СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р4-95-115

В.К.Хеннер, Т.С.Белозерова[1]

ПОСТРОЕНИЕ УНИТАРНОЙ S-МАТРИЦЫ ДЛЯ ПЕРЕКРЫВАЮЩИХСЯ РЕЗОНАНСОВ В МНОГОКАНАЛЬНЫХ РЕАКЦИЯХ

[1]Пермский государственный университет

1995

1 Введение. Метод и общие уравнения.

Обычный способ записи парциальных амплитуд, в котором массы и ширины резонансов фигурируют явно, это формулы Брейта-Вигнера (БВ) [1] и их различные модификации. Именно такие простые и ясно интерпретируемые формулы используются в подавляющем числе случаев при описании экспериментальных данных, и определенные с помощью этих формул параметры резонансов фигурируют в таблицах Particle Data Group.

Формулы БВ в случае одного резонанса и одного или нескольких каналов рассеяния, исходно удовлетворяют условию унитарности. Дополнительная проблема возникает при построении явно унитарной S-матрицы в случае нескольких перекрывающихся резонансов с одинаковыми квантовыми числами таких, что $|E_{R_1} - E_{R_2}| \sim \Gamma_{R_1} + \Gamma_{R_2}$. Очевидно, что в этом случае интерференция между резонансами является центральной частью анализа и ключом к интерпретации полученных результатов.

Проблема построения явно унитарной S-матрицы, использующей в случае перекрывающихся резонансов формулы, схожие с формулами БВ, давно исследуется в ядерной физике и физике элементарных частиц. (В предыдущей работе [2] мы привели обзор и сравнение существующих методов.) Однако, до сих пор отсутствует явная и простая схема построения унитарной и T-инвариантной S-матрицы требуемого вида в случае нескольких перекрывающихся резонансов при многоканальном рассеянии.

Ниже мы приводим последовательную процедуру построения унитарной многоканальной, многорезонансной S-матрицы для общего случая M каналов и N резонансов.

Матрица рассеяния S группы из N резонансов, расположенных в энергетической области достаточно удаленной от порогов и от других резонансов, может быть представлена в виде

$$\mathrm{S}(E) = \mathrm{B} - \sum_{R=1}^{N} \frac{\vec{A}_R \vec{A}_R^T}{E - \varepsilon_R}, \tag{1}$$

где B - матрица фона, соответствующая прямым нерезонансным реакциям, $\vec{A}_R$ - векторы парциальных ширин (как будет видно ниже, с необходимостью комплексные) ε_R - комплексные значения энергий.

Требуется определить, какие условия нужно наложить на векторы $\vec{A}_R$ и фон B, чтобы матрица рассеяния S была унитарна и симметрична (T-инвариантна), то

есть

$$\mathrm{S}^+(E)\mathrm{S}(E) \equiv \mathrm{I} \tag{2}$$

и

$$S_{ij}(E) = S_{ji}(E) \tag{3}$$

тождественно по E.

Ясно, что для симметрии и унитарности матрицы S необходимо, чтобы матрица фона B также была симметрична и унитарна.

Ограничения, накладываемые требованием унитарности, можно получить различными способами. Мы обобщим метод, предложенный в работе [3] на случай произвольного числа перекрывающихся резонансов. (В работе [3] эти ограничения получены в явном виде только для случая двух резонансов и произвольного числа каналов. Утверждается, что в общем случае N резонансов метод обосновать не удается, и уже при трех резонансах задача настолько усложняется, что получить обсуждаемые ниже ограничения и сформулировать метод на уровне алгоритма невозможно.)

Запишем условие унитарности (2) с учетом представления (1):

$$\mathrm{S}^+(E)\mathrm{S}(E) = \mathrm{B}^+\mathrm{B} + i\sum_{R=1}^{N}\left[\mathrm{B}\frac{\vec{A}_R^+(\vec{A}_R^+)^T}{E-\varepsilon_R^*} - \mathrm{B}^+\frac{\vec{A}_R\vec{A}_R^T}{E-\varepsilon_R}\right] + \sum_{R=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{\vec{A}_R^+(\vec{A}_R^+)^T\vec{A}_l\vec{A}_l^T}{(E-\varepsilon_R^*)(E-\varepsilon_l)} \equiv \mathrm{I}\,. \tag{4}$$

Для упрощения фомул, включающих фон, воспользуемся удобными переменными работы [3].

Поскольку матрица B унитарна и симметрична, она может быть представлена в виде произведения

$$\mathrm{B} = \mathrm{V}e^{2i\beta}\mathrm{V}^\mathrm{T},$$

где V - действительная ортогональная матрица собственных векторов матрицы B, а $e^{2i\beta}$ - диагональная матрица ее собственных значений, равных по модулю единице.

Положим

$$\mathrm{B} = \mathrm{b}\mathrm{b}^\mathrm{T}, \text{ где } \mathrm{b} = \mathrm{V}e^{i\beta}.$$

Определим вектор

$$\vec{g}_R = \mathrm{b}^+\vec{A}_R\,. \tag{5}$$

Тогда матрица S может быть записана в виде $\mathrm{S} = \mathrm{b}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{b}^{\mathrm{T}}$, где

$$\tilde{\mathrm{S}}(E) = \mathrm{I} - i \sum_{R=1}^{N} \frac{\vec{g}_R \vec{g}_R^T}{E - \varepsilon_R} . \qquad (6)$$

Очевидно, что матрица $\mathrm{S}(E)$ унитарна тогда, и только тогда, когда унитарна матрица $\tilde{\mathrm{S}}(E)$. Поэтому требуемые ограничения на векторы парциальных ширин мы будем получать из условия унитарности $\tilde{\mathrm{S}}^{+}(E)\tilde{\mathrm{S}}(E) \equiv \mathrm{I}$.

Введем обозначение для скалярного произведения

$$V_{lR} = (\vec{g}_l^{*}, \vec{g}_R) = \sum_{k=1}^{M} g_{lk}^{*} g_{Rk} .$$

Условие унитарности для матрицы $\tilde{\mathrm{S}}(E)$ может быть записано в виде

$$\sum_{k=1}^{M} \tilde{S}_{ik} \tilde{S}_{jk}^{*} = \delta_{ij} - i \sum_{R=1}^{N} \frac{g_{Ri} g_{Rj}}{E - \varepsilon_R} + i \sum_{R=1}^{N} \frac{g_{Ri}^{*} g_{Rj}^{*}}{E - \varepsilon_R^{*}} + \sum_{l=1}^{N} \sum_{R=1}^{N} V_{lR} \frac{g_{Ri} g_{lj}^{*}}{(E - \varepsilon_R)(E - \varepsilon_l^{*})} \equiv \delta_{ij} \qquad (7)$$

или

$$i \sum_{R=1}^{N} \left[-\frac{g_{Ri} g_{Rj}}{E - \varepsilon_R} + i \sum_{R=1}^{N} \frac{g_{Ri}^{*} g_{Rj}^{*}}{E - \varepsilon_R^{*}} \right] + \sum_{l=1}^{N} \sum_{R=1}^{N} V_{lR} \frac{g_{Ri} g_{lj}^{*}}{(E - \varepsilon_R)(E - \varepsilon_l^{*})} \equiv 0 . \qquad (8)$$

Домножив тождество (8) на произведение $\prod_{k=1}^{N} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k^{*})$, получим

$$\begin{aligned} & i \sum_{R=1}^{N} [g_{Ri}^{*} g_{Rj}^{*} (E - \varepsilon_R) - g_{Ri} g_{Rj} (E - \varepsilon_R^{*})] \prod_{k \neq R} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k^{*}) + \\ & + \sum_{R=1}^{N} V_{RR} g_{Ri} g_{Rj}^{*} \prod_{k \neq R} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k^{*}) + \\ & + \sum_{R=1}^{N-1} \sum_{l=R+1}^{N} [V_{lR} g_{Ri} g_{lj}^{*} (E - \varepsilon_l) + V_{Rl} g_{li} g_{Rj}^{*} (E - \varepsilon_l^{*})] \prod_{k \neq l,R} (E - \varepsilon_k)(E - \varepsilon_k^{*}) = 0 . \end{aligned} \qquad (9)$$

Для того, чтобы выполнялось условие унитарности (8), необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при всех степенях переменной E полинома (9) были равны нулю.

