер  $Q^{\Gamma 1}(x; y, y')$  интегрального уравнения, обобщающего уравнение Гельфанда - Левитана:

$$Q^{\Gamma 1}(x; y, y') = \int_0^{\infty} \mathring{\phi}(k, y) \mathring{\phi}(k, y') d[\rho(x; k) - \mathring{\rho}(k)] + \sum_n^m c_n^2(x) \mathring{\phi}(i\kappa_n(x), y) \mathring{\phi}(i\kappa_n(x), y') - \sum_n^m \dot{c}_n^2(x) \mathring{\phi}(i\dot{\kappa}_n(x), y) \mathring{\phi}(i\dot{\kappa}_n(x), y'). \quad (27)$$

Спектральная функция  $\rho(x; k)$  определяется функциями Йоста  $f_{\pm}(x; k)$

$$\rho(x; k) = \frac{2k}{\pi f_{-}(x; k) f_{+}(x; k)}. \quad (28)$$

Спектральные характеристики  $\{\mathring{\rho}(k), \mathring{c}_n^2, \mathring{E}_n\}$  и регулярные решения  $\mathring{\phi}(k, y)$  отвечают уравнению (26). После того как решено уравнение (22) относительно  $K^{\Gamma 1}(x, y, y')$ , по формулам (23) (нижний знак) и (24) (пределы  $[0, x]$ ) находим потенциал и регулярные решения уравнения (14).

Применим технику баргмановских потенциалов [16] - [19] к параметрическому семейству обратных задач для уравнений (14). Потенциалам Баргмана соответствуют

дробно-рациональные функции Йоста, однако теперь они параметрически зависят от координатной переменной  $x$  через зависимость от нее спектральных параметров [13, 5, 6]

$$f(x; k) = f^{\circ}(k) \prod \frac{k - i\alpha(x)}{k + i\beta(x)}. \quad (29)$$

Параметрическая функция Йоста (29) имеет  $N$  простых полюсов в точках  $k = i\beta_j(x)$  и  $N$  простых нулей при  $k = i\alpha_j(x)$ . На самом деле, как легко видеть,  $N$  простых полюсов и  $N$  простых нулей заданы не в отдельных точках комплексной  $k$ -плоскости, а на кривых импульсов, определяемых как функции координатной переменной  $x$ , внешней (параметрической) для этой задачи. Причем в  $\alpha(x)$  содержится не только нули на мнимой полуоси,  $Im k$ , отвечающие связанным состояниям  $Re \kappa_j(x) = 0$ ,  $Im \kappa_j(x) > 0$ , но и нули в нижней полуплоскости с  $Im \nu_j(x) < 0$  (число кривых простых полюсов  $\beta_j(x)$  равно числу кривых  $\kappa_j(x)$  и  $\nu_j(x)$  вместе взятых). Тогда матрица рассеяния и спектральная функция приобретают вид

$$S(x; k) = \mathring{S}(k) \prod \frac{(k + i\alpha(x))(k + i\beta(x))}{(k - i\beta(x))(k - i\alpha(x))}, \quad (30)$$

$$\rho(x; k) = \mathring{\rho}(k) \prod \frac{(k - i\beta(x))(k + i\beta(x))}{(k + i\alpha(x))(k - i\alpha(x))}. \quad (31)$$

Функции  $\mathring{S}(k)$  и  $\mathring{\rho}(k)$  известны, поскольку известен потенциал  $\mathring{V}(y)$ ; в частном случае  $\mathring{V}(y) = 0$ . Для  $S(x; k)$  и  $\rho(x; k)$ , как в (30) и (31), ядра интегральных уравнений обратных задач вырождаются и представимы в виде суммы нескольких членов с факторизованной координатной зависимостью по быстрой переменной. Как следствие этого интегральные уравнения сводятся к системам алгебраических, сферически-несимметричный потенциал и соответствующие ему решения выражаются в замкнутом аналитическом виде через известные решения непараметрической задачи - уравнение (26) с потенциалом  $\mathring{V}(y)$  - и через спектральные характеристики двух задач (26) и (14): непараметрической с потенциалом  $\mathring{V}(y)$  и параметрической с потенциалом  $\mathring{V}(y) + V(x, y)$ . Рассмотрим несколько примеров использования техники баргмановских потенциалов.

### 3.1.1 Конструирование точно решаемых моделей в подходе Марченко

Наиболее простой случай в подходе Марченко отвечает безотражательным (солитонным) потенциалам. Безотражательным - прозрачным - потенциалам по быстрой переменной соответствует одномерная обратная задача на всей оси  $-\infty < y < \infty$  с равным нулю коэффициентом отражения  $S^r = 0$ . Коэффициент прохождения  $S^t$ , равный по модулю 1, имеет вид рациональной дроби

$$S^t(x; k) = \prod_n^m \frac{k + i\kappa_n(x)}{k - i\kappa_n(x)}. \quad (32)$$

Отметим, возможны разные варианты точно решаемых моделей: прозрачные потенциалы как по медленной, так и по быстрой переменным, прозрачные вдоль одной из них.

запирающие вдоль одной из координат либо вдоль обеих, запирающие вдоль одной из координат, и прозрачные вдоль другой и другие подобные модели с дробно-рациональными функциями Йоста.

Обратная задача на всей оси похожа на двухканальную с двумя расцепленными основными интегральными уравнениями. Однако, поскольку  $V(x, y)$  выражается как через ядро  $K_1(x; y, y')$  одного интегрального уравнения, так и через ядро  $K_2(x; y, y')$  другого уравнения, достаточно найти одно из  $K_i(x; y, y')$  по формуле, совпадающей с (22). Тогда в  $Q^M(x; y, y')$ , определяемом здесь при  $\dot{V}(y) \equiv 0$  по формуле

$$Q^M(x; y, y') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s(x; k) \exp(ik(y + y')) dk + \sum_n^m \gamma_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)(y + y')), \quad (33)$$

остается лишь вклад от состояний дискретного спектра

$$Q^M(x; y, y') = \sum_n^m \gamma_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)(y + y')). \quad (34)$$

Аналогично для  $K^M(x; y, y')$  имеем

$$K^M(x; y, y') = - \sum_n^m \gamma_n^2(x) f(i\kappa_n(x), y) \exp(-\kappa_n(x)y'). \quad (35)$$

Для решений Йоста при  $k = i\kappa_n(x)$  получаем из (22) систему алгебраических уравнений

$$f(i\kappa_n(x), y) = \sum_j^m \exp(-\kappa_j(x)y) P_{jn}^{-1}(x; y) \quad (36)$$

с матрицей коэффициентов  $P_{jn}(x; y)$ , параметрически (через спектральные параметры) зависящих от  $x$

$$P_{jn}(x; y) = \delta_{jn} + \frac{\gamma_j^2(x) \exp[-(\kappa_n(x) + \kappa_j(x))y]}{\kappa_n(x) + \kappa_j(x)}. \quad (37)$$

Подставляя  $f(i\kappa_n(x), y)$  в  $K^M(x; y, y')$  (35) и используя (23), (24), получаем

$$V(x; y) = -2 \frac{d^2}{dy^2} \ln \det \|P(x; y)\|, \quad (38)$$

$$f_{\pm}(x; k, y) = \exp(\pm ik y) - \sum_{nj} \gamma_n^2(x) \exp(-\kappa_n(x)y) P_{jn}^{-1}(x; y) \frac{\exp((- \kappa_j(x) \pm ik)y)}{\kappa_j(x) \mp ik}. \quad (39)$$

Для прозрачных симметричных потенциалов по быстрой переменной нормировки могут быть определены значениями энергий уровней

$$\gamma_n^2(x) = i \mathcal{D}^{tr}(k)_{/k=i\kappa_n(x)} = 2\kappa_n(x) \prod_{m \neq n} \left| \frac{\kappa_m(x) + \kappa_n(x)}{\kappa_m(x) - \kappa_n(x)} \right|. \quad (40)$$

В этом случае потенциал и решения полностью заданы потенциальными термами  $\mathcal{E}_n(x) = (i\kappa_n(x))^2$ . Соотношения для потенциалов и решений могут быть выражены через нормированные собственные функции  $\psi_n(x; y)$  (16) и записаны в более симметричном и удобном виде. Следуя [18], введем

$$\lambda_n(x; y) = \gamma_n(x) \exp(-\kappa_n(x)y).$$

Перепишем формулу для  $K^M(x; y, y')$  (35) следующим образом:

$$K^M(x; y, y') = - \sum_n^m \gamma_n(x) \psi_n(x; y) \exp(-\kappa_n(x)y') = - \sum_n^m \psi_n(x; y) \lambda_n(x; y). \quad (41)$$

Для нормированных собственных функций из (22) получаем

$$\psi_n(x; y) = \sum_j^m \lambda_j(x; y) A_{jn}^{-1}(x; y) \quad (42)$$

с матрицей коэффициентов  $A_{jn}(x; y)$

$$A_{jn}(x; y) = \delta_{jn} + \frac{\lambda_j(x; y) \lambda_n(x; y)}{\kappa_n(x) + \kappa_j(x)}. \quad (43)$$

Наконец, ядро  $K^M(x; y, y')$  и потенциал могут быть выражены следующим образом:

$$K^M(x; y, y') = - \sum_n^m \sum_j^m \lambda_j(x; y) A_{jn}^{-1}(x; y) \lambda_n(x; y),$$

$$V(x; y) = -4 \sum_n^m \kappa_n(x) \psi_n^2(x; y). \quad (44)$$

Заметим еще раз, эти соотношения получены для конкретного случая нулевого коэффициента отражения  $S^r(x; k) = 0 \quad \forall x$ .

