

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-234

P4-95-234

Б.Н.Захарьев, В.М.Чабанов

ПРОЗРАЧНЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ
КВАНТОВЫХ СИСТЕМ
(НЕОЖИДАННАЯ ИНВЕРСИЯ
ИСХОДНОГО ПОТЕНЦИАЛА)

Направлено в журнал «Physica Scripta».

1995

ВВЕДЕНИЕ

Широко известны безотражательные потенциалы солитонного типа, изображенные на рис.1 [1]. Они получаются [2-5] "отрывом" связанных состояний от непрерывного спектра, например, с помощью техники обратной задачи рассеяния или суперсимметрии (SUSY)

Одноуровневая яма подобна верхней яме на рис. 1а, только менее глубокая. Как было показано ранее [6], в случае волной структуры спектра чисто солитонообразные потенциальные возмущения не могут быть прозрачными, так как при этом возникают прогибы запрещенных зон в области разрешенного движения волн. Такие прогибы действуют как эффективные потенциальные барьеры, дающие сильное отражение.

В случае движения волн по решеткам (с дискретной пространственной переменной) восстановить прозрачность системы с потенциалом солитонного типа удастся с помощью введения дополнительного нелокального взаимодействия [6].

В данной работе ставилась задача породить связанное состояние в нижней запрещенной зоне системы периодических δ -барьеров

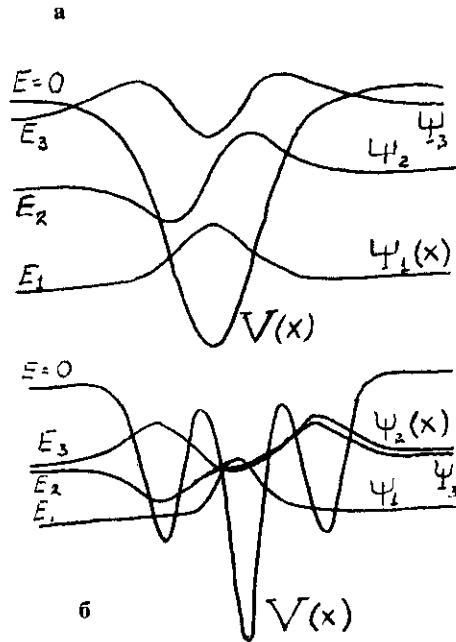


Рис.1. Примеры безотражательных потенциалов с тремя связанными состояниями [1]¹

¹Сближение двух верхних уровней на рис.1 приводит к вытеснению вырождаемых состояний в крайние ямки (в пределе $E_2 = E_3$ эти ямки удаляются на бесконечность, т.е. происходит эффективная "аннигиляция" этих состояний). Любое сколь угодно малое углубление таких потенциалов приводит к появлению нового связанного состояния.

(или ям)

$$\hat{v}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0 \delta(x - na), \quad (1)$$

при условии сохранения отражательных свойств (вонной структуры). Мы обнаружили, что соответствующее безотражательное возмущение приводило к инверсии исходного потенциала. Помимо возникновения конечных возмущений, исходные δ -барьеры переходили в δ -ямы (и наоборот). Оказалось, что эта неожиданная инверсия представляет собой довольно частое явление. Просто при конечных исходных потенциалах такую инверсию труднее было заметить на фоне сравнимых по величине потенциальных добавок. В этом отношении выбор "ребенок Дирака" оказался очень удачным (таким образом, наша работа дополняет результаты по моделям с дельта-потенциалами, собранным в книгах [7,8]).

В обзоре [9] уже публиковались результаты порождения уровней в случае исходной гребенки Дирака на полуоси, но тогда нас интересовали волновые функции порождаемых связанных состояний в разных (запрещенных и разрешенных) зонах, а на трансформацию потенциала внимание обращено не было, так как ничего особенного не ожидалось. И вот, наконец, было обнаружено разительное явление переворота (изменение знака) гребенки Дирака.

