ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-248

Р4-95-248

Б.Н.Захарьев, В.М.Чабанов

СОЗДАНИЕ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ, ПОГРУЖЕННЫХ В НЕПРЕРЫВНЫЙ СПЕКТР, «СГРЕБАНИЕМ» (КОМПАКТИФИКАЦИЕЙ) ВОЛН РАССЕЯНИЯ

Направлено в журнал «Physica Scripta»

1995

Физика слишком сложна для физиков.

Д.Гильберт.

Часто можно сделать ее проще.

ВВЕДЕНИЕ

Математический аппарат квантовой обратной задачи [1] и теории суперсимметрии [2] позволяет изменять по желанию энергии любых избранных уровней связанных состояний [3,4] и сдвигать положения этих состояний в пространстве [3,4], см. рис.1 , взятый из [3].

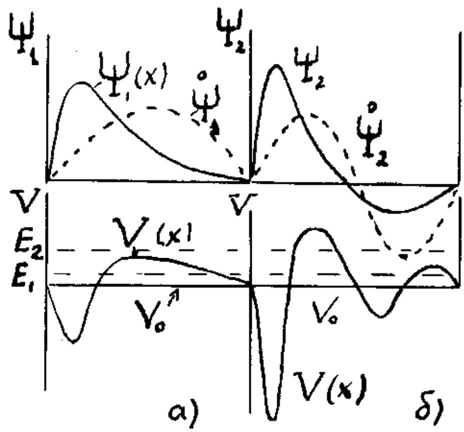


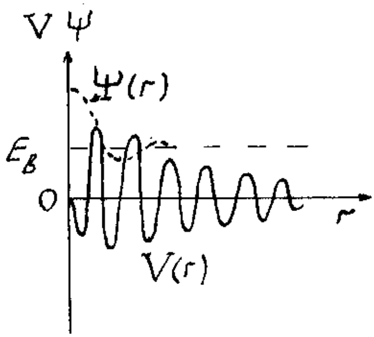
Рис.1. Увеличение производной $\psi'(x = 0)$ избранного связанного состояния исходной прямоугольной потенциальной ямы при сохранении нормировки волновой функции приводит к концентрации распределения вероятности данного состояния вблизи начала координат: а) – трансформация основного состояния и соответствующее возмущение плоского дна исходной ямы, б) – трансформация второго состояния. В пределе $\psi'(x = 0) \to \infty$ происходит "впрессовывание" избранного состояния в стенку в начале координат

Возможно также управление свойствами состояний непрерывного спектра (отражением, прозрачностью, параметрами резонансов). Существенно, что все это можно делать с помощью простых аналитических формул, которым отвечают точно решаемые модели. Нам удалось извлечь физический смысл из соответствующих формул, выявить универсальные "атомы" потенциальных возмущений, осуществляющие такие преобразования (квантовый дизайн). Замечательно, что при этом отдельные островки квантовой интуиции постепенно сливались в единую качественную теорию управления спектрами, рассеянием, распадами.

Нейман и Вигнер [5] первыми получили формулы для связанных состояний в континууме (ССК). Позднее соответствующие исследования предпринимались рядом других авторов [6 – 8]

В данной работе удалось распространить на состояния непрерывного спектра интуитивные представления о потенциальных возмущениях, смещающих в пространстве связанные состояния. Оказалось, что возмущениями того же типа можно "собирать" (компактифицировать) в ССК состояния рассеяния, "размазанные" по всей полуоси. Потенциалы, запирающие избранные состояния в непрерывном спектре (резонансные состояния с нулевой шириной), представляют собой медленно (как $\sim 1/r$) затухающие осцилляции, скоррелированные с соответствующими осцилляциями волновых функций при избранной энергии, см. рис.2., взятый из [6], 1975.