В случае одного связанного состояния получаем обобщенный потенциал Эккарта

$$V(x; y) = -2 \frac{2\kappa(x) \gamma^2(x) \exp(-2\kappa(x)y)}{[1 + (\gamma^2(x)/2\kappa(x)) \exp(-2\kappa(x)y)]^2}, \quad (45)$$

который преобразуется к более простому виду, хорошо известному в теории солитонов,

$$V(x; y) = - \frac{2\kappa^2(x)}{\cosh^2[\kappa(x)(y - y_0(x))]} \quad (46)$$

при использовании подстановки

$$\exp(2\kappa(x)y_0) = \gamma^2(x)/2\kappa(x). \quad (47)$$

и преобразования

$$\{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]\}^2 = 4 \cosh^2[\kappa(x)(y - y_0(x))] \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))].$$

Решения Йоста, ему отвечающие, на траектории  $k = \kappa(x)$ , а также при произвольных значениях  $k$  запишутся в явном виде:

$$f(i\kappa(x), y) = \frac{\exp(-\kappa(x)y)}{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]}, \quad (48)$$

$$f_{\pm}(x; k, y) = \exp(\pm ik y) \left\{ 1 - \frac{\exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))]}{1 + \exp[-2\kappa(x)(y - y_0(x))\kappa(x) \mp ik]} \right\}. \quad (49)$$

Приведем явное выражение для нормированной волновой функции  $\psi(x, y)$  потенциала (46), соответствующей терму  $\mathcal{E}(x) = -\kappa^2(x)$

$$\psi(x, y) = \frac{\sqrt{\kappa(x)/2}}{\cosh[\kappa(x)(y - y_0(x))]} \quad (50)$$

Легко показать, что потенциал связан с нормированной волновой функцией соотношением

$$V(x; y) = -4\kappa(x)\psi^2(x; y). \quad (51)$$

Отметим, в формулах (46), (48) – (51) величина  $y_0(x)$  всегда связана с нормировочной функцией  $\gamma^2(x)$  соотношением (47). Если нормировочная функция выбрана в соответствии с (40),

$$\gamma^2(x) = 2\kappa(x),$$

т.е. отвечает симметричному прозрачному потенциалу по  $y$ , то  $y_0(x) = 0 \quad \forall x$ . Что не удивительно, как видно из формулы (46), при  $y_0(x) = 0$  потенциал симметричен относительно  $y = 0$ . Если, в свою очередь, поведение терма  $\mathcal{E}(x)$  отвечает потенциалу  $V(x) \equiv \mathcal{E}(x)$  "медленного" уравнения

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{2\kappa^2}{\cosh^2(\kappa x)}, \quad (52)$$

симметричному и прозрачному по  $x$ ,  $\gamma^2 = 2\kappa$ ,  $x_0 = 0$  (рис.1а), соотношения (46), (50) и (49) дают прозрачный симметричный по обеим переменным двумерный потенциал с одним связанным состоянием  $E = -\kappa^2$  (рис.1б), а также двумерные волновые функции связанного состояния  $\psi(x; y)$  (рис.1в) и непрерывного спектра  $f_{\pm}(x; k, y)$  параметрической задачи.

Приведем теперь несколько примеров двумерного потенциала и соответствующих ему аналитических решений параметрической задачи с двумя термами. В зависимости от конкретной задачи термы, вообще говоря, могут иметь различное поведение. В представленном случае зададим их следующим образом:

$$\kappa_n(x) = \frac{b_n}{\cosh(a_n x)} + c_n, \quad n = 1, 2,$$

где  $a_n, b_n, c_n$  – некоторые константы, определяющие форму термов  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ . Нормировку выберем в виде (40), отсчитываем случае безотражательных симметричных потенциалов. Тогда из соотношений (64) и (42) или (38) и (36) получаем двумерный

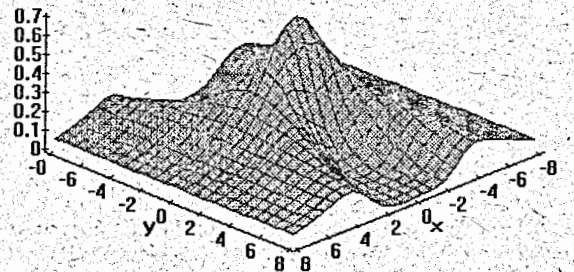
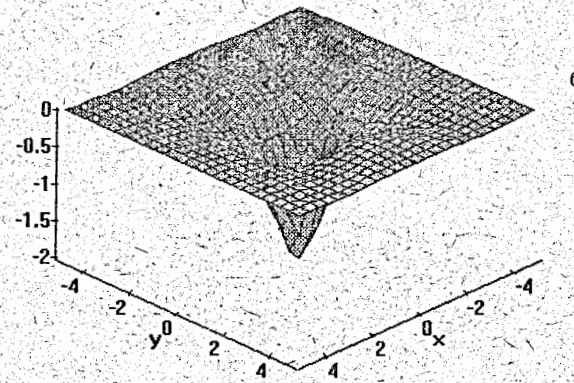
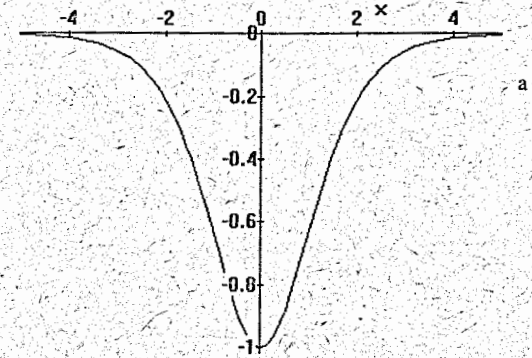
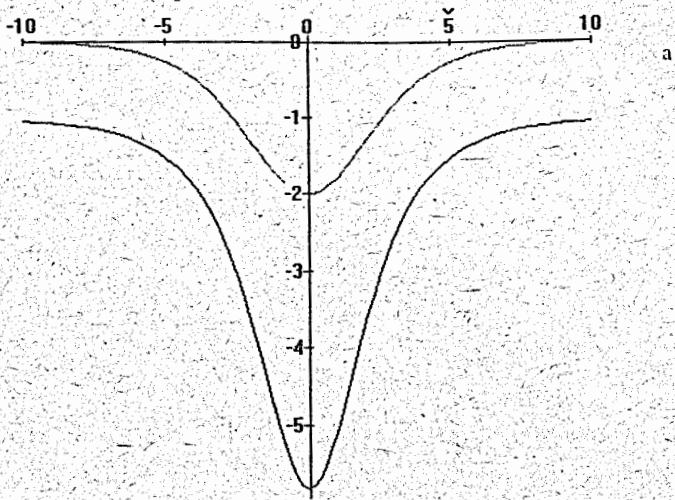
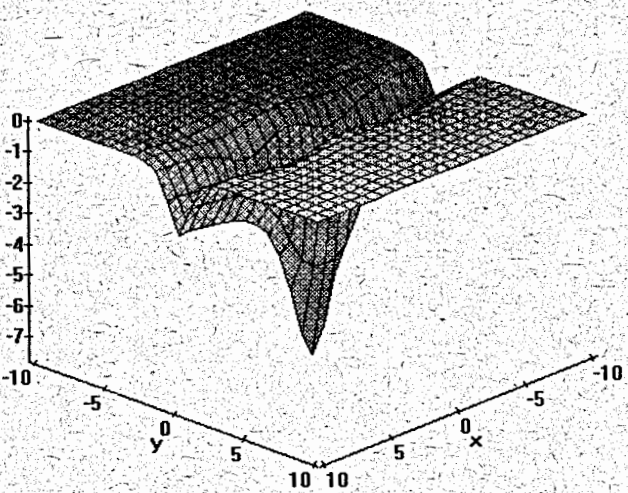


Рис. 1. Безотражательный двумерный потенциал с одним связанным состоянием. (а) Терм  $\mathcal{E}(x)$  соответствует прозрачному симметричному по  $x$  потенциалу (52) со связанным состоянием  $E = -0.5$ . (б) Симметричный прозрачный по обеим координатам  $x$  и  $y$  потенциал, (в) собственная волновая функция (50)  $\psi(x; y)$  параметрической задачи, соответствующая терму (а)