Коэффициент полинома (9) при степени E^k имеет вид

$$2 \sum_{R=1}^{N} \mathrm{Im}(a_R^{(k)} g_{Ri} g_{Rj}) + \sum_{R=1}^{N} V_{RR} b_R^{(k)} g_{Ri} g_{Rj}^{*} + \sum_{R=1}^{N-1} \sum_{l=R+1}^{N} [V_{lR} c_{lR}^{(k)} g_{Ri} g_{lj}^{*} + V_{lR}^{*} (c_{lR}^{(k)})^{*} g_{li} g_{Rj}^{*}] . \qquad (10)$$

Здесь $a_R^{(k)}, b_R^{(k)}, c_{lR}^{(k)}$ - комплексные величины, зависящие от комплексных энергий $\varepsilon_R = \varepsilon_R^x + i\varepsilon_R^y$ (в принятой параметризации $\varepsilon_R^x = E_R$, $\varepsilon_R^y = -\Gamma_R/2$); $k = 0, ..., 2N-1$.

Приравняем нулю коэффициент при степени $(2N-1)$. С учетом того, что

$$a_R^{2N-1} = 1 , \quad b_R^{2N-1} = 0 , \quad c_{lR}^{2N-1} = 0 , \qquad (R, l = 1, ..., N)$$

получим

$$i \sum_{R=1}^{N} [g_{Ri}^{*} g_{Rj}^{*} - g_{Ri} g_{Rj}] = \sum_{R=1}^{N} \mathrm{Im}(g_{Ri} g_{Rj}) = 0$$

или

$$\sum_{R=1}^{N} [g_{Ri}^x g_{Rj}^y + g_{Ri}^y g_{Rj}^x] = 0 , \quad (i, j = 1, ..., M) . \qquad (11)$$

Здесь $\vec{g}_R^x$ и $\vec{g}_R^y$ - действительные векторы, представляющие соответственно действительную и мнимую части комплексного вектора $\vec{g}_R = \vec{g}_R^x + i\vec{g}_R^y$.

Будем строить векторы $\vec{g}_R$ так, чтобы их мнимые части $\vec{g}_R^y$ являлись линейными комбинациями действительных частей $\vec{g}_R^x$:

$$\vec{g}_R^y = U_{R1} \vec{g}_1^x + U_{R2} \vec{g}_2^x + ... + U_{RN} \vec{g}_N^x , \qquad (R = 1, ..., N) . \qquad (12)$$

Подставив выражение (12) в условие (11), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{R=1}^{N} [g_{Ri}^x \sum_{k=1}^{N} U_{Rk} g_{kj}^x + g_{Rj}^x \sum_{k=1}^{N} U_{Rk} g_{ki}^x] = \\ & = 2 \sum_{R=1}^{N} U_{RR} g_{Ri}^x g_{Rj}^x + \sum_{R=1}^{N-1} \sum_{k=R+1}^{M} (U_{Rk} + U_{kR})(g_{Ri}^x g_{kj}^x + g_{ki}^x g_{Rj}^x) = 0 , \\ & \qquad (i, j = 1, ..., M) . \end{aligned}$$

Таким образом, для того, чтобы коэффициент при степени E^{2N-1} тождественно равнялся нулю необходимо и достаточно, чтобы

$$U_{RR} = 0 , \qquad U_{Rk} = -U_{kR} , \qquad (13)$$

то есть U - кососимметричная матрица с нулевой диагональю.

Равенство (12) определяет NM уравнений связи, которые зависят от $N(N-1)/2$ параметров - элементов U_{ij} матрицы U ($i = 1, ..., N-1$; $j = i+1, ..., N$).

Приравняем нулю коэффициент при степени $(2N-2)$. С учетом того, что

$$a_R^{2N-2} = -\sum_{k \neq R} (\varepsilon_k + \varepsilon_k^{*}) - \varepsilon_R^x = -2 \sum_{k \neq R} \varepsilon_k^x - \varepsilon_R^x + i\varepsilon_R^y ,$$
$$b_R^{2N-2} = 1 , \quad c_{lR}^{2N-1} = 1 , \qquad (R, l = 1, ..., N)$$

получим

$$2 \sum_{R=1}^{N} \mathrm{Im}(a_R^{2N-2} g_{Ri} g_{Rj}) + \sum_{R=1}^{N} V_{RR} g_{Ri} g_{Rj}^{*} + \sum_{R=1}^{N-1} \sum_{l=R+1}^{N} [V_{lR} g_{Ri} g_{lj}^{*} + V_{lR}^{*} g_{li} g_{Rj}^{*}] = 0 . \qquad (14)$$

Запишем произведения $g_{Ri}g_{Rj}$, $g_{Ri}g^*_{Rj}$, $g_{Ri}g_{lj}$ и $g_{li}g^*_{Rj}$ с учетом представления (12):

$$
\begin{aligned}
g_{Ri}g_{Rj} &= (g^x_{Ri}g^x_{Rj} - g^y_{Ri}g^y_{Rj}) + i(g^x_{Ri}g^y_{Rj} + g^y_{Ri}g^x_{Rj}) = \\
&= [g^x_{Ri}g^x_{Rj} - \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{N} U_{Rk}U_{Rv}g^x_{ki}g^x_{vj}] + i\sum_{k=1}^{N} U_{Rk}[g^x_{Ri}g^x_{kj} + g^x_{Rj}g^x_{ki}] \,, \\
g_{Ri}g^*_{Rj} &= (g^x_{Ri}g^x_{Rj} + g^y_{Ri}g^y_{Rj}) + i(-g^x_{Ri}g^y_{Rj} + g^y_{Ri}g^x_{Rj}) = \\
&= [g^x_{Ri}g^x_{Rj} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{N} U_{Rk}U_{Rv}g^x_{ki}g^x_{vj}] + i\sum_{k=1}^{N} U_{Rk}[-g^x_{Ri}g^x_{kj} + g^x_{Rj}g^x_{ki}] \,, \qquad (15) \\
g_{Ri}g^*_{lj} &= (g^x_{Ri}g^x_{lj} + g^y_{Ri}g^y_{lj}) + i(-g^x_{Ri}g^y_{lj} + g^y_{Ri}g^x_{lj}) = \\
&= [g^x_{Ri}g^x_{lj} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{N} U_{Rk}U_{lv}g^x_{ki}g^x_{vj}] + i\sum_{k=1}^{N}[-U_{lk}g^x_{Ri}g^x_{kj} + U_{Rk}g^x_{lj}g^x_{ki}] \,, \\
g_{li}g^*_{Rj} &= (g^x_{li}g^x_{Rj} + g^y_{li}g^y_{Rj}) + i(-g^x_{li}g^y_{Rj} + g^y_{li}g^x_{Rj}) = \\
&= [g^x_{li}g^x_{Rj} + \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{N} U_{lk}U_{Rv}g^x_{ki}g^x_{vj}] + i\sum_{k=1}^{N}[-U_{Rk}g^x_{li}g^x_{kj} + U_{lk}g^x_{Rj}g^x_{ki}] \,,
\end{aligned}
$$