Рис.2. Потенциал, осуществляющий запирание (конфайнмент) связанного состояния в непрерывном спектре при фиксированной энергии E_b, и соответствующая волновая функция



Для состояний рассеяния, соседних с ССК, нарушается строгая когерентность колебаний потенциала и функций, и свойства потенциала собирать волновую функцию остаются лишь на конечных участках полуоси r. Вне этих участков колебания функций и потенциала оказываются в "противофазе" и происходит вытеснение волновой функции на ближайшие софазные участки. Интенсивность таких "сгребаний" и вытеснений ослабляется с ростом r, что приводит к затухающим при больших r биениям осцилляций $\psi(x)$, см. рис.3.

На асимптотике эти решения переходят в свободные волны без фазового сдвига (полная взаимная компенсация сгребаний и расталкиваний колебаний). Точнее, в точке связанного состояния, погруженного в непрерывный спектр, происходит скачок фазы на π в соответствии с обобщенной теоремой Левинсона (см. гл.4 в [1], 1990). При приближении энергии состояния рассеяния к энергии ССК период таких биений неограниченно возрастает, и в пределе на всей полуоси помещается лишь одно биение, которое и представляет собой ССК (рис.2).

Предложенная здесь единая точка зрения на связанные состояния и состояния рассеяния расширяет квантовую интуицию.

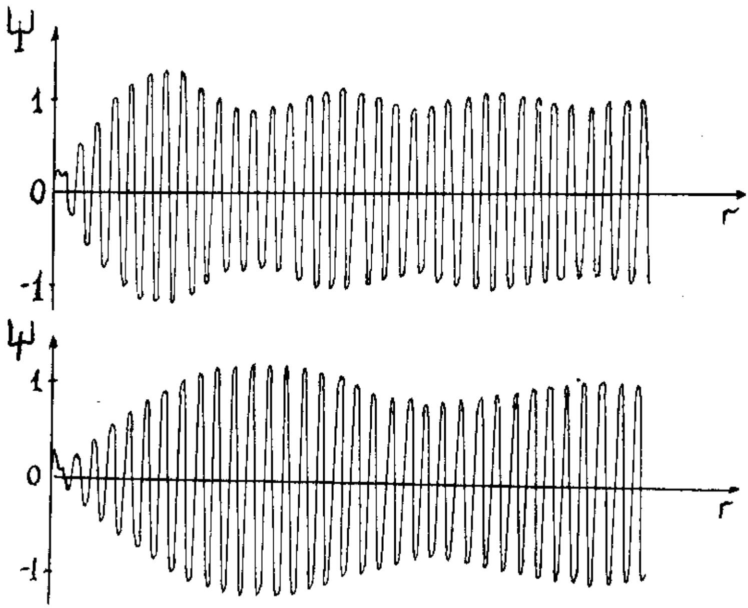


Рис.3. Функции рассеяния, отвечающие разным энергиям, соседним с энергией ССК. Для них нарушается корреляция их колебаний с осцилляциями потенциала, что приводит к их "сгребанию" лишь на конечных участках координатной оси, проявляющемуся в биениях, затухающих на бесконечности. Асимптотика таких функций совпадает с невозмущенными решениями (с нулевыми сдвигами фаз)

ФУНКЦИИ РАССЕЯНИЯ КАК "СВЯЗАННЫЕ" СОСТОЯНИЯ (РАСПРЕДЕЛЕННЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ С НУЛЕВОЙ ПЛОТНОСТЬЮ)

Рассмотрим самый простой случай волновой функции непрерывного спектра, когда потенциал тождественно равен нулю. Функцией свободного движения на полуоси $0 < r < \infty$ при фиксированной энергии $E_b = k_b^2$ является $sin(k_b r)$, см.рис.4.