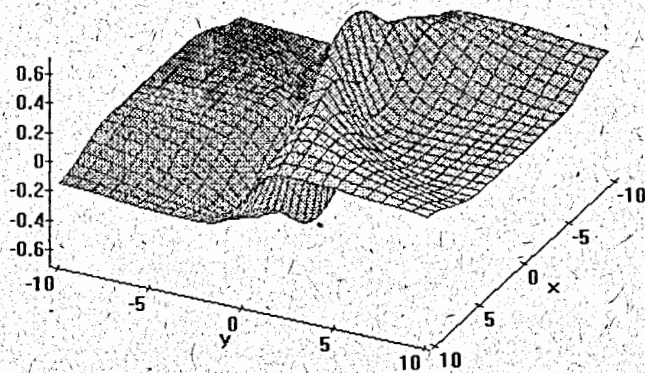




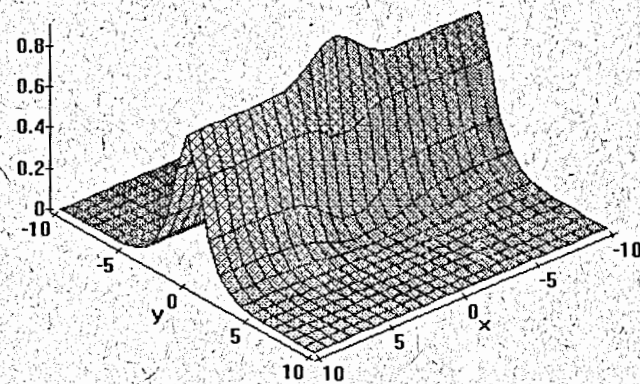
а



б



в



г

Рис. 2

Рис. 2. Безотражательный по переменной  $y$  потенциал (б), симметричный по обеим координатам  $x$  и  $y$ , с двумя симметричными по  $x$  термами (а)  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ :  $\kappa_1(x) = 2^{1/2}/\cosh(x/3)$ ,  $\kappa_2(x) = 2^{1/2}/\cosh(x/2) + 1$ ; (в,г) собственные функции (42) параметрической задачи с нормировками (40), соответствующими симметричному прозрачному по  $y$  потенциалу

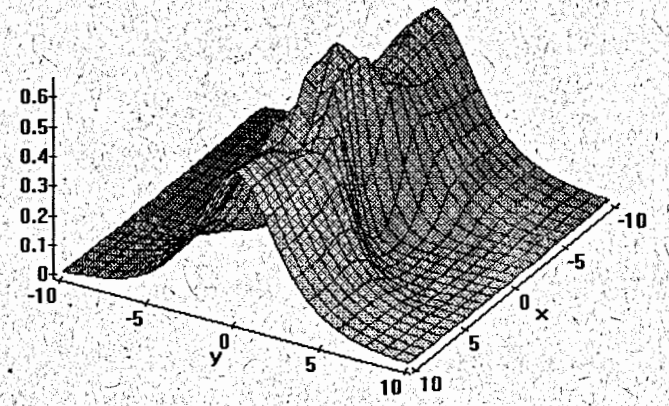
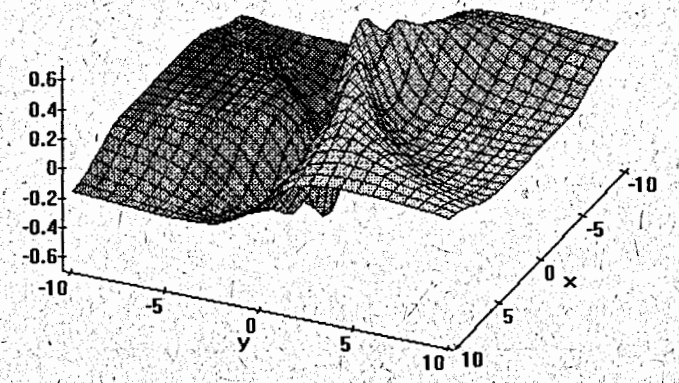
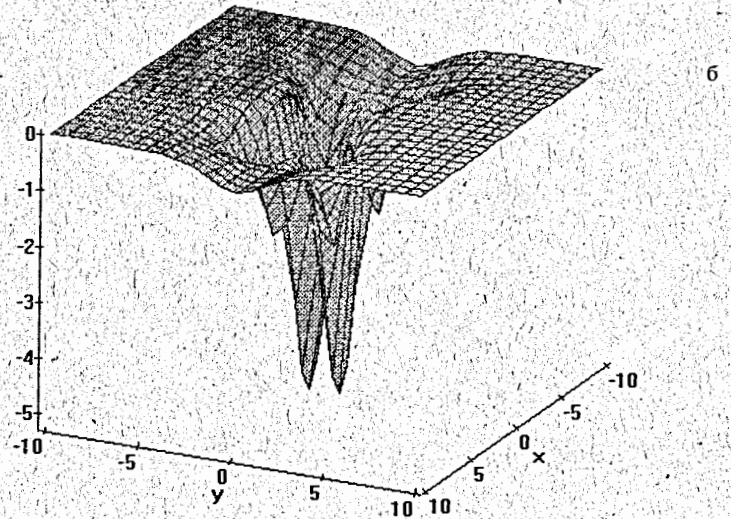
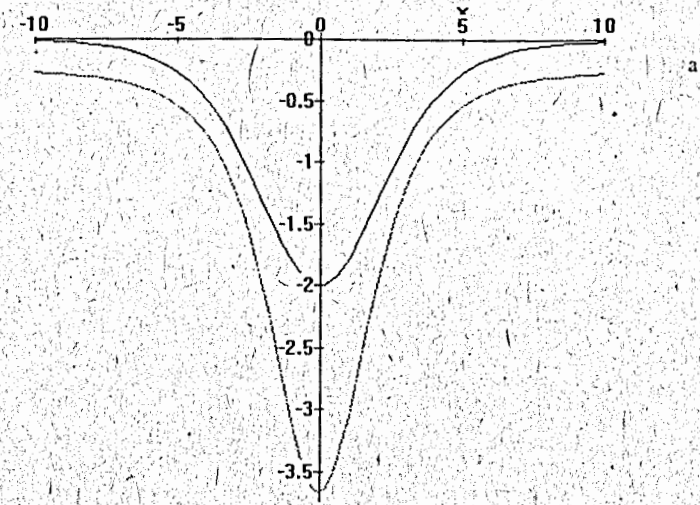


Рис.3

Рис. 3. Потенциал (б) и функции (в,г), отвечающие, как и в предыдущем случае Рис. 2., ситуации с двумя термами (а)  $\kappa_1(x) = 2^{1/2}/\cosh(x/3)$ ,  $\kappa_2(x) = 2^{1/2}/\cosh(x/2) + 0.5$ , расположенными, однако, на более близком расстоянии друг к другу. Поведение потенциала и функций в результате сближения термов становится более сложным

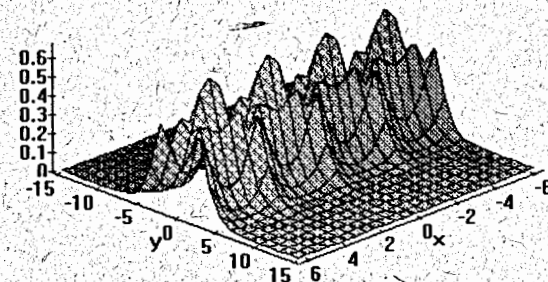
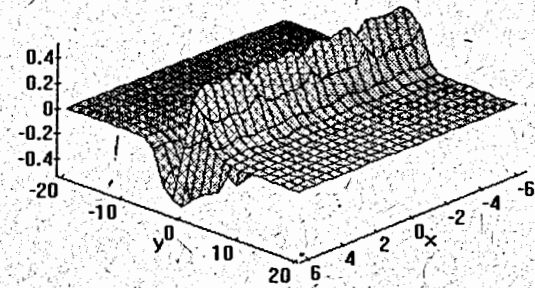
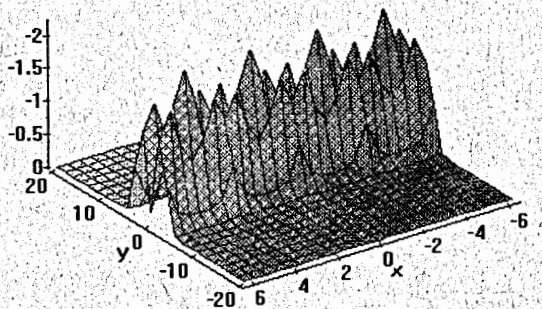
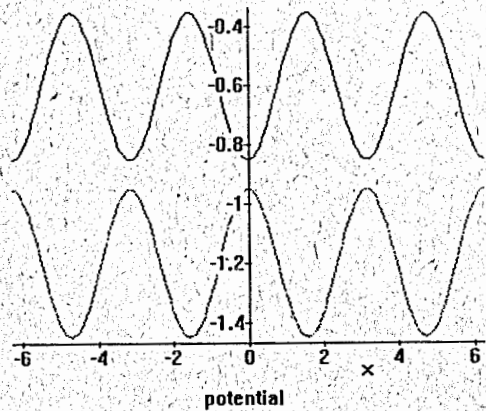
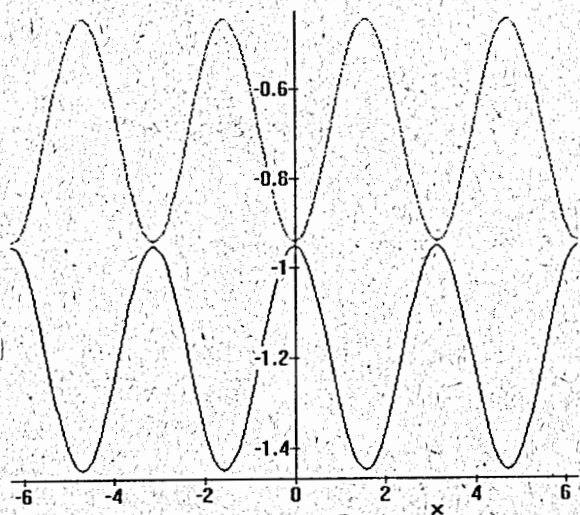


