

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С326

Б-874

28/iv-76

P4 - 9452

1621/2-76

Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев

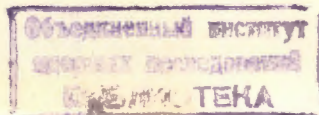
О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРНОГО ИСКАЖЕНИЯ
НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКУЮ ЩЕЛЬ СВЕРХПРОВОДНИКА

1976

P4 - 9452

Й.Г.Бранков, Н.С.Тончев

О ВЛИЯНИИ СТРУКТУРНОГО ИСКАЖЕНИЯ
НА ЭНЕРГЕТИЧЕСКУЮ ЩЕЛЬ СВЕРХПРОВОДНИКА



Бранков Й.Г., Тончев Н.С.

P4 - 9452

О влиянии структурного искажения на энергетическую щель сверхпроводника

Изучалась модель Матиса-Лангера для сверхпроводников со структурным искажением типа удвоения периода. Получены новые данные по зависимости сверхпроводящей щели от параметров системы при $T=0$ и $\mu \neq 0$. Учтено как изменение плотности электронных состояний, так и влияние диэлектрической щели на матричные элементы редуцированного БКШ-взаимодействия.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1976

Brankov J.G., Tonchev N.S.

P4 - 9452

The Effect of the Structure Distortion on the
Energy Gap of a Superconductor

The Mattis-Langer model for superconductors with the structure distortions of the period doubling type has been investigated. The new results have been obtained on the dependence of the superconducting gap on the system parameters at $T=0$ and $\mu \neq 0$. Both the changes of the electron state density and the effect of the dielectric gap on the matrix elements of the reduced BCS interaction have been taken into account.

The investigation has been performed at the
Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research

Dubna 1976

§ I. Введение

В последнее время для ряда сверхпроводников с высокой критической температурой T_s была обнаружена явная корреляция между T_s и температурой T_d , при которой они претерпевают структурный фазовый переход^{/1/}. Попытки объяснить эту корреляцию предпринимались во многих работах по изучению модельных систем^{х)}, обнаруживающих как структурный так и сверхпроводящий фазовый переходы^{/3-13/}.

В трехмерном случае на принципиальную возможность увеличения сверхпроводящей критической температуры, связанную со структурным искажением решетки, было указано в^{/3,4/}. В дальнейшем этот вопрос изучался в работах^{/5-13/}, причем предложенные в^{/9,10/} существенно отличались от остальных.

Один из возможных механизмов влияния структурного фазового перехода на T_s основывается на изменении плотности электронных состояний вблизи поверхности Ферми^{/4/}. В работах^{/6,11-13/} на примере конкретных моделей, описывающих структурный переход, в пределе слабой связи были получены соответствующие количественные результаты.

В настоящей работе мы рассмотрим модельную систему, предложенную Матисом и Лангером в работе^{/3/}. Эта модель позволяет достаточно легко исследовать эффекты, связанные с

х) Здесь мы ограничиваемся обсуждением трехмерных моделей. Для обсуждения квазиодномерного случая, см., например,^{/2/}.

с изменением как плотности электронных состояний, так и эффективного взаимодействия типа Бардина-Купера-Шриффера (БКШ) в искаженной решетке.

§ 2. Модельный гамильтониан

Исходная динамическая система представляет собой однозонный металл с электронным спектром ϵ_k , обладающим свойством

$$\epsilon_k = -\epsilon_{k+Q}, \quad Q = \frac{\pi}{a} (\pm 1, \pm 1 \pm 1), \quad (I)$$

где a – постоянная решетка ($2Q$ – вектор обратной решетки). Как было показано /3,6/, кристаллическая структура металла с таким спектром при определенных условиях становится неустойчивой при включении электрон-фононного взаимодействия. При этом возникает макроскопическое заполнение фононной моды Q

$$V^{-\frac{1}{2}} b_Q^\# \rightarrow -(2g)^{-1} \Delta \quad (2)$$

и перестройка электронного спектра

$$\epsilon_k \rightarrow E_k = \text{sign} \epsilon_k \sqrt{\epsilon_k^2 + \Delta^2}. \quad (3)$$

Здесь V – объем системы, $b_Q^\#$ – фононный оператор, g – константа электрон-фононного взаимодействия, Δ – параметр искажения решетки, который определяется из условия абсолютного минимума плотности свободной энергии /14/.