Обычно функции рассеяния нормируются на δ-функцию, но оказы-

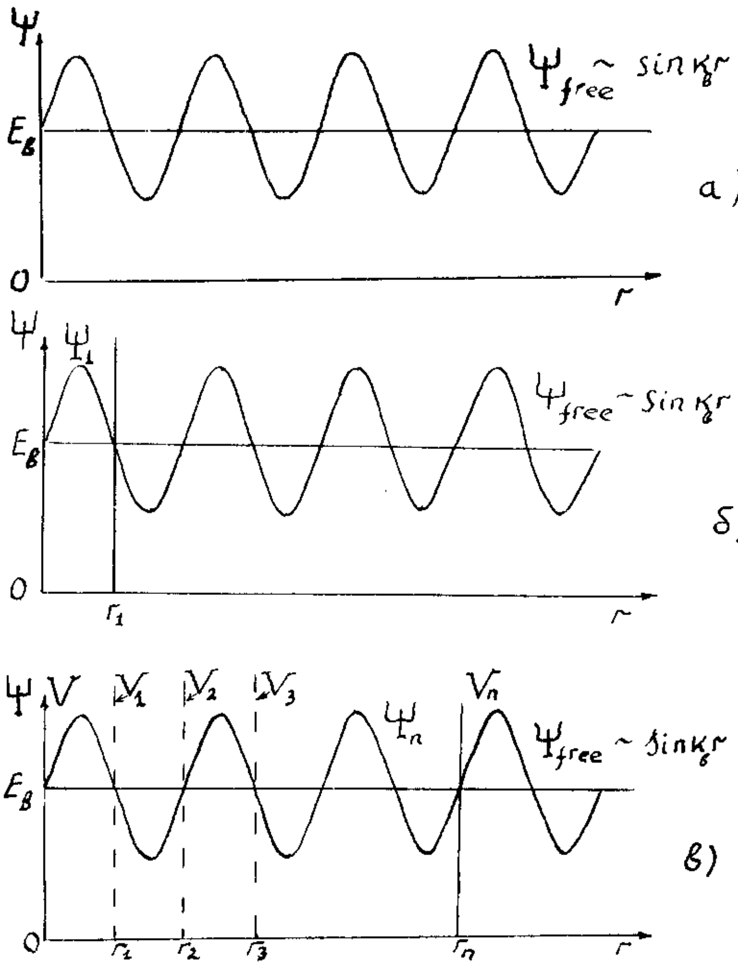


Рис.4. а) Свободная волновая функция рассеяния $sin(k_b r)$ при фиксированной энергии в непрерывном спектре $E_b = k_b^2$. б) Бесконечная непроницаемая потенциальная стенка в точке первого узла $sin(k_b r)$ создает бесконечно глубокую потенциальную яму, в которой полуволна рассеяния совпадает с волновой функцией связанного состояния. в) При стенке,сдвинутой в n- й узел $sin(k_b r)$,уже n-е связанное состояние новой ямы в точности совпадает со свободным решением рассеяния внутри ямы. В пределе $n \to \infty$ вся функция рассеяния может рассматриваться как связанное состояние, рассредоточенное по всей полуоси $0 < r < \infty$; только если нормировать его на 1, нужно ввести исчезающе малый нормировочный множитель $\sim 1/\sqrt{n}$

вается, с ними можно поступить, как со связанными состояниями, и нормировать на 1. Если поместить в точке первого узла $r = \pi/k_b$ этой функции бесконечную непроницаемую потенциальную стенку, то первая полуволна этого синуса совпадет с основным связанным состоянием $\psi(E_b, x)$ в образовавшейся бесконечной прямоугольной потенциальной яме. Чтобы нормировать полученную функцию на единицу, нужно умножить синус на $\sqrt{2k_b/\pi}$. Передвинем теперь потенциальную стенку в точку $r = 2\pi/k_b$ второго узла свободной волны. Теперь на конечном отрезке удвоенной длины синусоида $sin(k_b r)$ будет в точности совпадать с волновой функцией второго связанного состояния в более широкой яме. Для ее нормировки на единицу потребуется фактор $\sqrt{k_b/\pi}$. Продолжая расширение ямы, мы получим на n-шаге n-е состояние прямоугольной ямы, точно совпадающее с выбранной синусоидой, а соответствующая нормировка будет $\sqrt{2k_b/(n\pi)}$. В пределе $n \to \infty$ мы получим "связанное" состояние $\psi(E_b, x)$ бесконечно широкой прямоугольной ямы с бесконечно малым нормировочным фактором, но нормированную на единицу $\int_0^\infty \psi^2(E_b, x)dx = 1$. Это подобно тому, как бесконечно узкий пик δ-функции имеет единичную площадь $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$.