Рис. 4. Симметричный безотражательный по быстрой переменной  $y$  потенциал (б) и соответствующие собственные функции термов (в,г) с периодическим характером изменения термов в зависимости от  $x$  (а)  $\mathcal{E}_1(x) = -(1/4)\cos(2x) - 0.6$ ;  $\mathcal{E}_2(x) = (1/4)\cos(2x) - 1.2$ . Для большей наглядности потенциал перевернут. Возникает четкая периодическая структура изменения потенциала и функций в зависимости от  $x$ , в зависимости от  $y$  возникает несколько затухающих, симметрично относительно  $y = 0$ , слоев.

Рис.4



potential

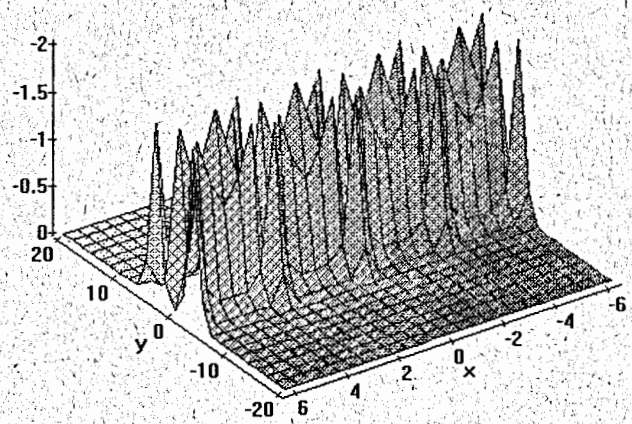


Рис. 5. Тоже, что и на Рис.4., Только термины (а) расположены значительно ближе друг по отношению к другу, чем на Рис. 4а.  $\mathcal{E}_1(x) = -(1/4)\cos(2x) - 0.69$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = (1/4)\cos(2x) - 1.2$ . Сравнение рисунков 4б и 5б показывает что при сближении уровней, возникает дополнительный 4-ый слой и сильно возрастает роль третьего до того слабого слоя

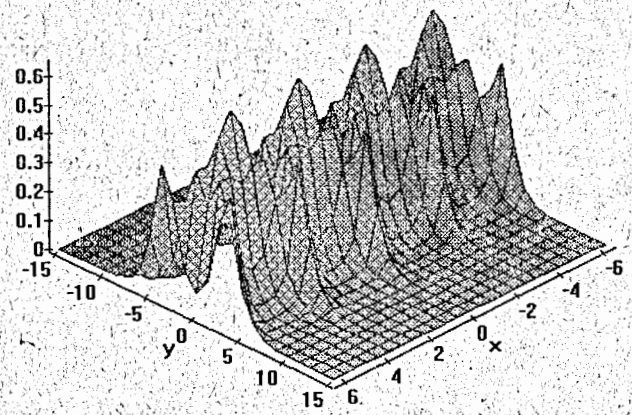
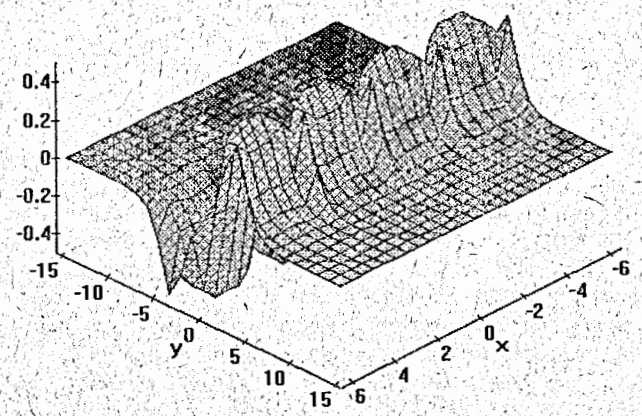


Рис.5

потенциал (рис.2б, 3б) и двумерные волновые функции (рис.2в, 2г и рис.3в, 3г), соответствующие выбранным термам (рисунки 2а и 3а). Как видно из сравнения рисунков 2б и 3б, 2в,г и 3в,г поведение потенциала и функций при сближении уровней становится более сложным. Исследованию ситуации с пересечением и квазипересечением уровней посвящена отдельная работа (см. также [12]).

Для полноты картины приведем также пример периодического изменения термов (рис.4, 5). Исследование ситуаций с периодическими потенциалами представляет интерес во многих разделах физики, в частности, физики твердого тела, а не только ядерной физики. Как видно из сравнения рисунков 4б и 5б, сближение уровней влияет на возникшую по  $y$  структуру потенциала. Характер изменения центрального слоя не чувствителен к сближению уровней, в то время как роль второго и третьего слоя возрастает и становится сравнимой с основным слоем. В особенности увеличился третий слой и возник четвертый, ранее отсутствовавший. Потенциал симметричен по  $y$ , также, конечно, как и по  $x$ . Отметим, что добавление нескольких осцилляций в термах почти не влияет на поведение потенциала по быстрой переменной  $y$ . Потенциал так же, как и волновые функции собственных состояний параметрической задачи, имеют четкую периодическую структуру по медленной переменной  $x$ , как и следовало ожидать из периодического поведения термов. Основной слой имеет максимальные значения, отвечающие наибольшему расхождению термов, в то время как последующие слои дают растущий вклад вблизи минимального расстояния между термами.

### 3.1.2 Конструирование точно решаемых моделей в подходе Гельфанда-Левитана

Вначале рассмотрим наиболее простой пример, возможный в подходе Гельфанда-Левитана, это - спектрально эквивалентный потенциал (при  $E > 0$ ,  $\rho(x; k) = \rho(k)$ ) с одним связанным состоянием: в нашем случае - с одним термом,  $\mathcal{E}(x) = -\kappa^2(x)$ . Для максимального упрощения задачи опять выберем опорный потенциал  $\check{V}(y) \equiv 0$ . Тогда соответствующая функция Йоста запишется в следующем виде:

$$f(x; k) = \frac{k - i\kappa(x)}{k + i\kappa(x)} \quad (53)$$

Отсюда, как следует из (28),  $\rho(x, k) = 2k/\pi = \check{\rho}(k)$ , т.е. спектральная функция непрерывного спектра совпадает со спектральной функцией свободного движения. Тогда из соотношений (27), (22) и (24) получаем выражения для ядер основных уравнений Гельфанда-Левитана

$$Q^{\text{ГЛ}}(x; y, y') = c^2(x) \frac{\sinh[\kappa(x)y] \sinh[\kappa(x)y']}{\kappa^2(x)}; \quad (54)$$

$$K^{\text{ГЛ}}(x; y, y') = -c^2(x) \phi(i\kappa(x), y) \frac{\sinh[\kappa(x)y']}{\kappa(x)} \quad (55)$$

и для регулярных решений на траектории  $k = \kappa(x)$

$$\phi(i\kappa(x), y) = \frac{\kappa(x) \sinh(\kappa(x)y)}{\kappa^2(x) + 1/2c^2(\sinh(2\kappa(x)y)/2\kappa(x) - y)} \quad (56)$$

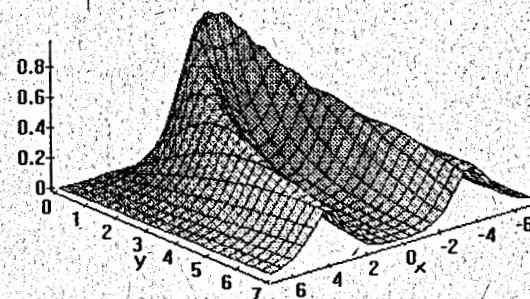
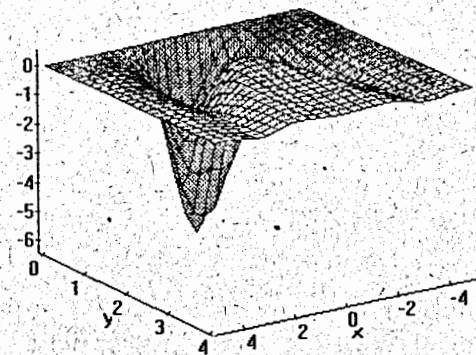