Модельный гамильтониан получается (см. /3/) в духе традиционной теории БКШ /15/ из гамильтониана типа Фрелиха, однако при исключении фононных переменных /16/ учитывается

макроскопическое заполнение фононной моды Q . В случае эйнштейновских фононов ($\omega_q = \omega$) эффективный гамильтониан редуцированного БКШ типа имеет вид /3/

$$\mathcal{H}(\Delta) = \sum_{k,\sigma} (E_k - \mu) c_{k,\sigma}^\dagger c_{k,\sigma} + \frac{1}{2} V \frac{\Delta^2}{g_d} + 2g^2 \frac{\omega}{V} \sum_{k,k'} \frac{1 + \Delta^2/E_k E_{k'}}{(E_k - E_{k'})^2 - \omega^2} c_{k,1}^\dagger c_{-k,-1}^\dagger c_{-k,-1} c_{k,1}. \quad (4)$$

Здесь $c_{k,\sigma}^\dagger, c_{k,\sigma}$ – операторы рождения и уничтожения, соответственно, для электронов в состояниях с квазиимпульсом k и спином σ ($\sigma = \pm 1$). Константа g_d определяется выражением

$$g_d = \frac{2g^2}{\omega} \quad (5)$$

и в случае наполовину заполненной зоны связана с величиной диэлектрической щели Δ_0 соотношением /3,6/

$$\Delta_0 = \omega / \text{sh} \frac{\omega}{g_d} \approx 2\omega e^{-\frac{\omega}{g_d}} \quad (\mu = 0; \frac{\omega}{g_d} \gg 1), \quad (6)$$

где 2ω – ширина электронной зоны, среднее число электронов фиксируется с помощью химического потенциала μ .

Следует отметить, что в выражении (4) эффекты перенормировки фононных частот не учитываются.

Теперь, в отличие от работы /3/, мы воспользуемся явно БКШ аппроксимацией /15/

$$\frac{g^2 \omega}{(E_k - E_{k'})^2 - \omega^2} \rightarrow -g_s \lambda((E_k - \mu) \lambda((E_{k'} - \mu) \lambda), \quad (7)$$

где

$$\lambda(|E_k - \mu|) = \begin{cases} 1, & |E_k - \mu| \leq \omega_D \\ 0, & |E_k - \mu| > \omega_D \end{cases}$$

Единственное отличие рассматриваемой здесь модели от первоначально предложенной Маттисом и Лангером^{/3/} состоит в том, что мы вводим независимый параметр БКШ взаимодействия g_s (порядка g^2/ω) и параметр обрезания ω_D (порядка ω), которые в принципе являются феноменологическими параметрами теории^{/15/}. Модель^{/3/} соответствует частному случаю $g_s = g^2/\omega$ и $\omega_D = \omega$.

Таким образом, с помощью аппроксимации (7) мы приходим к модельному гамильтониану

$$\mathcal{H}(\Delta) = \sum_{k,r} (E_k - \mu) c_{k,r}^+ c_{k,r} + \frac{1}{2} V \frac{\Delta^2}{g_d} - g_s \frac{1}{V} \sum_{k,k',r} \lambda(|E_k - \mu|) \lambda(|E_{k'} - \mu|) \left(1 + \frac{\Delta^2}{E_k E_{k'}}\right) c_{k,r}^+ c_{k',r}^+ c_{k',r} c_{k,r}, \quad (8)$$

который допускает асимптотически точное решение. Динамическая система, определяемая гамильтонианом (8), принадлежит к классу модельных систем с сепарабельным взаимодействием, изученных Н.Н. Боголюбовым (мл.)^{/17/}