Для того чтобы коэффициент (14) при степени E^{2N-2} был равен нулю, необходимо приравнять нулю коэффициенты при произведениях $g^x_{pi}g^x_{qj}$, $(p,q = 1,...,N)$. Подставим (15) в уравнение (14) и приравняем нулю действительные и мнимые части этих коэффициентов (напомним, что $V_{lR} = V^x_{lR} + iV^y_{lR} = (\vec{g}^*_l\vec{g}_R)$).

$$2\varepsilon^y_p - 2\sum_{R\neq p}\varepsilon^y_p U^2_{Rp} + V_{pp} + \sum_{R\neq p} V_{RR}U^2_{Rp} + 2\sum_{R=1}^{N-1}\sum_{l=R+1}^{N} V^x_{lR}U_{Rp}U_{lp} + 2\sum_{R\neq p} V^y_{Rp}U_{Rp} = 0, \qquad (16)$$

$$
\begin{aligned}
-2\sum_{R=1}^{N}\varepsilon^y_R U_{Rp}U_{Rq} \;&+\; 2U_{pq}(\varepsilon^x_p - \varepsilon^x_q) + \sum_{R=1}^{N} V_{RR}U_{Rp}U_{Rq} + \\
&+\; V^x_{pq} + \sum_{R=1}^{N-1}\sum_{l=R+1}^{N} V^x_{lR}[U_{Rp}U_{lq} + U_{lp}U_{Rq}] + \\
&+\; \sum_{R=1}^{N}[V^y_{Rp}U_{Rq} + V^y_{Rq}U_{Rp}] = 0 \,, \qquad (17)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U_{qp}(V_{pp} + V_{qq}) + V^y_{qp} \;&+\; \sum_{R=1}^{N-1}\sum_{l=R+1}^{N} V^y_{lR}[U_{Rp}U_{lq} - U_{lp}U_{Rq}] + \\
&+\; \sum_{R=1}^{N}[V^x_{Rq}U_{Rp} - V^x_{Rp}U_{Rq}] = 0 \,. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

Таким образом, приравнивание нулю коэффициента при степени E^{2N-2} приводит к системе N^2 уравнений, линейных относительно скалярных произведений $V_{RR}, V^x_{lR}, V^y_{lR}$: N уравнений (16), $N(N-1)/2$ уравнений (17) и $N(N-1)/2$ уравнений (18).

Коэффициенты при $g^x_{pi}g^x_{qj}$ и $g^x_{qi}g^x_{pj}$ совпадают, поскольку p и q входят в уравнения (17) и (18) симметрично.

Решив систему, получаем значения скалярных произведений

$$
\begin{aligned}
V_{RR} &= -\frac{2}{S}[S + 2Q_R]\varepsilon^y_R \,, &(19)\\
V^x_{lR} &= -\frac{2}{S}[F_{lR}(\varepsilon^x_l - \varepsilon^x_R) + G_{lR}(\varepsilon^y_l + \varepsilon^y_R)] \,, &(20)\\
V^y_{lR} &= -\frac{2}{S}[G_{lR}(\varepsilon^x_l - \varepsilon^x_R) - F_{lR}(\varepsilon^y_l + \varepsilon^y_R)] \,, &(21)
\end{aligned}
$$

$$R = 1,...,N; \quad l = R+1,...,N \,,$$

где

$$S = 1 + \sum_{p=1}^{[N/2]}(-1)^p \sum_{i_1=1}^{N-2p+1}\sum_{i_2=i_1+1}^{N-2p+2}\cdots\sum_{i_{2p}=i_{2p-1}+1}^{N} \left|\begin{matrix} i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \\ i_1 & i_2 & \dots & i_{2p}\end{matrix}\right| \,, \qquad (22)$$

$$Q_R = \sum_{p=1}^{[N/2]}(-1)^{p+1} \sum_{i_1=1}^{N-2p+2}\sum_{i_2=i_1+1}^{N-2p+3}\cdots\sum_{i_{2p-1}=i_{2p-2}+1}^{N} \left|\begin{matrix} R & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \\ R & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1}\end{matrix}\right| \,, \qquad (23)$$

$$F_{lR} = U_{lR} + \sum_{p=1}^{[N/2]}(-1)^p \sum_{i_1=1}^{N-2p+1}\sum_{i_2=i_1+1}^{N-2p+2}\cdots\sum_{i_{2p}=i_{2p-1}+1}^{N} \left|\begin{matrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p} \\ R & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p}\end{matrix}\right| \,, \qquad (24)$$

$$G_{lR} = \sum_{p=1}^{[N/2]}(-1)^{p+1} \sum_{i_1=1}^{N-2p+2}\sum_{i_2=i_1+1}^{N-2p+3}\cdots\sum_{i_{2p-1}=i_{2p-2}+1}^{N} \left|\begin{matrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1} \\ R & i_1 & i_2 & \dots & i_{2p-1}\end{matrix}\right| \,. \qquad (25)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} l & i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ R & i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} U_{lR} & U_{li_1} & \dots & U_{li_k} \\ U_{i_1R} & U_{i_1i_1} & \dots & U_{i_1i_k} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ U_{i_kR} & U_{i_ki_1} & \dots & U_{i_ki_k} \end{vmatrix} \,,$$

- минор, составленный из элементов матрицы U (строк с номерами $l, i_1, i_2, ..., i_k$ и столбцов с номерами $R, i_1, i_2, ..., i_k$).

Система (12) и скалярные произведения (19)-(21) полностью определяют искомые векторы парциальных ширин. Если векторы $\vec{g}_R$,$(R = 1,...,N)$ удовлетворяют соотношениям (12) и (19)-(21), то коэффициенты при младших степенях полинома (9) будут тождественно равны нулю.

Для целей фитирования экспериментальных данных удобно записать ограничения (19)-(21) в терминах действительных и мнимых частей векторов парциальных ширин $\vec{g}_k = \vec{g}^x_k + i\vec{g}^y_k$.

Для определения скалярных произведений действительных векторов $\vec{g}_k^x$ получаем систему:

$$
\begin{aligned}
(\vec{g}_R^x, \vec{g}_R) &= (\vec{g}_R^x, \vec{g}_R^x) + (\vec{g}_R^y, \vec{g}_R^y) = V_{RR} \\
(\vec{g}_l^x, \vec{g}_R) &= (\vec{g}_l^x, \vec{g}_R^x) + (\vec{g}_l^y, \vec{g}_R^y) = V_{lR}^x
\end{aligned}
$$

или, с учетом представления (12),

$$
\begin{aligned}
&(\vec{g}_R^x, \vec{g}_R^x) + \sum_{i\neq R}\sum_{j\neq R} U_{Ri}U_{Rj}(\vec{g}_i^x, \vec{g}_j^x) = V_{RR} \\
&(\vec{g}_l^x, \vec{g}_R^x) + \sum_{i\neq l}\sum_{j\neq R} U_{li}U_{Rj}(\vec{g}_i^x, \vec{g}_j^x) = V_{lR}^x
\end{aligned}
\qquad (26)
$$

Решив систему, получаем:

$$
(\vec{g}_R^x, \vec{g}_R^x) = \frac{2}{S^2}\{-(S-Q_R)^2\varepsilon_R^y + \sum_{i=1(\neq R)}^{N} [2F_{Ri}G_{Ri}\varepsilon_i^x + (F_{Ri}^2 - G_{Ri}^2)\varepsilon_i^y]\}\,, \qquad (27)
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{g}_l^x, \vec{g}_R^x) = \frac{2}{S^2}\{&F_{lR}[(S-Q_R)\varepsilon_R^x - (S-Q_l)\varepsilon_l^x] - G_{lR}[(S-Q_R)\varepsilon_R^y + (S-Q_l)\varepsilon_l^y] + \\
&+ \sum_{i=1(\neq l,R)}^{N} [(F_{li}G_{Ri} + F_{Ri}G_{li})\varepsilon_i^x + (F_{li}F_{Ri} - G_{li}G_{Ri})\varepsilon_i^y]\}\,,
\end{aligned}
\qquad (28)
$$

$$
R = 1,\dots,N;\quad l = R+1,\dots,N\,,
$$

где S, Q_i, F_{ij}, G_{ij} вычисляются по формулам (22- 25).