В периодическом поле возникает полосатый спектр из разрешенных зон (проводимости), по которым "свободно" распространяются блоховские волны. Можно говорить о блоховских аналогах экспоненциальных и синусоидальных решений². В этой связи представляют интерес следующие вопросы. Не возникнет ли под каждой разрешенной зоной по связанному состоянию при произвольно малом притягивающем возмущении потенциала, как это имеет место в случае такого возмущения свободного движения на всей оси (когда появляется одно связанное состояние при отрицательной энергии)? Аналогично: не возникает ли по связанному состоянию над каждой разрешенной зоной при сколь угодно малой отталкивающей добавке к потенциалу (создающей "перевернутые потенциальные ямки", вдавленные внутрь запрещенных зон)? Пока эти проблемы остаются открытыми.

²Из их линейных комбинаций можно построить общие решения на любом конечном участке периодической системы. Такие решения для разных периодических потенциалов на отдельных интервалах можно гладко сшивать с решениями в поле произвольных потенциалов. Естественно, что в точках сшивки будет происходить частичное отражение бегущих блоховских волн.

Обратная задача для периодических потенциалов рассматривалась в [10-13].

ИНВЕРСИЯ "ГРЕБЕНКИ ДИРАКА"

Формулы порождения связанных состояний при сохранении асимптотики "блеховских" волн можно получить при помощи техники суперсимметрии [2-5]. Основная идея состоит в том, чтобы расщепить гамильтониан как оператор второго порядка на два более простых оператора первого порядка и свести задачу к решению обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Итак, исходный гамильтониан H_- (в нашем случае описывающий систему с периодическими δ -потенциальными пиками) представляется в факторизованном виде

$$H_- = A^+A^- + \epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{v}(x), \quad (2)$$

где ϵ есть так называемая энергия факторизации. В этом выражении

$$A^- = -\frac{d}{dx} + W(x)$$

есть дифференциальный оператор первого порядка, A^+ его эрмитово сопряжение. Пусть ψ^- является решением уравнения Шредингера с H_- при энергии ϵ . Тогда $W(x)$ можно найти из уравнения

$$A^-\psi^- = \left[-\frac{d}{dx} + W(x)\right]\psi^- = 0, \quad (3)$$

поскольку

$$H_-\psi^- = (A^+A^- + \epsilon)\psi^- = \epsilon\psi^-$$

становится тождеством при таком выборе $W(x)$. Таким образом, выражение для оператора A^- гласит

$$A^- = -\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \ln \psi^-. \quad (4)$$

Теперь мы можем просто найти решения для суперсимметричного партнера H_+ с переставленными местами операторами A^+ и A^- (преобразование Дарбу):

$$H_+ = A^-A^+ + \epsilon = -\frac{d^2}{dx^2} + \hat{v}(x) - 2\frac{d^2}{dx^2} \ln \psi^-. \quad (5)$$

Действительно, пусть ψ_E^- есть решения уравнения Шредингера с H_- при энергии E . Тогда $\psi_E^+ = A^-\psi_E^-$ являются решениями уравнения Шредингера, соответствующего H_+ с той же энергией

$$H_+(A^-\psi_E^-) = A^-A^+(A^-\psi_E^-) + \epsilon(A^-\psi_E^-) = A^-H_-\psi_E^- = EA^-\psi_E^-. \quad (6)$$

При энергии $E = \epsilon$ частное решение ψ^+ , соответствующее H_+ , можно получить, решая дифференциальное уравнение первого порядка

$$A^+\psi^+ = \left[\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \ln \psi^- \right] \psi^+ = 0, \quad (7)$$

которое дает

$$\psi^+ = \frac{1}{\psi^-}. \quad (8)$$

Пусть энергия факторизации $\epsilon < E_1$, где E_1 обозначает нижнюю границу первой разрешенной зоны H_- . Мы можем выбрать ψ^- безузельной и расходящейся асимптотически. Тогда ψ^+ согласно (8) не обладает узлами и обращается в 0 при $|x| \rightarrow \infty$. Кроме того, можно показать, что решение ψ_E^+ ведет себя при больших x как "свободно" распространяющаяся блоховская волна ("отражения" нет), другими словами, асимптотика блоховских решений в обобщенном смысле остается неизменной. Таким образом, преобразование Дарбу $H_- \rightarrow H_+$ добавляет к блоховскому спектру основное состояние.