§ 3. Вычисление плотности свободной энергии

Введем следующие ограниченные операторы:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{1}{V} \sum_{k,r} \text{sign } r \lambda(|E_k - \mu|) c_{-k,r} c_{k,r} \\ \eta_2 &= \frac{1}{V} \sum_{k,r} \text{sign } r \lambda(|E_k - \mu|) \frac{\Delta}{E_k} c_{-k,r} c_{k,r} \end{aligned} \quad (9)$$

и с их помощью представим гамильтониан (8) в виде

$$\mathcal{H}(\Delta) = \sum_{k,r} (E_k - \mu) c_{k,r}^+ c_{k,r} - \frac{1}{2} g_s V \sum_{i=1}^2 \eta_i^+ \eta_i + \frac{1}{2} V \frac{\Delta^2}{g_d}. \quad (10)$$

Можно легко проверить, что $\mathcal{H}(\Delta)$ удовлетворяет всем условиям общей теоремы, доказанной Н.Н. Боголюбовым (мл.)^{/17/}, согласно которой плотность свободной энергии системы (10) сходится в термодинамическом пределе к функции

$$\lim_{V \rightarrow \infty} f_V(\Delta; \bar{S}_1, \bar{S}_2) = -k_B T \lim_{V \rightarrow \infty} V^{-1} \ln \text{Tr} \exp\{-\mathcal{H}_0(\Delta; \bar{S}_1, \bar{S}_2)\}. \quad (11)$$

Здесь аппроксимирующий гамильтониан $\mathcal{H}_0(\Delta; S_1, S_2)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0(\Delta; S_1, S_2) &= \sum_{k,r} (E_k - \mu) c_{k,r}^+ c_{k,r} - \frac{1}{2} V \sum_{i=1}^2 (\eta_i^+ S_i + \eta_i S_i^+) + \\ &+ \frac{1}{2} V \left(\sum_{i=1}^2 \frac{|S_i|^2}{g_s} + \frac{\Delta^2}{g_d} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

Параметры \bar{S}_1 и \bar{S}_2 определяются из условия

$$f_V(\Delta; \bar{S}_1, \bar{S}_2) = \min_{(S_1, S_2)} f_V(\Delta; S_1, S_2).$$

Подставив (9) в (12) и совершив некоторые простые преобразования, запишем $\mathcal{H}_0(\Delta; S_1, S_2)$ в виде

$$\mathcal{H}_0(\Delta; S_1, S_2) = \sum_k (c_{k,1}^+, c_{k,-1}) \begin{pmatrix} E_k - \mu & -\tilde{\Sigma}(E_k) \\ -\tilde{\Sigma}^*(E_k) & -E_k + \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{k,1} \\ c_{k,-1} \end{pmatrix} + K, \quad (13)$$

где

$$\tilde{\Sigma}(E_k) = \lambda(|E_k - \mu|) \Sigma(E_k), \quad \Sigma(E_k) = (S_1 + \frac{\Delta}{E_k} S_2),$$

$$K = \frac{1}{2} V \left(\sum_{i=1}^2 \frac{|S_i|^2}{g_s} + \frac{\Delta^2}{g_d} - 2\mu \right).$$

Очевидно, одночастичный спектр гамильтониана (13) определяется выражением

$$\pm \sqrt{(E_k - \mu)^2 + |\tilde{Z}(E_k)|^2} + K, \quad (14)$$

откуда для плотности аппроксимирующей свободной энергии имеем

$$f_V(\Delta; S_1, S_2) = -2k_B T V^{-1} \sum_k \ln 2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{(E_k - \mu)^2 + |\tilde{Z}(E_k)|^2}}{2k_B T} + \frac{K}{V} \quad (15)$$

Как и в случае обычной модели БКШ, без потери общности можно считать S_1 и S_2 действительными параметрами /17/.