Предложенная схема построения векторов парциальных ширин для системы N резонансов и M открытых каналов содержит $N(M+1)$ комплексных параметров: векторы $\vec{g}_R$ и комплексные энергии ε_R, $(R = 1,\dots,N)$.

Условие унитарности вводит $N(N-1)/2$ дополнительных действительных параметров U_{lR}, $(l = 1,\dots,N-1; R = l+1,\dots,N)$ и накладывает $NM + N(N+1)/2$ ограничений - уравнения (12) и (19)-(21) (или (27),(28)). Таким образом остается $N(M+1)$ свободных параметров (действительных), которые можно выбирать различным образом.

Определив свободные параметры и построив векторы $\vec{g}_R$, получим матрицу рассеяния

$$
\tilde{\mathrm{S}}(E) = \mathrm{I} - i\sum_{R=1}^{N}\frac{\vec{g}_R\vec{g}_R^T}{E-\varepsilon_R}\,.
$$

Векторы парциальных ширин можно записать в экспоненциальной форме

$$
g_{Rk} = e^{i\omega_{Rk}}\mid g_{Rk}\mid,\qquad (R = 1,\dots,N;\ k = 1,\dots,M).
$$

Тогда

$$
\tilde{S}_{ij} = \delta_{ij} - i\sum_{R=1}^{N} e^{i(\omega_{Ri}+\omega_{Rj})}\frac{\mid g_{Ri}\mid\cdot\mid g_{Rj}\mid}{E-\varepsilon_R}\,.
$$

Как отмечалось выше, матрица рассеяния $\mathrm{S} = \mathrm{b}\tilde{\mathrm{S}}\mathrm{b}^{\mathrm{T}}$, унитарна, если унитарна матрица $\tilde{\mathrm{S}}$.

Если фоновая матрица диагональна, то есть

$$
B_{ij} = \delta_{ij}e^{2i\beta_i},\qquad (i,j = 1,\dots,M)\,,
$$

то $A_{Rk} = e^{i\beta_k}g_{Rk}$, $(R = 1,\dots,N; k = 1,\dots M)$, и матрица рассеяния S может быть представлена в виде

$$
S_{ij} = e^{i(\beta_i+\beta_j)}\cdot\left[\delta_{ij} - i\sum_{R=1}^{N} e^{i(\omega_{Ri}+\omega_{Rj})}\frac{\mid g_{Ri}\mid\cdot\mid g_{Rj}\mid}{E-\varepsilon_R}\right]\,.
$$

Дополнительными свободными параметрами в данном случае являются M действительных переменных $\beta_i, (i = 1,\dots,M)$.

Если фоновая матрица B недиагональна ($\mathrm{B} = \mathrm{b}\mathrm{b}^{\mathrm{T}}$), то появляется $M(M+1)/2$ дополнительных свободных параметров: M действительных переменных β_i и $M(M-1)/2$ элементов ортогональной матрицы V.

Матрица рассеяния S в этом случае имеет вид

$$
S_{ij} = B_{ij} - i\sum_{R=1}^{N}\frac{A_{Ri}A_{Rj}}{E-\varepsilon_R}\,.
$$

где

$$
\mathrm{b} = \mathrm{V}e^{i\beta}\,,\qquad \vec{A}_R = \mathrm{b}\vec{g}_R,\ (R = 1,\dots,N).
$$

При фитировании экспериментальных данных матрицу B можно построить, например, следующим образом.

Выберем в качестве свободных параметров M действительных чисел $\beta_i \in [0, 2\pi)$ и

$M(M-1)/2$ углов вращения $\varphi_k \in [0, 2\pi)$. Тогда ортогональная матрица V может быть получена как произведение

$$
\mathrm{V} = \mathrm{R}_1\cdot\mathrm{R}_2\cdot\ldots\cdot\mathrm{R}_{\mathrm{M(M-1)/2}}\,,
$$

где матрица $\mathrm{R_k} = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^{M}$ отличается от единичной лишь элементами

$$
r_{pp}^{(k)} = r_{qq}^{(k)} = \cos\varphi_k\,;\qquad r_{pq}^{(k)} = -r_{qp}^{(k)} = \sin\varphi_k\,;\qquad (p = 1,\dots,M; q = p+1,\dots,M).
$$

В последующих разделах мы подробно рассмотрим способы построения векторов парциальных ширин для случаев одного, двух, трех и четырех резонансов.

Поскольку фоновая матрица B зависит только от числа каналов и не зависит от числа резонансов, мы в дальнейшем будем считать, для простоты, что $B = I$ - единичная матрица.

2 Один резонанс

В случае одного изолированного резонанса ($N = 1$) и M открытых каналов матрица рассеяния $S(E)$ представляется обычным выражением Брейта-Вигнера:

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i\frac{g_{1i}g_{1j}}{E-\varepsilon_1}\,, \qquad (i,j = 1,M)\,, \tag{29}$$

где $\varepsilon_1 = E_1 - i\Gamma_1/2$ - значение комплексной энергии резонанса.

Параметрами данной модели являются значения E_1, Γ_1 и вектор $\vec{g}_1$. Требование унитарности матрицы S накладывает на эти параметры $(M+1)$ ограничение.

Приравнивая нулю коэффициент при старшей степени E^1 полинома (9), получаем $\vec{g}_1^{\,y} \equiv 0$, то есть $\vec{g}_1 = \vec{g}_1^{\,x}$ - действительный вектор.

Коэффициент при степени E^0 накладывает ограничение на скалярное произведение V_{11}, то есть на длину вектора $\vec{g}_1$: $V_{11} = -2\varepsilon_1^y$ или

$$(\vec{g}_1^{\,*}, \vec{g}_1) = \Gamma_1\,. \tag{30}$$

Можно определить i-тую парциальную ширину резонанса как квадрат абсолютной величины i-той координаты вектора $\vec{g}_1$:

$$\Gamma_{1i} = |\, g_{1i}\,|^2\,.$$

Тогда равенство (30) означает, что общая ширина резонанса равна сумме его парциальных ширин.

В случае одного канала ($M = 1$) свободными параметрами модели являются только E_1 и Γ_1. Единственная координата вектора $\vec{g}_1 = \vec{g}_1^{\,x}$ полностью определяется соотношением (30).

Если имеется $M > 1$ открытых каналов, то $(M+2)$ параметров модели E_1, Γ_1 и $g_{1i} = g_{1i}^x\,(i = 1,...,M)$ связаны одним соотношением (30).

Свободные параметры можно выбирать различным образом. Например, можно считать свободными параметр E_1 и координаты вектора $\vec{g}_1$. Тогда параметр Γ_1 однозначно определится из соотношения

$$\Gamma_1 = \sum_{i=1}^{M} g_{1i}^2\,. \tag{31}$$

Можно выбрать в качестве свободных параметров E_1, Γ_1 и $(N-1)$ координату вектора $\vec{g}_1$, например, $g_{11},...,g_{1,M-1}$. Тогда координата g_{1M} определится из уравнения (31), если это уравнение имеет решение.