Из выражения для преобразованного потенциала можно явно увидеть эффект инверсии потенциальных пиков. Действительно,

$$\begin{aligned} v(x) &= \overset{\circ}{v}(x) - 2 \frac{d^2}{dx^2} \ln \psi^-(x) = \overset{\circ}{v}(x) - 2 \frac{[\psi^-(x)]''}{\psi^-(x)} + 2 \left\{ \frac{[\psi^-(x)]'}{\psi^-(x)} \right\}^2 = \\ &= \overset{\circ}{v}(x) + 2[\epsilon - \overset{\circ}{v}(x)] + 2 \left\{ \frac{[\psi^-(x)]'}{\psi^-(x)} \right\}^2 = -\overset{\circ}{v}(x) + 2\epsilon + 2 \left\{ \frac{[\psi^-(x)]'}{\psi^-(x)} \right\}^2, \quad (9) \end{aligned}$$

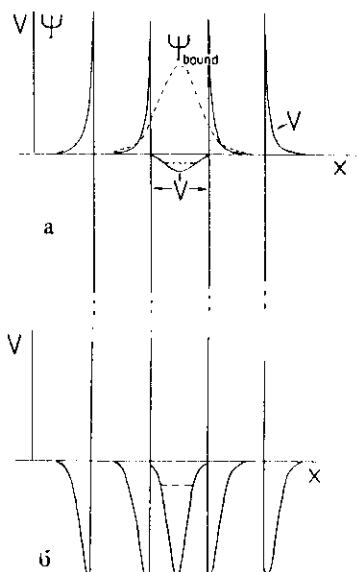
где мы воспользовались выражением для $[\psi^-(x)]''$, вытекающим непосредственно из уравнения Шредингера. Мы замечаем, что член $\overset{\circ}{v}(x)$ стоит в последнем равенстве со знаком минус. В нашем случае $\overset{\circ}{v}(x)$ является гребенкой сингулярных дельта-функций, и поэтому остальные (конечные при всех x) члены не могут скомпенсировать переворот δ -пиков (ям):

$$v(x) = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} V_0 \delta(x - na) + 2\epsilon + 2 \left\{ \frac{[\psi^-(x)]'}{\psi^-(x)} \right\}^2. \quad (10)$$

Следует подчеркнуть, что формула (9) верна и в общем случае. При этом изменение знака у $\overset{\circ}{v}(x)$ может подавляться потенциальными добавками, но наша модель позволила в чистом виде выявить эффект переворота исходной потенциальной гребенки при порождении основного связанного состояния.

На рис.2,а показаны перевернутая гребенка Дирака и конечные потенциальные возмущения в виде отталкивающих пиков и гладкой ямки. Такая система имеет ту же структуру спектральных полос, что и исходная гребенка Дирака плюс заданное связанное состояние. Пики нужны, чтобы сдвинуть вверх на прежние места спектральные полосы, опускающиеся при инверсии гребенки. Ямка же обеспечивает появление связанного состояния. На рис.2,б представлен потенциал, получающийся при порождении связанного состояния в нижней запрещенной зоне в исходной системе периодических дельта-ям. При этом дельта-ямы превращаются в дельта-барьеры, появляются конечные ямки, опускающие зоны на прежние места, а средняя ямка обеспечивает появление заданного связанного состояния.