Далее, заменяя в пределе $V \rightarrow \infty$ суммирование по квазиимпульсам K интегрированием по электронному спектру ϵ_k , получаем

$$f_\infty(\Delta; S_1, S_2) = -2k_B T \int_{-\omega}^{\omega} \rho_0(\epsilon) d\epsilon \ln 2 \operatorname{ch} \frac{\sqrt{(E - \mu)^2 + |\tilde{Z}(\epsilon)|^2}}{2k_B T} + \frac{K}{V},$$

где $\rho_0(\epsilon)$ — плотность электронных состояний в исходной зоне $\{\epsilon_k\}$. Для краткости записи мы опускаем аргументы функциональной зависимости E от ϵ и Δ (см. (3)).

Итак, в термодинамическом пределе плотность свободной энергии рассматриваемой модельной системы (8) дается функцией

$$f_\infty(\bar{\Delta}, \bar{S}_1, \bar{S}_2) = \min_{(\Delta, S_1, S_2)} f_\infty(\Delta; S_1, S_2). \quad (17)$$

Условие абсолютного минимума (17) приводит к уравнениям самосогласования для определения параметров $\bar{\Delta}$, \bar{S}_1 и \bar{S}_2 :

$$\frac{\partial}{\partial \Delta} f_\infty(\Delta; S_1, S_2) = 0, \quad (18a)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_1} f_\infty(\Delta; S_1, S_2) = 0, \quad (18б)$$

$$\frac{\partial}{\partial S_2} f_\infty(\Delta; S_1, S_2) = 0. \quad (18в)$$

Систему уравнений (18a)–(18в) необходимо дополнить уравнением для определения химического потенциала μ

$$-\frac{\partial}{\partial \mu} f_\infty(\Delta; S_1, S_2) = \bar{n}, \quad (19)$$

где \bar{n} — средняя концентрация электронов. Более удобно, однако, вместо \bar{n} использовать энергию Ферми в неискаженной электронной зоне, которая связана с \bar{n} соотношением

$$2 \int_{-\omega}^{\omega} \rho_0(\epsilon) d\epsilon = \bar{n}. \quad (20)$$

Далее мы будем использовать приближение постоянной плотности электронных состояний

$$\rho_0(\epsilon) = \frac{1}{2\omega}, \quad -\omega \leq \epsilon \leq \omega, \quad (21)$$

которое является достаточно корректным в рассматриваемой задаче /3/.

§ 4. Анализ уравнений самосогласования при $T = 0$

в пределе слабой связи

Здесь мы исследуем случай фиксированного отклонения энергии Ферми от центра зоны (см. работу /11/). В этом случае струк-

турный и сверхпроводящий фазовые переходы вполне совместимы (в отличие от случая наполовину заполненной зоны /II, I2/) благодаря тому, что в основном состоянии искаженной фазы либо верхняя подзона $\{E_k \geq \Delta\}$ частично заполнена "лишними" электронами ($\mu > \Delta$, если $\mu_0 > 0$), либо нижняя подзона $\{E_k \leq -\Delta\}$ остается неполностью заполненной ($\mu < -\Delta$, если $\mu_0 < 0$). Следовательно, такое основное состояние неустойчиво относительно включения инфинитезимально слабого БКШ-взаимодействия. Для определенности далее рассматриваем случай $\mu_0 > 0$.

Из вышесказанного следует, что переходя к пределу слабой БКШ-связи ($g_s/\omega \ll 1$), мы можем считать $T_s \ll T_d$, так что для любой фиксированной температуры $T \leq T_s$ параметр искажения решетки Δ имеет конечное, отличное от нуля значение. При этих условиях, для диэлектрической щели (см. (I8a)) и для химического потенциала (см. (I9)) в основном состоянии системы находим следующие хорошо известные результаты /II/;

$$\Delta = \sqrt{\Delta_0(\Delta_0 - 2\mu_0)}, \quad \Delta_0 \geq 2\mu_0 \quad (22)$$

$$\mu = \sqrt{\mu_0^2 + \Delta^2} = \Delta_0 - \mu_0 \quad (23)$$

Выражения (22), (23) справедливы в пределе $S_1 \rightarrow 0$ и $S_2 \rightarrow 0$ с точностью до членов порядка

$$\Delta_0^2/\omega^2 \ll 1. \quad (24)$$

Рассмотрим теперь уравнения (I8б) и (I8в) при $T=0$. Прежде всего заметим, что сверхпроводящая щель в спектре эле-