Рис. 6. Потенциал и собственная функция терма (1а), рассчитанные в подходе Гельфанда-Левитана

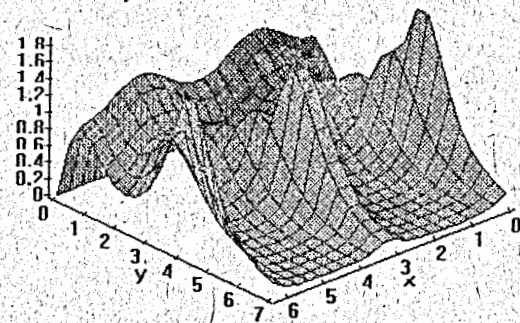
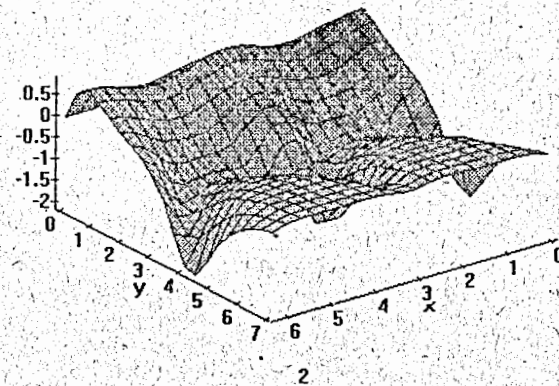
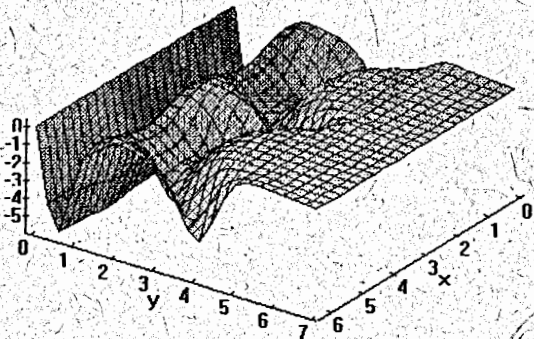
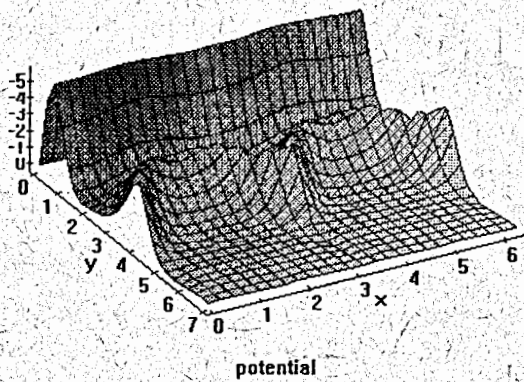
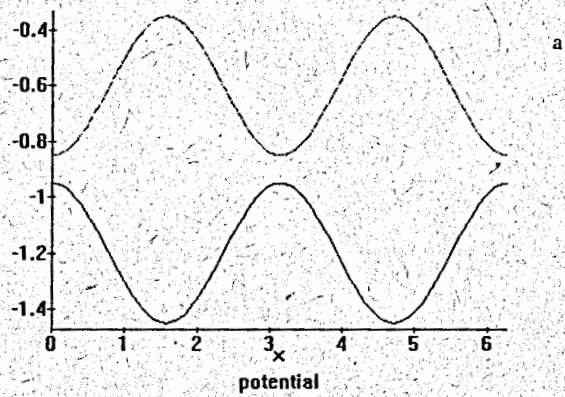


Рис.7

Рис. 7. Потенциал (б) и собственные функции (в,г), отвечающие периодическому изменению термов (7а)  $\mathcal{E}_1(x) = -(1/4)\cos(2x) - 0.6$ ,  $\mathcal{E}_2(x) = (1/4)\cos(2x) - 1.2$ . Потенциал представлен в нормальном (б) и перевернутом (б') положении.

Наконец, учитывая (56) в (55) и подставляя результат в соотношения (23), (24), получаем в явном виде соотношения для двумерного потенциала  $V(x, y)$  и для отвечающих ему решений при произвольном  $k$  с параметрической зависимостью от  $x$

$$V(x; y) = \frac{2\kappa(x)[y/2 - c^{-2}(x)\kappa^2(x)] \sinh 2(\kappa(x)y) - 2 \sinh^2(\kappa(x)y)}{[c^{-2}(x)\kappa^2(x) + 1/2[\sinh(2\kappa(x)y)/2\kappa(x)] - y]^2}, \quad (57)$$

$$\phi(x; k, y) = \frac{\sin ky}{k} - \frac{c^2(x) \sinh(\kappa(x)y)[\kappa(x) \cosh(\kappa(x)y) \sin ky - k \sinh(\kappa(x)y) \cos ky]}{k[\kappa^2(x) + k^2][\kappa^2(x) + 1/2c^2(x)(\sinh(2\kappa(x)y)/2\kappa(x)) - y]}. \quad (58)$$

Задавая в конкретном виде зависимость спектральных характеристик от параметра, моделируем соответствующие потенциал и решения параметрической задачи. На рисунке 6 приведен пример двумерного потенциала с одним термом, отвечающем симметричному и прозрачному по  $x$  потенциалу (52), и соответствующей ему волновой функции. Отметим, в данном случае потенциал не симметричен по другой переменной  $y$ .

Примеру с  $m$ -связанными состояниями и с потенциалом  $\dot{V}(y) \neq 0$  соответствует

$$f_+(x; k) = \overset{\circ}{f}(k) \prod_n^m \frac{k - i\kappa_n(x)}{k + i\kappa_n(x)}, \quad (59)$$

где термы  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$  определяются при решении многоканальной системы уравнений по медленным переменным и последующей диагонализации (79). Легко написать  $m$ -членное обобщение формул (54) - (57). Ядра основного уравнения Гельфанда - Левитана (22) запишутся следующим образом:

$$Q^{\Gamma\Lambda}(x; y, y') = \sum_n^m c_n^2(x) \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y] \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y']; \quad (60)$$

$$(61)$$

$$K^{\Gamma\Lambda}(x; y, y') = - \sum_n^m c_n^2(x) \phi(i\kappa_n(x), y) \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y']. \quad (62)$$

После чего, используя одно из соотношений обратной задачи (22) или (24), получим решения  $\phi[i\kappa_n(x), y]$  для связанных состояний  $\mathcal{E}_n(x) = -\kappa_n^2(x)$ , параметрически зависящих от динамической переменной  $x$

$$\phi[i\kappa_n(x), y] = \sum_j^m \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_j(x), y] P_{jn}^{-1}(x; y), \quad (63)$$

где

$$P_{nj}(x; y) = \delta_{nj} + c_n^2 \int_0^y \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y'] \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_j(x), y'] dy'.$$

Затем, подставляя полученное выражение для  $\phi[i\kappa_n(x), y]$  в соотношение (62) для ядра  $K^{\Gamma\Lambda}(x; y, y')$  и используя соотношения параметрической обратной задачи (22) - (24), получим в замкнутом аналитическом виде выражения для потенциала и решений

$$V(x; y) = -2 \frac{d^2}{dy^2} \ln \det ||P(x; y)||; \quad (64)$$

$$\phi(x; k, y) = \overset{\circ}{\phi}(k, y) - \sum_{nj}^m \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_j(x), y] P_{jn}^{-1}(x; y) \int_0^y \overset{\circ}{\phi}[i\kappa_n(x), y'] \overset{\circ}{\phi}(k, y') dy'.$$

Рисунок 7 демонстрирует пример спектрально эквивалентных по быстрой переменной двумерных потенциалов с двумя термами. Также как и в подходе Марченко, чувствительным к поведению термов оказывается не первый ближайший к нулю основной слой в потенциале, а более отдаленные по  $y$  его гребенки. Исследования легко провести в сферических координатах, выбирая в качестве быстрой переменной угол, медленной - координату и наоборот.

### 3.2 Точно решаемые модели для системы уравнений

Обратная задача для системы калибровочных уравнений (5) состоит из нескольких этапов: определение  $S(p)$  матрицы по известным многомерным амплитудам, далее, восстановление эффективных векторной,  $A(x)$ , и скалярной,  $V(x)$ , потенциальных матриц, а также соответствующих матриц решений,  $F = \{F_n\}$ . Использование унитарного калибровочного преобразования (9) позволяет перейти от системы уравнений (5) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с зацеплением за счет эффективной потенциальной матрицы (13). Осуществив это преобразование, можно применить стандартные методы многоканальной обратной задачи для системы уравнений (13), если известна соответствующая ей матрица рассеяния  $S(p)$  и данные по состояниям дискретного спектра: их положениям  $E_\lambda$  и нормировкам  $M_\lambda$ .