Рис.2. Потенциалы, получающиеся при порождении связанного состояния в нижней запрещенной зоне а) гребенки Дирака (периодических дельта-барьеров), б) периодических дельта-ям. После преобразования дельта-функции изменяли знак (барьеры стали ямами, а ямы барьерами). Дополнительные потенциальные зубчики (а) и ямки (б) обеспечивают возвращение на прежние места спектральных полос, смещающихся при инверсии дельта-потенциалов, и появление нужного связанного состояния



ИНВЕРСИЯ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ЯМ

Для анализа результатов прозрачных возмущений гребенки Дирака могут оказаться полезными картинки преобразования одного δ -барьера при порождении связанного состояния с сохранением

отражательных свойств системы. Мы применяем преобразование SUSY, для которого выше уже были выписаны основные формулы (2)-(9). Здесь следует подчеркнуть, что это преобразование не меняет характеристик рассеяния (сохраняет по модулю коэффициенты отражения и прохождения). Действительно, пусть $\psi_E^-(x)$ есть решение исходного уравнения Шредингера при энергии E , удовлетворяющее асимптотическому условию

$$\psi_E^-(x) \sim \exp(-ikx) + r(k)\exp(ikx), x \rightarrow \infty.$$

Тогда, проводя тривиальные выкладки, можно получить выражение для асимптотики возмущенного решения

$$\psi_E^+(x) = -[\psi_E^-(x)]' + [\psi^-(x)]'\psi_E^-(x)/\psi^-(x),$$

где $\psi^-(x) \sim \exp(\kappa x)$, $x \rightarrow \infty$ ($\kappa = |\epsilon|^{1/2}$):

$$\psi_E^+(x) \sim \exp(-ikx) + \frac{\kappa - ik}{\kappa + ik} r(k)\exp(ikx), x \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Здесь мы нормируем $\psi_E^+(x)$ на единичную амплитуду падающей справа волны. Таким образом, коэффициент отражения $r(k)$ остается неизменным по модулю, меняется только его фаза.

На рис.3,4 показаны зависимости таких преобразований от энергии связи порождаемого состояния, от силы потенциального барьера V_0 и от спектрального параметра, определяющего положение связанного состояния в пространстве.

Случай симметричных потенциалов показан на рис.5(а) при изменении энергии связанного состояния и исходной δ -яме. На рис.5(б) показана трансформация исходного δ -барьера с изменением V_0 при энергии связи $\epsilon = -1$. При больших V_0 уровень связанного состояния в опрокинутой дельта-яме $E_{св} = -V_0^2/4$ оказывается на большей глубине, чем требуется. Чтобы поднять его на заданное место, появляется дополнительный потенциальный барьер. А при малых V_0 требуется опускание уровня, которое достигается добавочными ямками. В пределе $V_0 = 0$ получается солитонная яма.

Для лучшего уяснения эффектов, связанных с переворотом "гребенки Дирака", представляется целесообразным ознакомиться еще и с графиками (рис.6,7), демонстрирующими симметричные трансформации потенциалов при добавлении основного

связанного состояния в случае двух и четырех потенциальных дельта-пиков. И хотя их еще трудно комментировать, приводим эти иллюстрации для полноты картины.