Наконец, можно выбрать в качестве свободных параметры E_1, Γ_1 и углы поворота $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{M-1}$ вектора $\vec{g}_1^{(0)} = (\Gamma_1, 0, ..., 0)^T$ вокруг координатных осей. Тогда искомые парциальные ширины g_{1i} будут определяться последовательным умножением соответствующих матриц вращения R_k на вектор $\vec{g}_1^{(0)}$:

$$\vec{g}_1 = R_1 \cdot R_2 \cdot ... \cdot R_{M-1} \cdot \vec{g}_1^{(0)}\,,$$

где матрица $R_k = \{r_{ij}^{(k)}\}_{i,j=1}^M$ отличается от единичной лишь элементами

$$r_{11}^{(k)} = r_{kk}^{(k)} = \cos\varphi_k\,; \qquad r_{1k}^{(k)} = -r_{k1}^{(k)} = \sin\varphi_k\,; \qquad (k = 2,...,M).$$

3 Два резонанса

В этом разделе мы получим результаты работы [1] для случая двух резонансов более последовательным способом, который применим и для случая любого числа резонансов.

В случае двух резонансов ($N = 2$) и M внешних каналов матрица рассеяния $S(E)$ задается выражением

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i\frac{g_{1i}g_{1j}}{E-\varepsilon_1} - i\frac{g_{2i}g_{2j}}{E-\varepsilon_2}\,, \qquad (i,j = 1,...,M). \tag{32}$$

Параметрами данной модели являются значения $\varepsilon_1 = E_1 - i\Gamma_1/2$, $\varepsilon_2 = E_2 - i\Gamma_2/2$ и два вектора комплексных парциальных ширин $\vec{g}_1 = \{g_{1i}\}_{i=1}^M$, $\vec{g}_2 = \{g_{2i}\}_{i=1}^M$.

Требование унитарности матрицы S накладывает на эти параметры $2(M+1)$ ограничение.

Матрица U, связывающая действительные и мнимые части векторов $\vec{g}_1$ и $\vec{g}_2$, в случае двух резонансов будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^{\,y} &= -\alpha \vec{g}_2^{\,x}\,, \\ \vec{g}_2^{\,y} &= \alpha \vec{g}_1^{\,x}\,. \end{aligned} \tag{33}$$

Подставляя параметр α в формулы (19)-(21), получим выражения для скалярных произведений векторов парциальных ширин:

$$\begin{aligned} V_{11} &= -\varepsilon_1^y \frac{2(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2}\,, \\ V_{22} &= -\varepsilon_2^y \frac{2(1+\alpha^2)}{1-\alpha^2}\,, \\ V_{21}^x &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}(\varepsilon_1^x - \varepsilon_2^x)\,, \\ V_{21}^y &= \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}(\varepsilon_1^y + \varepsilon_2^y) \end{aligned}$$

или

$$(\vec{g}_1^{\,*}, \vec{g}_1) = \Gamma_1 \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\,, \tag{34}$$

$$(\vec{g}_2^{\,*}, \vec{g}_2) = \Gamma_2 \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\,, \tag{35}$$

$$(\vec{g}_2^{\,*}, \vec{g}_1) = \frac{2\alpha}{1-\alpha^2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*)\,, \tag{36}$$

что полностью совпадает с результатом, полученным в работе [1] другим способом.

Параметр α не вполне произволен, но ограничен условием

$$0 \le \frac{4\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2} \le \frac{\Gamma_1 \Gamma_2}{|\,\varepsilon_1 - \varepsilon_2^*\,|^2} \le 1\,, \tag{37}$$

что вытекает из неравенства Коши-Шварца $|\,(\vec{a}^{\,*}, \vec{b})\,|^2 \le (\vec{a}^{\,*}, \vec{a})(\vec{b}^{\,*}, \vec{b})$.

Равенства (34), (35) можно записать в виде

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{M} |\,g_{1i}\,|^2}{\Gamma_1} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{M} |\,g_{2i}\,|^2}{\Gamma_2} = \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}\,. \tag{38}$$

Это означает, что сумма парциальных ширин для каждого резонанса обязательно превосходит их общую ширину на величину, исчезающую, если резонансы хорошо разнесены.

Справедливо также правило сумм:

$$(\vec{g}_1, \vec{g}_1) + (\vec{g}_2, \vec{g}_2) = \Gamma_1 + \Gamma_2\,. \tag{39}$$

Представим векторы $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ в экспоненциальной форме

$$g_{1i} = e^{i\omega_{1i}}\,|\,g_{1i}\,|\,, \qquad g_{2i} = e^{i\omega_{2i}}\,|\,g_{2i}\,|\,.$$

Подставив эти выражения в (33), получим

$$\begin{aligned} |\,g_{1i}\,|\sin\omega_{1i} &= -\alpha\,|\,g_{2i}\,|\cos\omega_{2i}\,, \\ |\,g_{2i}\,|\sin\omega_{2i} &= \alpha\,|\,g_{1i}\,|\cos\omega_{1i}\,. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{\sin\omega_{1i}}{\alpha\cos\omega_{1i}} = -\frac{\alpha\cos\omega_{2i}}{\sin\omega_{2i}}$$

или

$$\tan\omega_{1i}\tan\omega_{2i} = -\alpha^2\,. \tag{40}$$

Это равенство выполняется для всех каналов i (кроме случая одного канала).

Отметим, что если резонансы хорошо разнесены (то есть $|\,E_1 - E_2\,| \gg \Gamma_1 + \Gamma_2$), то параметр $\alpha \to 0$, и векторы $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ становятся действительными и ортогональными. Если $\alpha = 1$, то имеем двойной полюс. Таким образом, параметр α можно рассматривать как меру перекрывания резонансов.

Для целей фитирования экспериментальных данных удобно записать ограничения (34)-(36) в терминах действительных и мнимых частей векторов парциальных ширин $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$. Подставляя параметр α в формулы (27)-(28) получим выражения для скалярных произведений $(\vec{g}_1^{\,x}; \vec{g}_1^{\,x})$, $(\vec{g}_2^{\,x}, \vec{g}_2^{\,x})$ и $(\vec{g}_1^{\,x}, \vec{g}_2^{\,x})$:

$$(\vec{g}_1^{\,x}, \vec{g}_1^{\,x}) = \frac{\Gamma_1 - \alpha^2\Gamma_2}{1-{\alpha^2}^2}\,, \tag{41}$$

$$(\vec{g}_2^{\,x}, \vec{g}_2^{\,x}) = \frac{\Gamma_2 - \alpha^2\Gamma_1}{1-{\alpha^2}^2}\,, \tag{42}$$

$$(\vec{g}_2^{\,x}, \vec{g}_1^{\,x}) = \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}(E_1 - E_2)\,. \tag{43}$$

Модель (32) для двух резонансов и M открытых каналов содержит $2(M+1)$ комплексных параметров - комплексные энергии ε_1, ε_2, и векторы парциальных ширин $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$.

Условие унитарности вводит дополнительный параметр α и накладывает $(2M+3)$ ограничений - уравнения (33) и (34)-(36). Таким образом остается $2(M+1)$ свободных параметров (действительных), которые можно выбирать различным образом.

Например, можно в качестве свободных параметров выбрать вектор $\vec{g}_1$ и энергии E_1, E_2. Тогда значения Γ_1, Γ_2 и. α однозначно определятся из системы

$$
\begin{aligned}
(\vec{g}_1^x,\vec{g}_1^x) &= \frac{\Gamma_1-\alpha^2\Gamma_2}{(1-\alpha^2)^2}\,, \\
(\vec{g}_1^y,\vec{g}_1^y) &= \frac{\alpha^2(\Gamma_2-\alpha^2\Gamma_1)}{(1-\alpha^2)^2}\,, \\
(\vec{g}_1^x,\vec{g}_1^y) &= \frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}(E_2-E_1)\,,
\end{aligned}
$$

а координаты вектора $\vec{g}_2$ можно вычислить по формулам

$$
\begin{aligned}
g_{2i}^x &= -\frac{1}{\alpha}g_{1i}^y\,, \\
g_{2i}^y &= \alpha g_{1i}^x\,.
\end{aligned}
$$

Другой способ состоит в том, чтобы в качестве свободных параметров выбрать α, E_1, E_2, Γ_1, Γ_2, $(M-2)$ углов поворота $\delta_1,\delta_2,...,\delta_{M-2}$ вектора $\vec{g}_2^x$ вокруг вектора $\vec{g}_1^x$ и $(M-1)$ углов поворота $\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_{M-1}$ пары векторов $\vec{g}_1^x$, $\vec{g}_2^x$ вокруг осей координат.