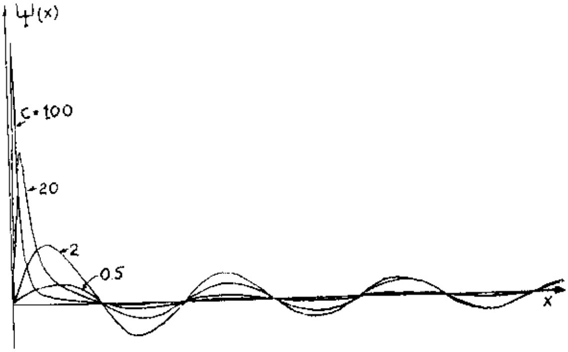


Рис.5. Волновые функции ССК, полученные из состояний рассеяния, нормированных на единицу, при разных значениях весовых спектральных факторов "с" (значениях производных в начале координат). С ростом "с" ССК все сильнее прижимается к началу координат

Каждое из рассмотренных выше связанных состояний можно было, пользуясь алгоритмами обратной задачи [3,4], подвинуть к одной из стенок бесконечно глубокой ямы с помощью волнообразного возмущения плоского дна исходных потенциальных ям, как это показано для двух нижних состояний на рис.1. Но тот же самый алгоритм годится и в предельном случае, когда производная нормированной волновой функции в начале координат может быть сделана как угодно большой. На рис.5 показаны функции ССК при последовательном увеличении

$\psi'(E_b,0)$ и соответствующие им потенциальные возмущения. Для большей концентрации функции у начала координат требуются возмущающие потенциалы со все большей амплитудой колебаний, см. рис.6.

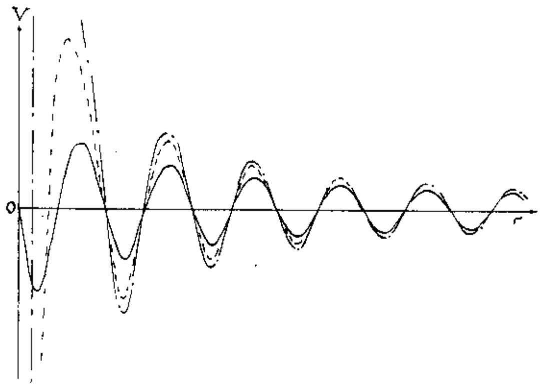


Рис.6. Потенциалы, запирающие ССК, типа изображенных на рис.5. С ростом параметра "c" ближайшие к началу координат ямка и барьер все сильнее концентрируют ССК у точки $r = 0$

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Формула трансформации потенциала при изменении нормировочного фактора $\overset{\circ}{c} \to c$ имеет вид (мы используем обозначение $\delta c_\nu^2 = c_\nu^2 - \overset{\circ}{c}{}_\nu^2$):

$$v(r) = \overset{\circ}{v}(r) - 4\,\delta c_\nu^2\, \overset{\circ}{\varphi}{}'(\overset{\circ}{E}_\nu, r)\, \overset{\circ}{\varphi}(\overset{\circ}{E}_\nu, r) p^{-1}(r) + 2(\delta c_\nu^2)^2\, \overset{\circ}{\varphi}{}^4(\overset{\circ}{E}_\nu, r) p^{-2}(r), \quad (1)$$

где

$$p(r) = 1 + \delta c_\nu^2 \int\limits_0^r \overset{\circ}{\varphi}{}^2(\overset{\circ}{E}_\nu, t)dt.$$

Формула же для возмущенного решения $(\varphi(E,0) = 0, \varphi'(E,0) = 1)$ при произвольном E, не равном E_ν, записывается в виде:

$$\varphi(E,r) \;=\; \overset{\circ}{\varphi}(E,r) - \delta c_\nu^2\, \overset{\circ}{\varphi}(\overset{\circ}{E}_\nu, r) p^{-1}(r) \int\limits_0^r \overset{\circ}{\varphi}(\overset{\circ}{E}_\nu, t)\, \overset{\circ}{\varphi}(E,t)dt. \quad (2)$$

А решение при E_ν есть

$$\varphi(\overset{\circ}{E}_\nu, r) = \overset{\circ}{\varphi}(\overset{\circ}{E}_\nu, r) p^{-1}(r). \quad (3)$$

Случай порождения ССК на склоне исходного линейного потенциала был рассмотрен в работе [7]. При этом потенциальные возмущения, запирающие связанное состояние, неограниченно возрастают по амплитуде с удалением от точки поворота в сторону от барьера.