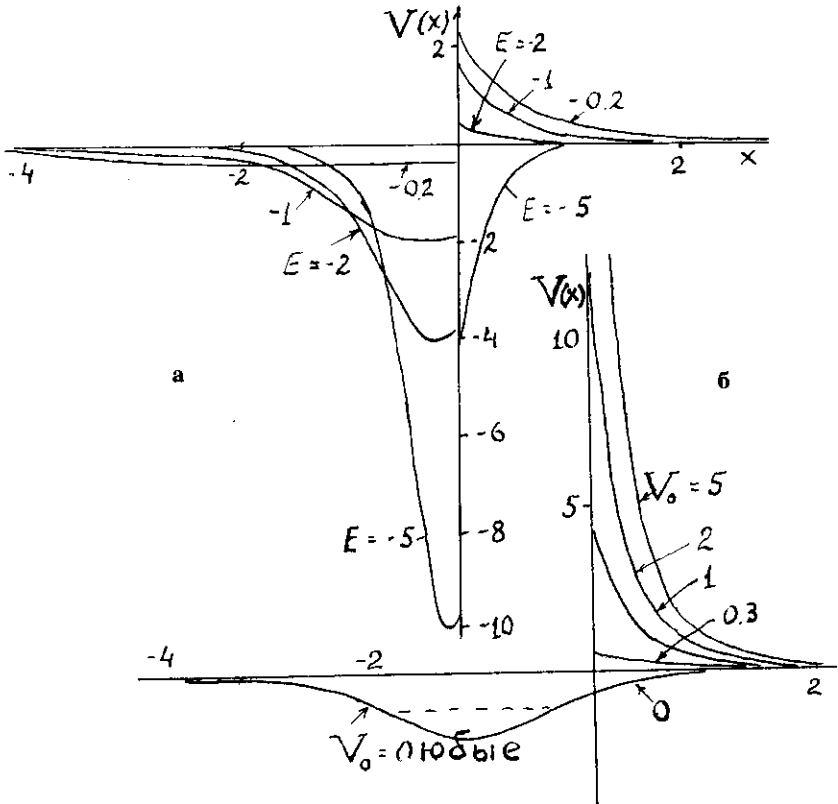


Рис.3. Инверсия потенциального δ -барьера при порождении связанного состояния с сохранением отражательных свойств системы в зависимости от величины а) энергии связи, б) коэффициента V_0 при исходном δ -барьере. Помимо изменения знака δ -функции, которая не показана на рисунке, возникают дополнительные ямки и барьеры, подобные тем, что и в случае исходной периодической системы. Обратите внимание на то, что яма слева на рис. 3(а) не меняется (благодаря такому выбору исходного решения $\psi^-(x)$, что при $x < 0$ оно не зависело от V_0)

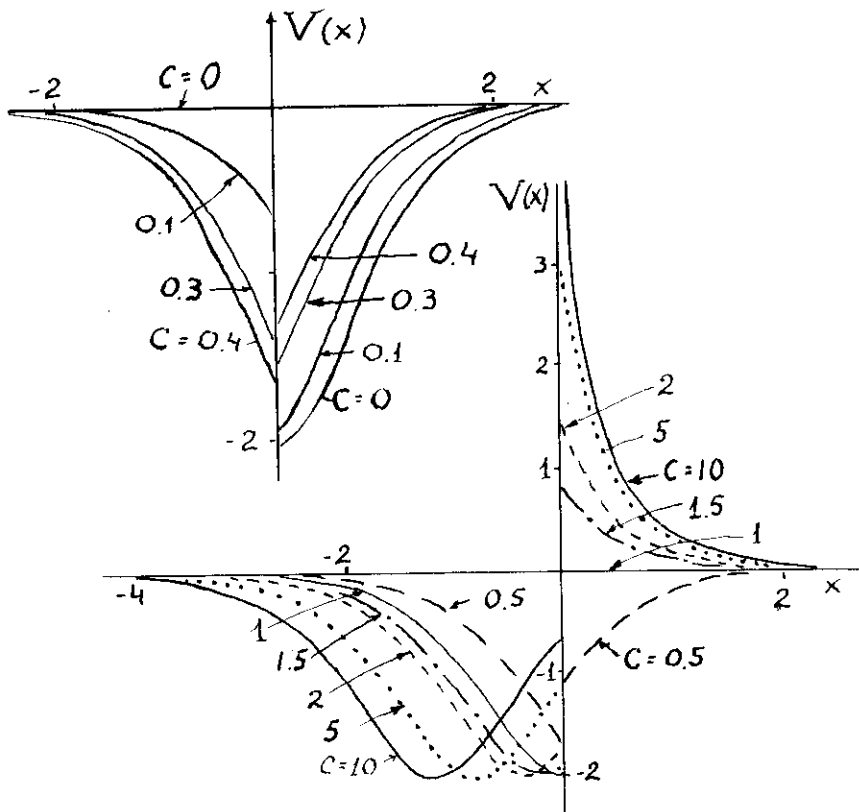


Рис.4. Инверсия потенциального δ -барьера при рождении связанного состояния с сохранением отражательных свойств системы в зависимости от величины параметра "с" (верхние кривые относятся к значениям $c \leq 0.4$; нижние - $c \geq 0.5$), определяющего область локализации порождаемого связанного состояния на оси x . Этот параметр являлся коэффициентом в линейной комбинации независимых решений, в виде которой строилось исходное решение $\psi^-(x)$.