ментарных возбуждений (I4) появляется на поверхности Ферми $E_{k_F} = \mu$ и ее величина равна

$$\Sigma \equiv \Sigma(\mu) = S_1 + \frac{\Delta}{\mu} S_2 \quad (25)$$

Таким образом, зная решения \bar{S}_1, \bar{S}_2 уравнений (I8б) и (I8в), мы легко можем определить величину энергетической щели Σ . Заменяя в указанных уравнениях переменную интегрирования на $E = \sqrt{E^2 + \Delta^2}$, пренебрегая членами порядка $\Delta^2/\omega^2 \ll 1$, получаем

$$\int_{-\omega}^{\omega} \rho_{\Delta}(E) dE \frac{\tilde{\Sigma}(E)}{\sqrt{(E-\mu)^2 + \tilde{\Sigma}^2(E)}} = \frac{S_1}{g_s} \quad (26a)$$

$$\Delta \int_{-\omega}^{\omega} \rho_{\Delta}(E) \frac{dE}{E} \frac{\tilde{\Sigma}(E)}{\sqrt{(E-\mu)^2 + \tilde{\Sigma}^2(E)}} = \frac{S_2}{g_s} \quad (26б)$$

где $\rho_{\Delta}(E)$ - плотность электронных состояний в искаженной фазе

$$\rho_{\Delta}(E) = \begin{cases} \frac{1}{2\omega} \frac{|E|}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}}, & \Delta \leq |E| \leq \omega \\ 0, & |E| < \Delta. \end{cases} \quad (27)$$

В двух предельных случаях, а именно, $\omega_D \gg \mu$ и $\omega_D \ll \mu_0$, можно получить достаточно простую асимптотическую форму (при $g_s/\omega \rightarrow 0$) решения системы уравнений (26).

Рассмотрим сперва случай $\omega_D \gg \mu$. В этом случае можно пренебречь разницей между обрезанными функциями $\lambda(|E_k - \mu|)$ и $\lambda(|E_k + \mu|)$, считая их приближенно равными

$$\lambda(E) = \begin{cases} 1, & |E| \leq \omega_D \\ 0, & |E| > \omega_D \end{cases} \quad (28)$$

Тогда уравнения (26а) и (26б) принимают вид,

$$S_1 I_{\omega_D}^{(4)}(S_1, S_2) + \mu(S_1 + \frac{\Delta}{\mu} S_2) I_{\omega_D}^{(2)}(S_1, S_2) = S_1 \frac{\omega_D}{g_s}, \quad (29a)$$

$$S_1 \Delta I_{\omega_D}^{(2)}(S_1, S_2) + \Delta^2 S_2 I_{\omega_D}^{(3)}(S_1, S_2) = S_2 \frac{\omega_D}{g_s}, \quad (29б)$$

где

$$I_{\omega_D}^{(4)}(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\omega_D} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \frac{E - \mu}{\sqrt{(E - \mu)^2 + Z^2(E)}} + \frac{E + \mu}{\sqrt{(E + \mu)^2 + Z^2(E)}} \right\} \quad (30a)$$

$$I_{\omega_D}^{(2)}(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\omega_D} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(E - \mu)^2 + Z^2(E)}} - \frac{1}{\sqrt{(E + \mu)^2 + Z^2(E)}} \right\} \quad (30б)$$

$$I_{\omega_D}^{(3)}(S_1, S_2) = \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\omega_D} \frac{dE}{E \sqrt{E^2 - \Delta^2}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{(E - \mu)^2 + Z^2(E)}} + \frac{1}{\sqrt{(E + \mu)^2 + Z^2(E)}} \right\}. \quad (30в)$$