Например, при $M=3$ можно в качестве свободных выбрать параметры α, E_1, E_2, Γ_1, Γ и углы поворота δ_1, φ_1, φ_2. Тогда координаты векторов g_{1i}^x, g_{2i}^x можно вычислить следующим образом.

Положим

$$
\vec{p}_1=\begin{pmatrix} c_1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\quad,\quad \vec{p}_2=\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ 0\end{pmatrix}\quad,
$$

где

$$
c_1=\sqrt{(\vec{g}_1^x,\vec{g}_1^x)}=\frac{\sqrt{\Gamma_1-\alpha^2\Gamma_2}}{1-\alpha^2}\,,
$$

$$
d_1=\frac{(\vec{g}_1^x,\vec{g}_2^x)}{c_1}=\frac{2\alpha(E_1-E_2)}{(1-\alpha^2)\sqrt{\Gamma_1-\alpha^2\Gamma_2}}\,,\quad d_2=\sqrt{(\vec{g}_2^x,\vec{g}_2^x)-d_1^2}\,.
$$

Вычислим векторы $\vec{q}_i$ (поворот векторов $\vec{p}_i$ вокруг оси $\vec{e}_1$):

$$
\vec{q}_i=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\delta_1 & \sin\delta_1\\ 0 & -\sin\delta_1 & \cos\delta_1\end{pmatrix}\cdot\vec{p}_i\,.
$$

Тогда

$$
\vec{g}_i^x=\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0\\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_2\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_2\end{pmatrix}\cdot\vec{p}_i \qquad (i=1,2).
$$

Координаты векторов $\vec{g}_1^y$, $\vec{g}_2^y$ определятся по формулам (33):

$$
\begin{aligned}
g_{1i}^y &= -\alpha g_{2i}^x\,, \\
g_{2i}^y &= \alpha g_{1i}^x\,.
\end{aligned}
$$

В случае одного канала $(M=1)$ в качестве свободных параметров можно взять значения E_1, E_2, Γ_1, Γ_2. Тогда значения α, g_{11}^x и g_{21}^x однозначно определятся из системы

$$
\begin{aligned}
(g_{11}^x)^2 &= \frac{\Gamma_1-\alpha^2\Gamma_2}{(1-\alpha^2)^2} \\
(g_{21}^x)^2 &= \frac{\Gamma_2-\alpha^2\Gamma_1}{(1-\alpha^2)^2} \\
g_{11}^x\cdot g_{21}^x &= \frac{2\alpha}{(1-\alpha^2)^2}(E_1-E_2)\,.
\end{aligned}
$$

Подставляя значения g_{11}^x и g_{21}^x из первых двух уравнений системы в третье уравнение, получаем биквадратное уравнение $\alpha^4-2b\alpha^2+1=0$, где

$$
b=\frac{\Gamma_1^2+\Gamma_2^2+4(E_1-E_2)}{2\Gamma_1\Gamma_2}\,.
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
g_{11}^x &= \frac{\Gamma_1-(b-\sqrt{b^2-1})\Gamma_2}{(1-b+\sqrt{b^2-1})^2}\,, \\
g_{21}^x &= \frac{\Gamma_2-(b-\sqrt{b^2-1})\Gamma_1}{(1-b+\sqrt{b^2-1})^2}\,, \\
g_{11}^y &= -(b-\sqrt{b^2-1})g_{21}^x\,, \\
g_{21}^y &= (b-\sqrt{b^2-1})g_{11}^x\,.
\end{aligned}
$$

Отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
g_{11}g_{11} &= \Gamma_1\frac{(E_1-E_2)^2-(\Gamma_2^2-\Gamma_1^2)/4}{(E_1-E_2)^2+(\Gamma_2-\Gamma_1)^2/4}-i\frac{\Gamma_1\Gamma_2(E_1-E_2)}{(E_1-E_2)^2+(\Gamma_2-\Gamma_1)^2/4} \\
g_{21}g_{21} &= \Gamma_2\frac{(E_2-E_1)^2-(\Gamma_1^2-\Gamma_2^2)/4}{(E_2-E_1)^2+(\Gamma_1-\Gamma_2)^2/4}-i\frac{\Gamma_1\Gamma_2(E_2-E_1)}{(E_2-E_1)^2+(\Gamma_1-\Gamma_2)^2/4}\,,
\end{aligned}
$$

что совпадает с формулой (7) из работы [2].

4 Три резонанса

В случае трех резонансов ($N = 3$) и M открытых каналов матрица рассеяния $S(E)$ задается выражением

$$S_{ij} = \delta_{ij} - i\frac{g_{1i}g_{1j}}{E-\epsilon_1} - i\frac{g_{2i}g_{2j}}{E-\epsilon_2} - i\frac{g_{3i}g_{3j}}{E-\epsilon_3}, \qquad (i,j = 1,...M). \tag{44}$$

Параметрами данной модели являются значения $\epsilon_i = E_i - i\Gamma_i/2$ $(i = 1,2,3)$ и три вектора комплексных парциальных ширин $\vec{g}_R = \{g_{Ri}\}_{i=1}^{M}$, $(R = 1,2,3)$.

Требование унитарности матрицы S накладывает на эти параметры $3(M+1)$ ограничений.

Матрица U, связывающая действительные и мнимые части векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, в случае трех резонансов будет иметь вид

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \vec{g}_1^{\,y} &= -\alpha\vec{g}_2^{\,x} - \beta\vec{g}_3^{\,x}, \\ \vec{g}_2^{\,y} &= \alpha\vec{g}_1^{\,x} - \gamma\vec{g}_3^{\,x}, \\ \vec{g}_3^{\,y} &= \beta\vec{g}_1^{\,x} + \gamma\vec{g}_2^{\,x}. \end{aligned} \tag{45}$$

Подставляя параметры α, β, γ в формулы (19)-(21) получим выражения для скалярных произведений векторов парциальных ширин:

$$\begin{aligned} V_{11} &= -2\epsilon_1^y\frac{1+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{22} &= -2\epsilon_2^y\frac{1+\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{33} &= -2\epsilon_3^y\frac{1-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{21}^x &= \frac{2[\alpha(\epsilon_1^x-\epsilon_2^x)-\beta\gamma(\epsilon_1^y+\epsilon_2^y)]}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{31}^x &= \frac{2[\beta(\epsilon_1^x-\epsilon_3^x)+\alpha\gamma(\epsilon_1^y+\epsilon_3^y)]}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{32}^x &= \frac{2[\gamma(\epsilon_2^x-\epsilon_3^x)-\alpha\beta(\epsilon_2^y+\epsilon_3^y)]}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{21}^y &= \frac{2[\beta\gamma(\epsilon_1^x-\epsilon_2^x)+\alpha(\epsilon_1^y+\epsilon_2^y)]}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \end{aligned} \tag{46}$$

$$\begin{aligned} V_{31}^y &= \frac{2[\alpha\gamma(\epsilon_3^x-\epsilon_1^x)+\beta(\epsilon_1^y+\epsilon_3^y)]}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{32}^y &= \frac{2[\alpha\beta(\epsilon_2^x-\epsilon_3^x)+\gamma(\epsilon_2^y+\epsilon_3^y)]}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} V_{11} &= \Gamma_1\frac{1+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{22} &= \Gamma_2\frac{1+\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{33} &= \Gamma_3\frac{1-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}, \\ V_{21} &= \frac{2(\alpha+i\beta\gamma)}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}(\epsilon_1-\epsilon_2^*), \\ V_{31} &= \frac{2(\beta-i\alpha\gamma)}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}(\epsilon_1-\epsilon_3^*), \\ V_{32} &= \frac{2(\gamma+i\alpha\beta)}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}(\epsilon_2-\epsilon_3^*). \end{aligned} \tag{47}$$