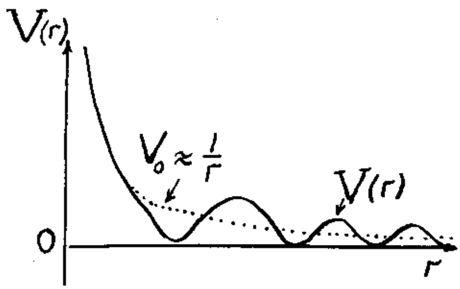


Рис.7. Связанное состояние в континууме, образованное при исходном отталкивающем кулоновском потенциале [8]. Обратите внимание на то, что связанное состояние удерживается чисто отталкивающим потенциалом

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интересно распространить результаты этой работы на многоканальный случай. При этом могут быть рассмотрены одинаковые и разные пороги, наличие закрытых каналов. Примеры многоканальных ССК рассматривались раньше в [1].

Авторы благодарны РФФИ и фонду Сороса за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Newton R.-*Scattering Theory of Waves and Particles*, 2nd ed. NY, Springer, 1982.

Zakhariev B.N., and Suzko A.A.-*Direct and Inverse Problems*, Heidelberg, Springer-Verlag, 1990.

[2] Cooper F., Khare A., Sukhatme U.-Phys.Rep. 1995, **251**, N 5,6, p.268 (см. также ссылки в этом обзоре).

Andrianov A.A., Ioffe M.V., and Spiridonov V.P.-Phys. Lett. **A 174**, 1993, p.273.

Березовой В.П., Пашнев А.И.-ТМФ, **70**, 1987 с.146; **74**, 1988, с.392; Berezovoy V.P., Pashnev A.I.-Z.Phys.**C 51**, 1991, p.525.

[3] Pöschel J. and Trubowitz E.-*Inverse Spectral Theory*, New York, Academic, 1987.

[4] Zakhariev B.N. , Chabanov V.M.-Rev.Mod.Phys. (submitted 1995).

Захарьев Б.Н., Костов Н., Плеханов Е.Б.-*Точно решаемые одно- и многоканальные модели (Уроки квантовой интуиции I)*, ЭЧАЯ, **21**, 1990, N4, с.914.

Захарьев Б. Н.-*Дискретная и непрерывная квантовая механика*, *точно решаемые модели (Уроки квантовой интуиции II)*, ЭЧАЯ, **23**, 1992, N5, с.603.

Захарьев Б.Н., Чабанов В.М.-*Качественная теория управления спектрами, рассеянием, распадами (Уроки квантовой интуиции III)*, ЭЧАЯ, **25**, 1994, N6, с.1561.

Захарьев Б.Н.*Уроки квантовой интуиции* (в печати, но можно скопировать у автора на дискету ее LaT_EX вариант).

[5] Neuman J., Wigner E.– Phys.Z. 1929, **30**, p.465.

[6] Stillinger F.H. and Herrik D.R.– Phys.Rev. **A 11**, 1975, p.446.

Meyer-Vernet N.–Am.J.Phys., 1982, **50**, p.353.

Eastham M.S.P., Kalf H.–*Schrödinger-type Operators with continuous Spectra*, London, Pitman, 1982;

Рид М., Саймон Б.–*Методы современной математической физики.* т.3, М.: Мир, 1982.

[7] Calogero F., Degasperis A.–Lett.Nuovo Cim. 1978, **23**, p.143.

Capasso F. et al.– Nature, 1992, **358**, p.565.

[8] Pappademos J., Sukhatme U. and Pagnamenta A.– Phys.Rev.,1993, **A 48**, p.3525.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июня 1995 года.