Теперь нам необходимо определить асимптотику интегралов (30) при $S_1 \rightarrow 0$ и $S_2 \rightarrow 0$. Для $I_{\omega_D}^{(4)}(S_1, S_2)$ сразу получаем

$$\lim_{S_1, S_2 \rightarrow 0} I_{\omega_D}^{(4)}(S_1, S_2) = \text{Arch} \frac{\omega_D}{\Delta} - \text{Arch} \frac{\mu}{\Delta} \approx \ln \frac{2\omega_D}{\Delta_0}. \quad (31)$$

Здесь мы использовали соотношения (23). Далее заметим, что с точностью до членов порядка

$$\mu \lim_{S_1, S_2 \rightarrow 0} [I_{\omega_D}^{(2)}(S_1, S_2) - I_{\omega_D}^{(2)}(S_1, S_2)] \sim \frac{\mu^2}{\omega_D^2} \ll 1, \\ \Delta^2 \lim_{S_1, S_2 \rightarrow 0} [I_{\omega_D}^{(3)}(S_1, S_2) - I_{\omega_D}^{(3)}(S_1, S_2)] \sim \frac{\Delta^2}{\omega_D^2} \ll 1, \quad (32)$$

верхний предел интегрирования ω_D (30б) и (30в) можно заменить на ∞ . Подставляя асимптотические выражения для интегралов $I_{\omega_D}^{(2,3)}(S_1, S_2)$ (см. Приложение)

$$I_{\omega_D}^{(2)}(S_1, S_2) \approx \frac{1}{\mu_0} \ln \frac{4\mu_0}{\Delta_0 Z} \\ I_{\omega_D}^{(3)}(S_1, S_2) \approx \frac{1}{\mu \mu_0} \ln \frac{4\mu_0}{\Delta_0 Z} + \frac{1}{\Delta \mu} \text{arctg} \frac{\mu_0}{\Delta} \quad (33)$$

в уравнения (29), нетрудно найти искомое значение сверхпроводящей цепи

$$Z = \frac{4\mu_0^2}{\Delta_0} \left(\frac{Z_0}{\Delta_0} \right)^{\frac{\mu_0}{\Delta_0 - \mu_0}} \mathcal{L}_1^{-1} \quad (\omega_D \gg \mu), \quad (34)$$

где

$$\mathcal{L}_1 = 1 + \frac{\Delta^2}{\mu^2} \ln \frac{\Delta_0}{Z_0} \left[\ln \frac{2\omega_D}{Z_0} - \frac{\Delta}{\mu} \text{arctg} \frac{\mu_0}{\Delta} \right]^{-1}. \quad (35)$$

Здесь мы ввели параметр

$$Z_0 = 2\omega_D e^{-\frac{\omega_D}{g_s}}. \quad (36)$$

Заметим, что (34) отличается от результата работы /II/, полученного для модели двухзонного полуметалла с четырехфермионным взаимодействием (в случае равных констант межзонного и внутризонного взаимодействий) только наличием функции $\frac{\Delta}{\mu} \times \text{arctg} \frac{\mu_0}{\Delta}$ в выражении для \mathcal{L}_1 (см. (35)).

Происхождение величины \mathcal{L}_1 обусловлено увеличением матричных элементов БКШ-взаимодействия в $(1 + \frac{\Delta^2}{E_k E_k'})$ раз

(см. (8)) по сравнению с неискаженной фазой ($\Delta=0$) и приводит к следующей перенормировке константы связи g_s :

$$g_s \rightarrow \alpha_1 g_s \quad (\omega_D \gg \mu). \quad (37)$$

Из (34) и (35) видно, что эффект перенормировки (37) и эффект повышения плотности электронных состояний на уровне Ферми

$$\rho_\Delta(\mu)/\rho_0(\mu) = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{\Delta_0 - \mu_0}{\mu} \quad (38)$$

- величины одного порядка и приводят к увеличению щели Σ по сравнению с Σ_0 (так как $\Sigma_0/\Delta_0 \ll 1$).