Параметры α, β, γ не вполне произвольны, но ограничены условиями

$$\begin{aligned} 0 &\le \frac{4(\alpha^2+\beta^2\gamma^2)}{(1+\alpha^2)^2-(\beta^2-\gamma^2)^2} \le \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{|\epsilon_1-\epsilon_2^*|^2} \le 1, \\ 0 &\le \frac{4(\beta^2+\alpha^2\gamma^2)}{(1+\beta^2)^2-(\alpha^2-\gamma^2)^2} \le \frac{\Gamma_1\Gamma_3}{|\epsilon_1-\epsilon_3^*|^2} \le 1, \\ 0 &\le \frac{4(\gamma^2+\alpha^2\beta^2)}{(1+\gamma^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2} \le \frac{\Gamma_2\Gamma_3}{|\epsilon_2-\epsilon_3^*|^2} \le 1. \end{aligned} \tag{48}$$

Первые три равенства (47) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{i=1}^{M}|g_{1i}|^2}{\Gamma_1} &= \frac{1+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} \ge 1, \\ \frac{\sum_{i=1}^{M}|g_{2i}|^2}{\Gamma_2} &= \frac{1+\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} \ge 1, \\ \frac{\sum_{i=1}^{M}|g_{3i}|^2}{\Gamma_3} &= \frac{1-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2} \ge 1. \end{aligned} \tag{49}$$

Это означает, что сумма парциальных ширин для каждого резонанса обязательно превосходит их общую ширину на величину, исчезающую, если резонансы хорошо разнесены.

Для целей фитирования экспериментальных данных удобно записать ограничения (46) в терминах действительных и мнимых частей векторов парциальных ширин $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$.

Подставляя параметры $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ в формулы (27)-(28) получим выражения для скалярных произведений

$$
\begin{aligned}
(\vec{g}_1^x, \vec{g}_1^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2} \quad & [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_3^x - \varepsilon_2^x) - \varepsilon_1^y(1-\gamma^2)^2 + \\
& +\varepsilon_2^y(\alpha^2-\beta^2\gamma^2) + \varepsilon_3^y(\beta^2-\alpha^2\gamma^2)] \\
(\vec{g}_2^x, \vec{g}_2^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2} \quad & [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_1^x - \varepsilon_3^x) + \varepsilon_1^y(\alpha^2-\beta^2\gamma^2) - \\
& -\varepsilon_2^y(1-\beta^2)^2 + \varepsilon_3^y(\gamma^2-\alpha^2\beta^2)] \\
(\vec{g}_3^x, \vec{g}_3^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2} \quad & [2\alpha\beta\gamma(\varepsilon_2^x - \varepsilon_1^x) + \varepsilon_1^y(\beta^2-\alpha^2\gamma^2) + \\
& +\varepsilon_2^y(\gamma^2-\alpha^2\beta^2) - \varepsilon_3^y(1-\alpha^2)^2]
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
(\vec{g}_1^x, \vec{g}_2^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2} \quad & \{\alpha[\varepsilon_1^x(1-\gamma^2) - \varepsilon_2^x(1-\beta^2) - \varepsilon_3^x(\beta^2-\gamma^2)] + \\
& +\beta\gamma[-\varepsilon_1^y(1-\gamma^2) - \varepsilon_2^y(1-\beta^2) + \varepsilon_3^y(1+\alpha^2)]\} \\
(\vec{g}_1^x, \vec{g}_3^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2} \quad & \{\beta[\varepsilon_1^x(1-\gamma^2) - \varepsilon_2^x(\alpha^2-\gamma^2) - \varepsilon_3^x(1-\alpha^2)] + \\
& +\alpha\gamma[\varepsilon_1^y(1-\gamma^2) - \varepsilon_2^y(1+\beta^2) + \varepsilon_3^y(1-\alpha^2)]\} \\
(\vec{g}_2^x, \vec{g}_3^x) = \frac{2}{(1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2)^2} \quad & \{\gamma[-\varepsilon_1^x(\alpha^2-\beta^2) + \varepsilon_2^x(1-\beta^2) - \varepsilon_3^x(1-\alpha^2)] + \\
& +\alpha\beta[\varepsilon_1^y(1+\gamma^2) - \varepsilon_2^y(1-\beta^2) - \varepsilon_3^y(1-\alpha^2)]\}
\end{aligned}
\tag{51}
$$

Для случая трех резонансов справедливо правило сумм:

$$
(\vec{g}_1, \vec{g}_1) + (\vec{g}_2, \vec{g}_2) + (\vec{g}_3, \vec{g}_3) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3\,. \tag{52}
$$

Соотношения для фаз компонент, аналогичного (40), для случая трех резонансов не получается. Но можно отметить, что соотношения (46) при заданных E_i, Γ_i $(i = 1,2,3)$ и параметрах α, β, γ фиксируют длины векторов парциальных ширин $\vec{g}_i, (i = 1,2,3)$ и углы между ними. Это означает, что если при заданных параметрах $E_i, \Gamma_i, \alpha, \beta, \gamma$ построить некоторые векторы $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$, то измененять значения координат этих векторов можно только с помощью изометрических преобразований (сохраняющих длины и углы).

Это важный результат для фитирования экспериментальных данных.

Модель (44) для трех резонансов и M внешних каналов содержит $3(M+1)$ комплексных параметров: комплексные энергии ε_i и векторы парциальных ширин $\vec{g}_i$, $(i = 1,2,3)$.

Условие унитарности вводит три дополнительных параметра α, β, γ и накладывает $3(M+2)$ ограничений - уравнения (45) и (46). Таким образом, остается $3(M+1)$ свободных параметров (действительных), которые можно выбирать различным образом.

Пусть $M = 1$ (один открытый канал).

Число свободных параметров равно 6. Если в качестве свободных параметров выбрать значения $E_i, \Gamma_i (i = 1,2,3)$, то параметры α, β, γ однозначно определятся из системы (если система имеет решение):

$$
\begin{aligned}
\frac{4(\alpha^2+\beta^2\gamma^2)}{(1+\alpha^2)^2-(\beta^2-\gamma^2)^2} &= \frac{\Gamma_1\Gamma_2}{|\epsilon_1-\epsilon_2^*|^2}\,, \\
\frac{4(\beta^2+\alpha^2\gamma^2)}{(1+\beta^2)^2-(\alpha^2-\gamma^2)^2} &= \frac{\Gamma_1\Gamma_3}{|\epsilon_1-\epsilon_3^*|^2}\,, \\
\frac{4(\gamma^2+\alpha^2\beta^2)}{(1+\gamma^2)^2-(\alpha^2-\beta^2)^2} &= \frac{\Gamma_2\Gamma_3}{|\epsilon_2-\epsilon_3^*|^2}\,.
\end{aligned}
$$

Координаты $g_{11}^x, g_{21}^x, g_{31}^x$ определятся из соотношений (47):

$$
\begin{aligned}
g_{11}^x &= \sqrt{\Gamma_1 \frac{1+\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}}\,, \\
g_{21}^x &= \sqrt{\Gamma_2 \frac{1+\alpha^2-\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}}\,, \\
g_{31}^x &= \sqrt{\Gamma_3 \frac{1-\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{1-\alpha^2-\beta^2-\gamma^2}}\,.
\end{aligned}
$$

Координаты мнимых частей векторов $\vec{g}_i$ определятся из равенств (45).

Пусть $M = 2$ (два открытых канала).