Исходный дельта-пик "опрокинулся" и стал потенциальной дельта-ямой, сливающейся с нижней ординатной полуосью. Конечные потенциальные кривые терпят разрыв в точке расположения дельта-ямы.

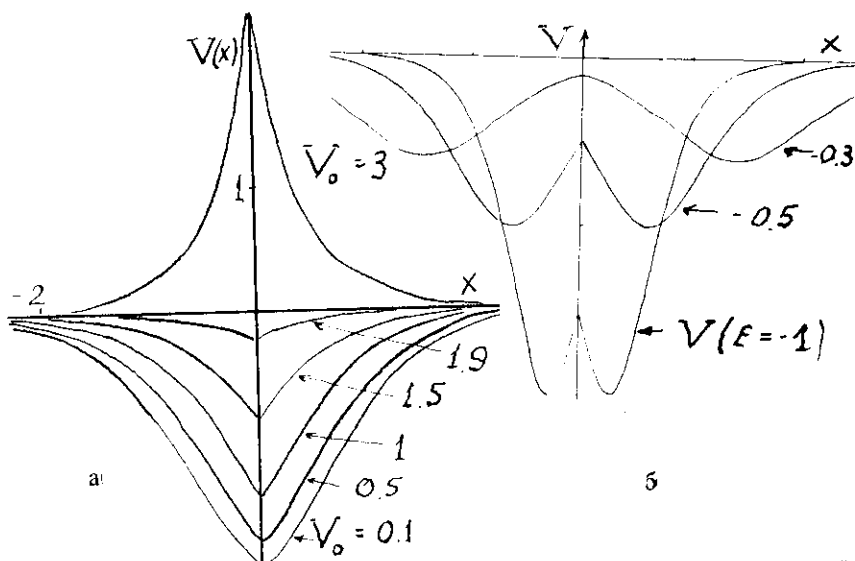


Рис.5. Случай симметричной трансформации: а) исходной потенциальной δ -ямы при разных значениях энергии порождаемого связанного состояния (помимо изображенных конечных ям имеется δ -барьер, не показанный на рисунке); б) исходного δ -барьера при изменении V_0 . Отталкивающие и притягивающие потенциалы корректируют положение уровня в дельта-яме, возникшей в результате инверсии

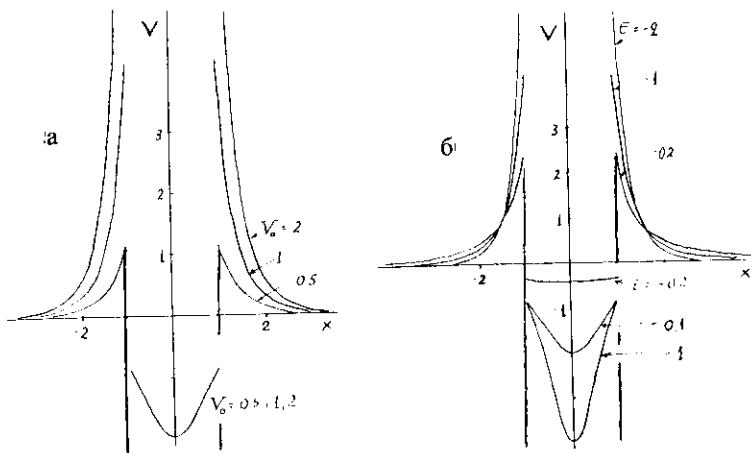


Рис.6 Симметричная трансформация системы двух дельта-барьеров (а,б), сопровождающаяся их инверсией и появлением дополнительных барьеров и ям. Изменяется а) сила V_0 дельта-барьеров; б) энергия связанного состояния. Две δ -ямы, появившиеся после инверсии, показаны по обе стороны отрицательной ординатной полуоси