Поскольку задача данной статьи - исследование точно решаемых моделей, представим алгебраическую схему решения многоканальной обратной задачи в адиабатическом представлении, основываясь на результатах [13], [6], [5]. Вначале, используя технику вырожденных ядер, 1) определим в явном аналитическом виде потенциальную матрицу  $V(x)$  и отвечающую ей матрицу решений по данным рассеяния  $\{S'(p), \{M'_\lambda\}, \{E_\lambda\}\}$ ; 2) Перейдем от представления фиксированного базиса к представлению изменяющегося от слоя к слою базиса ( $\Gamma 1$ ), используя обратное унитарное преобразование. Это позволяет определить термы и соответствующие им функции нормировок. 3) Наконец, используя алгебраическую процедуру решения параметрической обратной задачи, определим двумерный потенциал и двумерные волновые функции термов. Это замкнутая процедура полного согласованного получения в аналитическом виде двумерных решений и потенциалов.

Знания термов в случае прозрачных симметричных потенциалов достаточно для однозначного восстановления двумерного потенциала и соответствующих ему решений, поскольку, как видно из соотношения (40), нормировки определены значениями энергий уровней. В обычном случае в зависимости от выбора нормировок восстанавливается семейство фазово-эквивалентных потенциалов. В нашем случае нормировки являются к тому же функциями координатной переменной  $x$ . При этом нормировочные функции связаны с соответствующими нормировками задачи фиксированного базиса соотношением (21). Однако определение матрицы диагонализации неоднозначная процедура, неоднозначно и определение потенциала. Так проявилась неоднозначность двумерной обратной задачи. В двухканальном случае неопределенность, связанная с процедурой диагонализации, исчезает. Этот случай поэтому очень удобен для исследования и используется здесь для конструирования некоторых точно решаемых моделей. Следует, однако, отметить, задание из физических соображений по определенному закону поведения нормировок позволяет однозначно выделить потенциал из непрерывного семейства эквивалентных потенциалов и получить в аналитическом виде соответствующие решения.

как это продемонстрировано на примере симметричных безотражательных по быстрой переменной потенциалов.

В обобщенном подходе Марченко [13, 5], когда опорный потенциал  $\dot{V}(x) \neq 0$ , основные матричные уравнения обратной задачи, соответствующие системе уравнений (13), следующие:

$$K(x, x') + Q(x, x') + \int_x^\infty K(x, x'') Q(x'', x') dx'' = 0, \quad (65)$$

$$V'(x) = \dot{V}'(x) - 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad (66)$$

$$F'(x, p) = \dot{F}'(x, p) + \int_x^\infty K(x, x') \dot{F}'(x', p) dx'. \quad (67)$$

Система уравнений Марченко (65) решается относительно матричного ядра обобщенного сдвига  $K(x, x')$  при известном ядре  $Q(x, x')$ , определяемом данными рассеяния  $\dot{S}'(p)$ ,  $\{M'_\lambda\}$ ,  $\{E_\lambda\}$  и  $\dot{S}'(p)$ ,  $\{M'_\lambda\}$ ,  $\{E_\lambda\}$ , соответствующими системе уравнений (13) с потенциальными матрицами  $V'(x)$  и  $\dot{V}'(x)$ :

$$Q^M(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}'(x, p) [\dot{S}'(p) - \dot{S}'(p)] \dot{F}'(x', p) dp + \sum_\lambda^N \dot{F}'(x, i\kappa_\lambda) M'_\lambda \dot{F}'(x', i\kappa_\lambda) - \sum_\lambda^N \dot{F}'(x, i\kappa_\lambda) M'_\lambda \dot{F}'(x', i\kappa_\lambda). \quad (68)$$

Решения Йоста  $\dot{F}'(x, i\kappa_\lambda)$  и  $\dot{F}'(x, i\kappa_\lambda)$  системы (13) с матрицей  $\dot{V}'(x)$  должны быть взяты при энергиях связанных состояний  $E_\lambda$  и  $\dot{E}_\lambda$ , обеих задач с  $V'(x)$  и  $\dot{V}'(x)$ , соответственно.

Рассмотрим достаточно простую ситуацию, когда искомый потенциал добавляет несколько связанных состояний, оставляя данные рассеяния или спектральные характеристики исходной задачи без изменений. Учитывая факторизацию пормировочных матриц в подходе Марченко, ядро  $Q(x, x')$  может быть записано в виде:

$$Q^M(x, x') = \sum_\lambda^N \dot{F}'(x, i\kappa_\lambda) |\Gamma_\lambda\rangle \langle \Gamma_\lambda| \dot{F}'(x', i\kappa_\lambda) = \sum_\lambda^N |\chi'(x, i\kappa_\lambda)\rangle \langle \chi'(x', i\kappa_\lambda)| = \chi'^T(x) \chi'(x'). \quad (69)$$

Здесь вектор решений  $\chi'$  комбинируется из матричных элементов решений Йоста  $\dot{F}'$  системы уравнений (13) с известной потенциальной матрицей  $\dot{V}'(x)$ , взятых при энергиях

$E_\lambda = (i\kappa_\lambda)^2$  добавляемых связанных состояний:

$$|\chi'(x, i\kappa_\lambda)\rangle = \dot{F}'(x, i\kappa_\lambda) |\Gamma_\lambda\rangle \quad \text{или} \quad \chi'_i(x, i\kappa_\lambda) = \sum_j^m \dot{F}'_{ij}(x, i\kappa_\lambda) \gamma_j^\lambda. \quad (70)$$

Отметим, что суммирование проводится по числу  $m$  каналов (термов, в нашем случае). В таком же факторизованном виде, как (69), можно записать ядро уравнений Гельфанда-Левитана  $Q^{\Gamma\Gamma}$ , где вектор решений (70) заменяется на вектор, который комбинируется из матричных элементов регулярных решений  $\Phi'$

$$|\chi'(x, i\kappa_\lambda)\rangle = \Phi'(x, i\kappa_\lambda) |C_\lambda\rangle. \quad (71)$$

Приведем алгебраические соотношения для матричного ядра обобщенного сдвига  $K(x, x')$  потенциальных матриц и решений [20], получающиеся теперь из основных уравнений обратной задачи (65) - (67) не сложнее, чем в одноканальном случае. Матрица ортогонализации  $K(x, x')$  так же, как и  $Q(x, x')$ , представима в виде суммы факторизованных членов:

$$K^M(x, x') = - \sum_\lambda^N |\chi'(x, i\kappa_\lambda)\rangle \langle \chi'(x', i\kappa_\lambda)| = - \chi'^T(x) \chi'(x'). \quad (72)$$

Каждый элемент вектора решений  $|\chi'(x, i\kappa_\lambda)\rangle$  определяется после подстановки (69) и (72) в (65)

$$|\chi'(x, i\kappa_\lambda)\rangle = \sum_\nu^N |\chi'(x, i\kappa_\nu)\rangle P_{\nu\lambda}^{-1}(x). \quad (73)$$

При этом матричные элементы  $P_{\nu\lambda}(x)$  не зависят от индексов каналов

$$P_{\nu\lambda}(x) = \delta_{\nu\lambda} + \sum_j^m \int_x^\infty \chi'_j(x', i\kappa_\nu) \chi'_j(x', i\kappa_\lambda) dx'. \quad (74)$$

Тогда

$$K(x, x') = - \chi'^T(x) P^{-1}(x) \chi'(x'), \quad (75)$$

или в матричной записи -

$$K_{ij}(x, x') = - \sum_\nu^\lambda \chi'_i(x, i\kappa_\nu) P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \chi'_j(x', i\kappa_\lambda).$$

Как следует из соотношений (66), (67), баргмановская потенциальная матрица и решения Йоста при любых импульсах  $p$  записываются в виде

$$V'(x) = \dot{V}'(x) + 2 \frac{d}{dx} \chi'^T(x) P^{-1}(x) \chi'(x), \quad (76)$$

$$F'_\pm(x, p) = \dot{F}'_\pm(x, p) - \chi'^T(x) P^{-1}(x) \int_x^\infty \chi'(x') \dot{F}'_\pm(x', p) dx'. \quad (77)$$



Аналогичен вывод соотношений (76), (77) при сдвиге уровней, осуществляемом в задачах с разными потенциальными матрицами  $V(x)$  и  $\dot{V}(x)$ . Соотношения для  $Q^M$  и  $Q^{\Gamma L}$  (69), а также для  $K^M$  и  $K^{\Gamma L}$  (72) в этом случае записываются с вычитанием еще одной суммы факторизованных слагаемых, определяемых спектральными характеристиками  $\{\gamma_\lambda, \kappa_\lambda\}$  исходной потенциальной матрицы  $\dot{V}'(x)$ .

Возвращаясь к представлению подвижного репера  $|\psi(x, y)\rangle$ , получаем следующие соотношения:

$$\Delta V(x) = V(x) - \dot{V}(x) = -2U^{-1}(x) \frac{d}{dx} K(x, x) U(x). \quad (78)$$

Если базисные функции параметрической задачи заранее не известны, то после определения потенциальной матрицы  $V'(x) = U(x)h^J(x)U^{-1}(x)$  и решений  $\chi'$  системы (13) по обычным или обобщенным многоканальным формулам Гельфанда - Левитана - Марченко (65) - (67) найдем бислокальный оператор переноса  $U(x)$  и термы  $\mathcal{E}(x)$  в результате решения алгебраической задачи на собственные значения [13]

$$V'(x)U(x) = U(x)V'(x) = U(x)\mathcal{E}(x). \quad (79)$$

Это способ нахождения термов из решения многоканальной обратной задачи, а не прямой для реперного уравнения (14). Знание  $U(x)$  позволяет восстановить по формулам (6) и (12) также матрицу эффективного вектора-потенциала, ответственного за появление потенциала, зависящего от скорости.