Число свободных параметров равно 9. Если в качестве свободных параметров выбрать значения $E_i, \Gamma_i (i = 1,2,3)$ и α, β, γ, то координаты векторов $\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$ определяются однозначно из соотношений (46) и (45).

Пусть, например,

$$
\vec{g}_1^x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_2^x = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \qquad \vec{g}_3^x = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.
$$

Тогда значения x_i, y_i, z_i определятся из системы (если система имеет решение):

$$
\begin{aligned}
x_1^2 + x_2^2 &= (\vec{g}_1^x, \vec{g}_1^x) \\
y_1^2 + y_2^2 &= (\vec{g}_2^x, \vec{g}_2^x) \\
z_1^2 + z_2^2 &= (\vec{g}_3^x, \vec{g}_3^x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1y_1 + x_2y_2 &= (\vec{g}_1^x, \vec{g}_2^x)\\
x_1z_1 + x_2z_2 &= (\vec{g}_1^x, \vec{g}_3^x)\\
y_1z_1 + y_2z_2 &= (\vec{g}_2^x, \vec{g}_3^x)\,.
\end{aligned}
$$

Значения скалярных произведений $(\vec{g}_i^x, \vec{g}_j^x)$ выражаются через параметры E_i, Γ_i и α, β, γ (см. формулы (50),(51)). Естественно, параметры E_i, Γ_i и α, β, γ должны удовлетворять ограничениям (48).

Пусть имеется $M > 2$ внешних каналов.

Число свободных параметров равно $3(M+1)$. Их можно выбирать различными способами. Например, в качестве свободных параметров можно выбрать параметры $E_i, \Gamma_i (i = 1,2,3)$; и α, β, γ . Тогда для определения $3M$ координат векторов $\vec{g}_i^x$ остается $3(M-2)$ свободных параметров, которые можно задать как углы поворота: $(M-3)$ углов поворота $\psi_1, ..., \psi_{M-3}$ вектора $\vec{g}_3^x$ вокруг осей $\vec{e}_3, ..., \vec{e}_M$; $(M-2)$ углов поворота $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_{M-2}$ гиперплоскости векторов $\vec{g}_2^x, \vec{g}_3^x$ вокруг осей $\vec{e}_2, ..., \vec{e}_M$ и $(M-1)$ угол поворота $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{M-1}$ всех векторов $\vec{g}_i^x$ вокруг осей координат.

Например, при $M = 4$ координаты векторов можно вычислять следующим образом. Положим

$$
\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad
\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad
\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

где

$$
\begin{aligned}
c_1 &= \sqrt{(\vec{g}_1^x, \vec{g}_1^x)}\,,\\
d_1 &= \frac{(\vec{g}_1^x, \vec{g}_2^x)}{c_1}\,, \qquad d_2 = \sqrt{(\vec{g}_2^x, \vec{g}_2^x) - d_1^2}\,,\\
e_1 &= \frac{(\vec{g}_1^x, \vec{g}_3^x)}{c_1}\,, \qquad e_2 = \frac{(\vec{g}_2^x, \vec{g}_3^x) - d_1c_1}{d_2}\,, \qquad e_3 = \sqrt{(\vec{g}_3^x, \vec{g}_3^x) - e_1^2 - e_2^2}\,.
\end{aligned}
$$

Вычислим векторы $\vec{q}_i$ (поворот векторов $\vec{p}_i$ вокруг плоскости $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$):

$$
\vec{q}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\psi_1 & \sin\psi_1 \\ 0 & 0 & -\sin\psi_1 & \cos\psi_1 \end{pmatrix} \cdot \vec{p}_i\,.
$$

Вычислим векторы $\vec{r}_i$ (поворот векторов $\vec{q}_i$ вокруг плоскостей $(\vec{e}_1, \vec{e}_3)$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_4)$):

$$
\vec{r}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_1 & \sin\delta_1 & 0 \\ 0 & -\sin\delta_1 & \cos\delta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\delta_2 & 0 & \sin\delta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sin\delta_2 & 0 & \cos\delta_2 \end{pmatrix} \cdot \vec{q}_i\,.
$$

Наконец, векторы $\vec{g}_i^x$, $(i = 1,2,3)$ получатся как результат поворота векторов $\vec{r}_i$ вокруг плоскостей $(\vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $(\vec{e}_2, \vec{e}_4)$ и $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$:

$$
\vec{g}_i^x = \begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 & 0 & \sin\varphi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi_2 & 0 & \cos\varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 & 0 & 0 & \sin\varphi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_3 & 0 & 0 & \cos\varphi_3 \end{pmatrix} \cdot \vec{r}_i\,.
$$

Таким образом, 6 параметров ψ_1, δ_1, δ_2, φ_1, φ_2, φ_3, и соотношения (50),(51) полностью определяют координаты векторов $\vec{g}_i^x, (i = 1,2,3)$.

Координаты векторов $\vec{g}_i^y, (i = 1,2,3)$ определяем с помощью соотношений (45).

Алгоритм непосредственно обобщается на случай большего числа резонансов. Задача с четырьмя резонансами возникает, например, при изучении семейства ρ' - мезонов, которую мы рассмотрим как пример приложения данного метода.

5 Заключение

Формулы Брейта-Вигнера и их модификации используются в подавляющем числе случаев как для описания экспериментальных данных по процессам, идущим через резонансные промежуточные состояния, так и для сопоставления с экспериментами различных теоретических подходов в рамках которых находятся спектры и свойства резонансов.

Обычно используемое простейшее выражения для амлитуды рассеяния в виде суммы БВ слагаемых в случае перекрывающихся резонансов некорректно и нарушает унитарность.

В настоящей работе приведена последовательная процедура построения унитарной многоканальной, многорезонансной БВ -типа S -матрицы для общего случая M каналов и N резонансов. В следующих работах мы продемонстрируем применение этого метода при описании и для интерпретации семейств возбуждений векторных ρ и ω мезонов.

Литература

1. G.Breit, E.P.Wigner, Phys.Rev. **49**, 519 (1936)
2. В.К.Хеннер, Т.С.Белозерова, Сообщение ОИЯИ, Р4-95-114, Дубна (1995).
3. K.W.McVoy, Ann Phys. **54**, 552 (1969)

Хеннер В.К., Белозерова Т.С. Р4-95-115

Построение унитарной S-матрицы для перекрывающихся резонансов в многоканальных реакциях

Целью работы является обобщение классической параметризации Брейта — Вигнера на случай перекрывающихся резонансов, имеющих несколько каналов распада. Обычно используемая запись амплитуд рассеяния в виде суммы брейт-вигнеровских слагаемых некорректна и нарушает унитарность, если имеется несколько перекрывающихся резонансов с одинаковыми квантовыми числами, таких, что $|E_{R_1} - E_{R_2}| \sim \Gamma_{r_1} + \Gamma_{R_2}$. Мы предлагаем и детально описываем последовательную процедуру построения унитарной T-инвариантной S-матрицы для общего случая M каналов и N резонансов. Метод может применяться при описании и для интерпретации многих задач физики резонансов и ядерной физики.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им.Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод авторов

Henner V.K., Belozerova T.S. P4-95-115

Construction of Unitary S Matrix for Overlapping Resonances in Multichannel Reactions

The aim of this work is to generalize the Breit — Wigner parametrization for the problem of overlapping resonances with few modes of decay. The usual description as a sum of the Breit — Wigner terms is incorrect and violates the unitary in the case of overlapping resonances with the same quantum numbers when $|E_{R_1} - E_{R_2}| \sim \Gamma_{r_1} + \Gamma_{R_2}$. We suggest and describe throughly the method of constructing the unitarity, T-invariant S-matrix for the general case of M channels and N resonances. The method can be applied for the interpretation of different problems of physics of resonances and nuclear physics.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995