Рис.6 (а). Симметричная трансформация системы двух дельта-ям, сопровождающаяся их инверсией и появлением дополнительных конечных ям. Изменяется энергия связанного состояния. Два δ -барьера, появившиеся после инверсии, расположены по обе стороны положительной ординатной полуоси

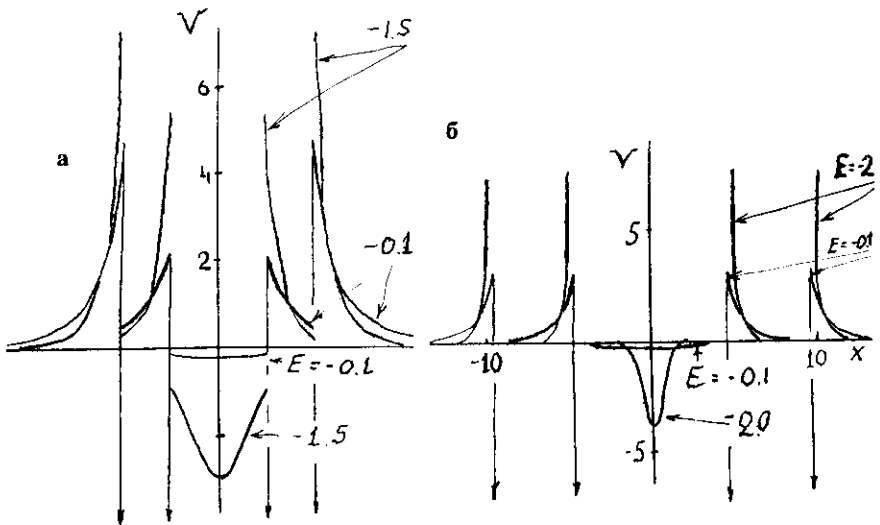
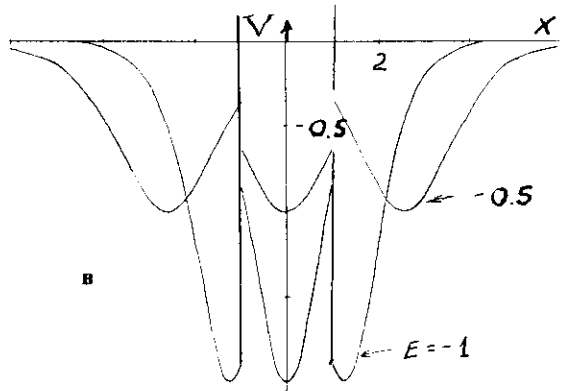
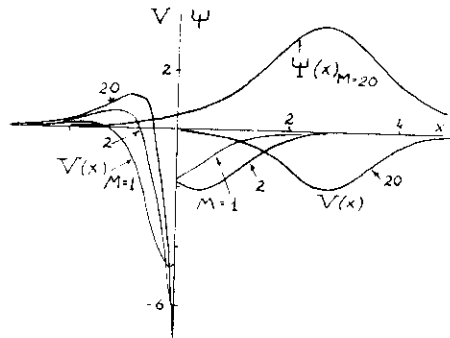


Рис.7. Трансформация системы четырех дельта-барьеров (с инверсией). Меняется энергия порождаемого связанного состояния. Расстояние между исходными барьерами в случае (а) меньше, чем в случае (б). Направленные вертикально вниз стрелки обозначают дельта-ямы, получившиеся в результате инверсии

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используемое в этой работе преобразование Дарбу, позволяющее построить серию суперпартнеров исходного гамильтониана H_- , не является единственным. Существует также двойное преобразование Дарбу (расширенная или 2-d SUSY [4]), которое дает совершенно новое множество изоспектральных гамильтонианов, эквивалентное множеству гамильтонианов в баргмановских моделях обратной задачи [16-19]. Причем такое двойное преобразование оставляет потенциальные δ -функции нетронутыми (первое преобразование опрокидывает сингулярные пики, а второе восстанавливает их первоначальное состояние, см. рис.8).