### 3.3 Двумерные точно решаемые модели, полученные в согласованной постановке

Пользуясь изложенной выше техникой вырожденных ядер, приведем пример аналитического моделирования двумерной задачи, полученный при аналитическом решении системы медленных уравнений и параметрической задачи. В целях максимального упрощения в качестве опорного потенциала при восстановлении матрицы потенциального взаимодействия  $V'(x)$  возьмем  $\dot{V}'(x) = 0$ . Для безотражательных потенциалов по медленной переменной в  $Q^M(x, x')$  остается лишь сумма по связанным состояниям

$$Q_{ij}(x, x') = \sum_{\lambda} \exp(-\kappa_i^\lambda x) \gamma_i^\lambda \gamma_j^\lambda \exp(-\kappa_j^\lambda x'). \quad (80)$$

Из соотношений (75), (76) и (77) легко получить явный вид для матричных элементов потенциала и решений, если принять во внимание, что в данном случае выражение (70) переписывается в очень простой форме

$$\dot{\chi}'_i(x, i\kappa_\lambda) = \sum_j F'_{ij}(x, i\kappa_\lambda) \gamma_j^\lambda = \exp(-\kappa_i^\lambda x) \gamma_i^\lambda, \quad (81)$$

поскольку решения Йоста переходят в решения свободного распространения

$$F'_{ij}(x, i\kappa_\lambda) = \delta_{ij} \gamma_j^\lambda \exp(-\kappa_j^\lambda x).$$

Учитывая соотношение (81) в (76) выражение для потенциала  $V'$  переписывается в следующем явном виде:

$$V'_{ij}(x) = 2 \frac{d}{dx} \sum_{\nu\lambda} \exp(-\kappa_i^\nu x) \gamma_i^\nu P_{\nu\lambda}^{-1}(x) \gamma_j^\lambda \exp(-\kappa_j^\lambda x), \quad (82)$$

где

$$P_{\nu\lambda} = \delta_{\nu\lambda} + \sum_{j'} \frac{\gamma_{j'}^\nu \gamma_{j'}^\lambda}{\kappa_{j'}^\nu + \kappa_{j'}^\lambda} \exp(-(\kappa_{j'}^\nu + \kappa_{j'}^\lambda)x).$$

Ограничимся рассмотрением примера "прозрачных" потенциальных матриц с двумя каналами в подходе Марченко  $i, j = 1, 2$ . Из процедуры диагонализации (79) потенциальной матрицы  $V' = U^{-1}(x)V'(x)U(x) = \mathcal{E}(x)$  получаем  $U(x)$ .  $\mathcal{E}(x)$  и  $\delta(x)$ :

$$U(x) = \begin{pmatrix} \cos\delta(x) & \sin\delta(x) \\ -\sin\delta(x) & \cos\delta(x) \end{pmatrix}, \quad (83)$$

где

$$\delta(x) = \int A_{12}(x') dx'.$$

Из этих соотношений следует

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1 \cos^2\delta + \mathcal{E}_2 \sin^2\delta & (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \cos\delta \sin\delta \\ (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) \cos\delta \sin\delta & \mathcal{E}_1 \sin^2\delta + \mathcal{E}_2 \cos^2\delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V'_{11} & V'_{12} \\ V'_{21} & V'_{22} \end{pmatrix}.$$

В результате имеем

$$\operatorname{tg} 2\delta(x) = \frac{2V'_{21}(x)}{V'_{11}(x) - V'_{22}(x)} \quad \text{или} \quad \sin 2\delta(x) = \frac{2V'_{21}(x)}{\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x)}. \quad (84)$$

$$\mathcal{E}_1(x) = \frac{V'_{11}(x) + V'_{22}(x)}{2} + \frac{V'_{12}(x)}{\sin 2\delta(x)}, \quad \mathcal{E}_2(x) = \frac{V'_{11}(x) + V'_{22}(x)}{2} - \frac{V'_{12}(x)}{\sin 2\delta(x)}. \quad (85)$$

Для восстановления двумерного потенциала  $V(x)$  на втором этапе по спектральным данным  $\{\mathcal{E}_i(x), \gamma_i^2(x)\}$ , являющимися функциями медленной переменной  $x$ , используем параметрическую обратную задачу (22) - (24) по восстановлению  $V(x, y)$  и  $\psi(x, y)$  для быстрого динамического уравнения (2) или (14) при каждом фиксированном значении  $x$ . При этом для параметрического семейства обратных задач техника баргмановских потенциалов, разделы (3.1.1), (3.1.2), позволяет в явном аналитическом виде конструировать решения  $\psi(x, y)$  и потенциал  $V(x, y)$  в рамках последовательного подхода адиабатического представления.

На рисунках (8а)-(8д) представлен пример самосогласованного аналитического решения полной задачи для потенциала прозрачного как по медленной, так и по быстрой переменным. Обе задачи решены в модифицированных подходах Марченко для двухканальной системы уравнений и параметрического уравнения Шредингера. Исследуется система с двумя связанными состояниями. Для выбранных значений параметров: энергий связанных состояний  $E_1 = -0.5, E_2 = -1$  и их нормировок  $\{\gamma_j^\lambda\}$ :  $\gamma_1^1 = 1, \gamma_2^1 = 2, \gamma_1^2 = 0.5, \gamma_2^2 = 0.24$  — найдена безотражательная потенциальная матрица,

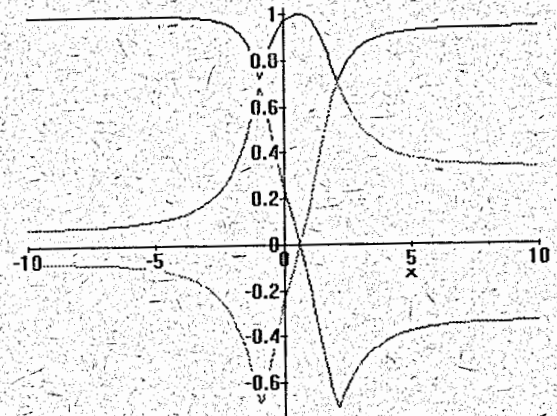
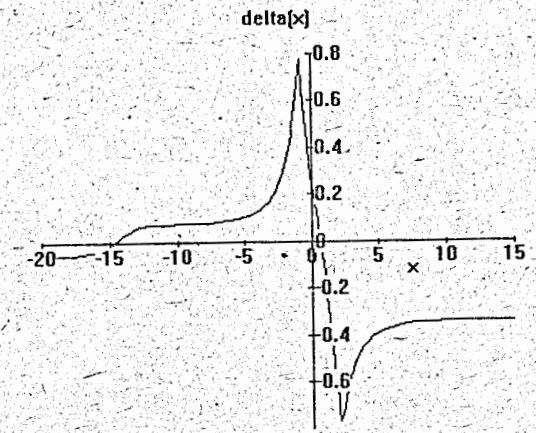
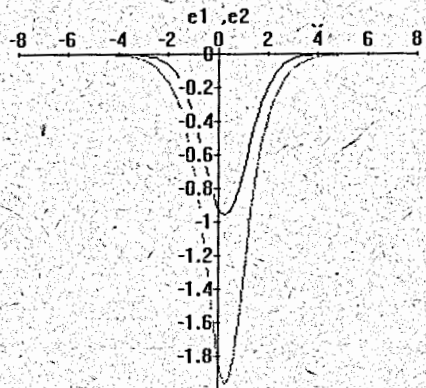
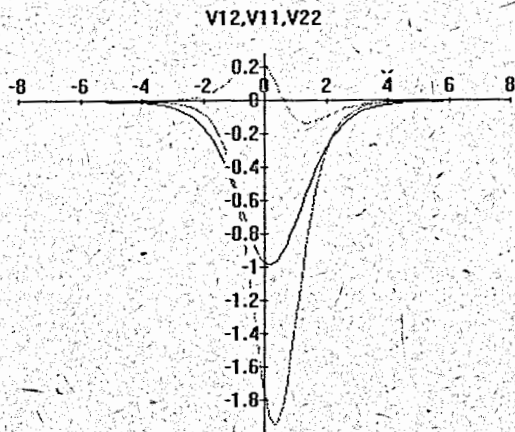
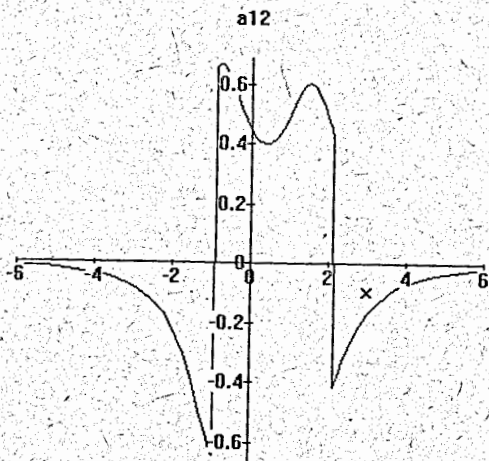
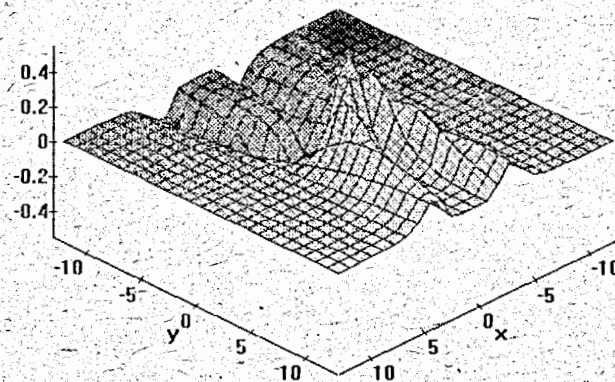