Рассмотрим теперь второй предельный случай: $\omega_D \ll \mu_0$. Здесь уравнения (26) принимают вид:

$$\frac{1}{2} \Sigma \int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} h_1(E) \frac{dE}{\sqrt{(E - \mu)^2 + \Sigma^2(E)}} = S_1 \frac{\Sigma}{g_s}, \quad (39a)$$

$$\frac{1}{2} \Sigma \int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} h_2(E) \frac{dE}{\sqrt{(E - \mu)^2 + \Sigma^2(E)}} = S_2 \frac{\Sigma}{g_s}, \quad (39b)$$

где

$$h_1(E) = \frac{E}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \cdot \frac{\Sigma(E)}{\Sigma}, \quad h_2(E) = \frac{\Delta}{\sqrt{E^2 - \Delta^2}} \cdot \frac{\Sigma(E)}{\Sigma}. \quad (40)$$

Как легко видеть, изменением функций $h_{1,2}(E)$ на узком энергетическом интервале $[\mu - \omega_D, \mu + \omega_D]$ можно пренебречь, так как оно приводит к поправкам порядка

$$\frac{\mu \omega_D}{\mu_0^2} \ll 1. \quad (41)$$

Считая условие (41) выполненным, мы подставляем в уравнения (39) вместо $h_{1,2}(E)$ их значения на поверхности Ферми:

$$h_1(\mu) = \frac{\mu}{\mu_0}, \quad h_2(\mu) = \frac{\Delta}{\mu_0}$$

и используя асимптотическую форму интеграла (см. Приложение)

$$\int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} \frac{dE}{\sqrt{(E - \mu)^2 + \Sigma^2(E)}} \approx 2 \ln \frac{2\omega_D}{\Sigma}, \quad (42)$$

находим

$$\Sigma = 2\omega_D \left(\frac{\Sigma_0}{2\omega_D} \right)^{\frac{\mu_0}{\Delta_0 - \mu_0}} \alpha_2^{-1} \quad (\omega_D \ll \mu_0), \quad (43)$$

где

$$\alpha_2 = 1 + \frac{\Delta^2}{\mu^2}. \quad (44)$$

Таким образом, в этом случае коэффициент $(1 + \Delta^2/E_F E_F)$ в гамильтониане (8) приводит к перенормировке

$$g_s \rightarrow \alpha_2 g_s \quad (\omega_D \ll \mu_0), \quad (45)$$

где величина α_2 равна значению этого коэффициента на поверхности Ферми.

Авторы признательны Ю.В. Копяеву, Н.М. Плакиде и В.А. Загребнову за полезные обсуждения.

Приложение

Здесь мы приводим метод получения асимптотических выражений (33) и (42). Этот метод основывается на идеях анализа "уравнений компенсации" в теории БКШ, который приведен В.В. Толмачевым в [18] и обобщает схему, предложенную в работе [11].

Докажем сначала справедливость выражений (33). Заметим, что каждый из интегралов $I_{\infty}^{(2,3)}(S_1, S_2)$ представляет собой (см. (30)) сумму двух членов, первый из которых расходится логарифмически, когда $S_1 \rightarrow 0$ и $S_2 \rightarrow 0$, тогда как второй остается ограниченным. Обозначая соответствующие расходящиеся интегралы через $A^{(2,3)}(S_1, S_2)$, имеем

$$I_{\infty}^{(2)}(S_1, S_2) \approx A^{(2)}(S_1, S_2) - \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dE}{\sqrt{E^2 - \Delta^2} (E - \mu)}$$

$$I_{\infty}^{(3)}(S_1, S_2) \approx A^{(3)}(S_1, S_2) + \frac{1}{2} \int_{\Delta}^{\infty} \frac{dE}{E \sqrt{E^2 - \Delta^2} (E + \mu)} \quad (A.1)$$