Рис.8. Трансформация дельта-барьера без инверсии с порождением связанного состояния и сохранением отражательных свойств при разных значениях предэкспоненциального фактора M в асимптотическом поведении $\psi^{bound}(x \rightarrow \infty)$. С ростом M связанное состояние смещается вправо



Для нас пока остается не ясным вопрос, почему можно построить два разительно непохожих класса преобразований исходного потенциала, чтобы породить основное состояние при одной и той же энергии (с одним свободным параметром, определяющим преимущественную локализацию порождаемого состояния на оси x).

Данная работа служит продолжением работ по теории управления спектрами [14-19]. Авторы благодарны РФФИ и фонду Сороса за поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Kwong W. et al. Am.J.Phys. 48, 926, 1980.
- [2] Cooper F., Khare A., Sukhatme U. Phys.Rep. 251, N 5,6, 268, 1995 (см. также ссылки в этом обзоре).
- [3] Andrianov A.A., M. V. Ioffe, and V. P. Spiridonov, Phys. Lett. A 174, 273, 1993.
- [4] Березовой В.П., Пашнев А.И. ТМФ, 70, с.146, 1987; 74, с.392, 1988.

[5] Spiridonov V. P., and A. S. Zhedanov "Discrete reflectionless potentials, quantum algebras, and q-orthogonal polynomials," Montreal University Preprint CRM-1928; 1993, "Discrete Darboux transformations, discrete time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials," Montreal University Preprint CRM-1929 (submitted to Ann. Phys.).

[6] Захарьев Б.Н., Пашнев А.И. Сообщение ОИЯИ Р4-94-496, Дубна, 1994.

[7] Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. Л.: Издат. ЛГУ, 1975.

[8] Albeverio S., F. Gesztesy, R. Hoegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable Models in Quantum Mechanics*, Springer, Heidelberg, 1988.

[9] Захарьев Б.Н. *Дискретная и непрерывная квантовая механика, точно решаемые модели (Уроки квантовой интуиции II)*. ЭЧАЯ 23, N5, 1992, с.1387.

[10] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля и их приложения. М.: Наука, 1984.

Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. Киев, Наукова Думка, 1977

[11] Фирсова Н.Е., ТМФ, 62, 130, 1985; Mat.сб. 58, 351, 1987.

[12] Roberts T.M., Inverse Probl. 6, 797, 1990.

[13] Trlify L., Inverse Problems 5, 1145, 1989.

[14] Zakhariev B.N., Chabanov V.M. Rev.Mod.Phys. (submitted 1995).

[15] Chabanov V. M., and B. N. Zakhariev, Phys.Lett. B 319, 13, 1993; Phys.Rev. A49, 3159, 1994; A50 3948, 1994.

[16] Захарьев Б.Н., Сузько А.А. *Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи*. Энергоатомиздат, М., 1985. Переработанное английское издание: Springer-Verlag, Heidelberg, 1990.

[17] Захарьев Б.Н., Костов Н., Плеханов Е.Б. *Точно решаемые одно- и многоканальные модели (Уроки квантовой интуиции I)*, ЭЧАЯ, 21, с.914, 1990.

[18] Захарьев Б.Н., Чабанов В.М. *Качественная теория управления спектрами, рассеянием, распадами (Уроки квантовой интуиции III)*, ЭЧАЯ 25, N6, 1994, с 1561.

[19] Захарьев Б.Н. *Уроки квантовой интуиции*. (в печати, но можно скопировать у автора на дискету с $LaTeX$ вариантом).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 мая 1995 года.