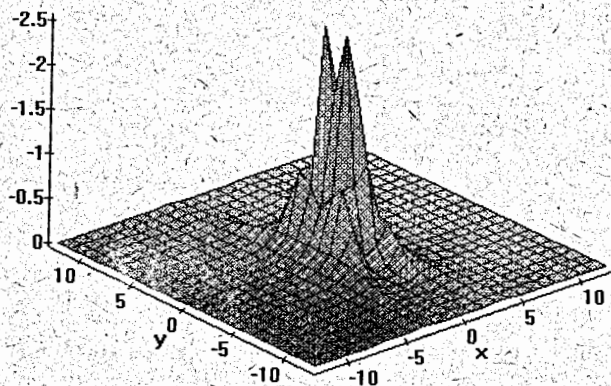
Рис. 8. Пример самосогласованного восстановления двумерного потенциала, безотражательного по обеим координатным переменным и симметричного по  $y$  в силу выбора нормировок в виде (40): (а) Элементы безотражательной потенциальной матрицы; (б) термы, рассчитанные по формуле (84); (в)  $\delta(x)$ , полученное с использованием формул (83); (г) матричные элементы  $U(x)$ ,  $U_{11}(x)$  - верхняя кривая; (д) векторный потенциал  $A_{12}(x)$ ; (е) двумерный потенциал и (ж,з) соответствующие ему нормированные функции термов.



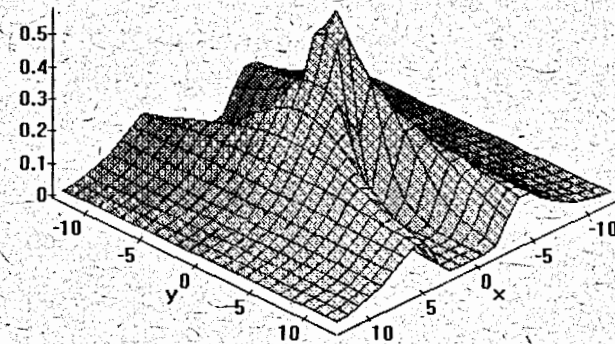
д



ж



е



з

Рис. 8.

элементы которой  $V'_{11}(x)$ ,  $V'_{12}(x)$ ,  $V'_{21}(x) = V'_{12}(x)$ ,  $V'_{22}(x)$  графически представлены на рисунке 8а. Рассчитанные с помощью процедуры диагонализации (85) термы  $\mathcal{E}_1(x)$ ,  $\mathcal{E}_2(x)$  изображены на рисунке 8б. На рисунке 8в представлен фазовый фактор  $\delta(x)$ , входящий в определение матрицы диагонализации  $\mathcal{U}(x)$  (83) (рис. 8г). На рисунке 8д изображен векторный потенциал  $A(x)$  и, наконец, на рис. 8е, 8ж, 8з представлены двумерный потенциал и соответствующие ему волновые функции термов. Симметричный безотражательный по  $y$  потенциал имеет, как мы уже могли увидеть из предыдущих примеров, некоторую структуру по  $y$ : основной слой и несколько слабых быстро затухающих слоев. Интересно поведение фактора  $\delta(x)$ , который, как оказывается, имеет несколько максимальных значений, никак не связанных с проблемой пересечения уровней Лапдау [21]. Простой анализ формулы (84) показывает, что  $\delta(x)$  достигает своего максимального значения не только при сближении термов, но и когда  $2V'_{21}(x) = (\mathcal{E}_1(x) - \mathcal{E}_2(x))$  либо когда  $2V'_{21}(x) = (V'_{11}(x) - V'_{22}(x))$  или  $V'_{11}(x) = V'_{22}(x)$ . Совершенно очевидно как генерировать точно решаемые модели на основе подхода Гельфанда - Левитана и параметрической обратной задачи как в подходе Гельфанда - Левитана, так и Марченко. Выбор зависит от конкретной задачи.

#### 4. Заключение

В рамках обратной задачи в адиабатическом представлении конструируется ряд точно решаемых двумерных моделей. Приведены некоторые примеры точно решаемых моделей на основе развиваемой техники баргмаповских потенциалов для параметрического семейства обратных задач и для систем уравнений с ковариантной производной как при их согласованном решении в последовательном подходе, так и на основе только параметрической обратной задачи, представляющей самостоятельный интерес. С использованием формализма обратной задачи в подходах Гельфанда - Левитана и Марченко анализируются различные ситуации как с периодической структурой термов, так и обычного аналитического поведения термов. Очевидно, что обратная задача в адиабатическом подходе открывает не только широкие возможности конструирования точно решаемых моделей в пространстве нескольких измерений  $N \geq 2$ , но и послужит удобным аппаратом исследования различных физических проблем, в частности, проблемы пересечения уровней и геометрических аспектов теории рассеяния, возникающих в сложных динамических системах.

Авторы благодарны фонду Сороса за финансовую поддержку (гранты No.NK8000 и No.NK8300).

#### Литература

1. Born M., Nachr. Acad. Wiss. Gottingen, 1951, Bd.1, N.6; s.1; Борн М., Хуан Кунь. Динамическая теория кристаллических решеток. М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
2. Macek J., J.Phys. 1968, V.B1: P.831.
3. Виицкий С.И., Пономарев Л.И., ЭЧАЯ. 1982. Т.13. вып.6, С.1336.
4. Dubovik V.M., Markovski B.L., Suzko A.A., Vinitsky S.I., Phys. Lett. 1989. A142. P.133.

5. Сузько А.А., ЭЧАЯ. 1993. Т.24, вып.4, С.1133-1213.
6. Suzko A.A., "Multidimensional and three-body inverse scattering problems in the adiabatic representation", Lecture Notes in Physics, "Quantum Inversion Theory and Applications" (Ed. H.V.von Geramb), 1993. Vol. 427. Springer-Verlag. Heidelberg. P.67-106.
7. Vinitsky S.I., Suzko A.A., Markovski B.L., et al. "Proc. Int. Seminar Topological Phases in Quantum Theory. Dubna, 2-4 September 1988". World Scientific Singapore, 1989. P.173-203.
8. Виицкий С.И., Марковски Б.Л., Сузько А.А., ЯФ. 1992. 55. P.669; Виицкий С.И., Кадомицев М.Б., Сузько А.А., ЯФ. 1990. 51. P.952.
9. Berry M., Proc.R.Soc.Lond. 1984. A 392. P.45.
10. Mead C.A., Phys.Rev.Lett. 1987. 59. P.161; Rev.Mod.Phys. 1992. 64. P.51.
11. Bulgar A., Phys.Rev.Lett. 1991. 67. P.965; Kuznetsov D., Phys. Lett. 1993. B 319. P.381.
12. Suzko A.A., Velicheva E.P., "Proc. VII Intern. Conf. on Symmetry Methods in Physics". Dubna, 10-16 July, 1995; "Proc. Int. Conf. on Few Body Systems". Spain, Juni, 1995.
13. Виицкий С.И., Сузько А.А., ЯФ. 1990. Т.52. С.686.
14. Сузько А.А., ЯФ. 1992. Т.55. С.2161.
15. Kuperin Yu.A., et al., Annals of Phys. 1991. V.25. P.330; Куперин Ю.А., Мельников Ю.Б., Mat. Сборник 1991. Т.82. No.2. С.236.
16. Захарьев Б.П., Сузько А.А. Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985. 224с.; 2-ое изд. Direct and inverse problems. (Potentials in quantum scattering) Springer-Verlag. Berlin Heidelberg/New York, 1990, 223p.)
17. Ньютон Р. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969. 608с.; 2nd Ed. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1982.
18. Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1985.
19. Шадап К., Сабатье П. Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Мир, 1980. 408 С.; 2-ое изд. New York: Springer-Verlag, 1990.
20. Plekhanov E.B., Suzko A.A., Zakhariev B.N., Ann. der Phys. 1982. Vol.39. P.313.
21. Лапдау Л. и Лифшиц Е. Квантовая механика. Т.3. изд.3. 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел  
17 августа 1995 года.