С помощью следующих интегралов

$$Y_E^{(2)}(\Sigma) = \int_{\Delta}^E \frac{dx}{\sqrt{x^2 - \Delta^2} \sqrt{(x - \mu)^2 + \Sigma^2}}, \quad Y_E^{(3)}(\Sigma) = \int_{\Delta}^E \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - \Delta^2} \sqrt{(x - \mu)^2 + \Sigma^2}}, \quad (A.2)$$

рассматриваемых как функции от верхнего предела E , запишем $A^{(2,3)}(S_1, S_2)$ в виде

$$A^{(2,3)}(S_1, S_2) = \int_{\Delta}^{\infty} \varphi(E; S_1, S_2) \frac{d}{dE} Y_E^{(2,3)}(\Sigma) dE \quad (A.3)$$

где

$$\varphi(E; S_1, S_2) = \frac{\sqrt{(E - \mu)^2 + \Sigma^2}}{\sqrt{(E - \mu)^2 + \Sigma^2} \Sigma}$$

Далее, из (A.3) находим

$$A^{(2,3)}(S_1, S_2) = \varphi(E; S_1, S_2) Y_E^{(2,3)}(\Sigma) \Big|_{\Delta}^{\infty} - \int_{\Delta}^{\infty} Y_E^{(2,3)}(\Sigma) \frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2) dE =$$

$$= Y_{\infty}^{(2,3)}(\Sigma) - \int_{\Delta}^{\infty} Y_E^{(2,3)}(\Sigma) \frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2) dE \quad (A.4)$$

Мы предположили, что ведущая асимптотика интегралов $A^{(2,3)}(S_1, S_2)$ определяется выражениями $I_{\infty}^{(2,3)}(\Sigma)$. Чтобы доказать это, оценим последний член в правой части равенства (A.4). Имеем

$$\left| \int_{\Delta}^{\infty} Y_E^{(2,3)}(\Sigma) \frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2) dE \right| \leq Y_{\infty}^{(2,3)}(\Sigma) \int_{\Delta}^{\infty} \left| \frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2) \right| dE$$

Вычисляя производную $\frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2)$ и мажорируя ее выражением

$$\frac{\Delta S_2}{\mu} \frac{1}{E^2} + \frac{\Delta S_2}{\mu} \frac{\Sigma}{\Sigma(E)} \left[1 + \frac{\mu}{E} \frac{\Sigma}{\Sigma(E)} \right] \frac{1}{E \sqrt{(E - \mu)^2 + \Sigma^2}}$$

можно показать, что

$$\int_{\Delta}^{\infty} \left| \frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2) \right| dE \leq O(S_2 \ln \Sigma) \quad (A.5)$$

Заметим теперь, что $Y_{\infty}^{(2,3)}(\Sigma)$ можно выразить через эллиптические интегралы первого и третьего рода, как следует

$$Y_{\infty}^{(2)}(\Sigma) = \frac{1}{\sqrt{pq}} F(\varphi, k)$$

$$Y_{\infty}^{(3)}(\Sigma) = \frac{4\mu}{\sqrt{pq} (q-p)^2} \left\{ F(\varphi, k) - \Pi\left(\varphi, \frac{(q-p)^2}{4pq}, k\right) + \frac{1}{\Delta \sqrt{\mu^2 + \Sigma^2}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\mu^2 + \Sigma^2}}{\Delta} \right\}$$

где

$$q = \sqrt{(\mu + \Delta)^2 + \Sigma^2}, \quad p = \sqrt{(\mu - \Delta)^2 + \Sigma^2},$$

$$\varphi = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{q}{p}}, \quad k = \sqrt{\frac{(q+p)^2 + 4\Delta^2}{4pq}}.$$

Ведущая асимптотика соответствующих полных эллиптических интегралов, когда

$$k' \equiv \sqrt{1-k^2} \approx \frac{\Delta \Sigma}{\mu^2} \rightarrow 0,$$

дается выражениями [19]

$$F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \sim \ln 4/k'$$

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2}, n, k\right) \sim \frac{1}{n+1} \left\{ \ln 4/k' + \sqrt{n} \operatorname{arctg} \sqrt{n} \right\}. \quad (\text{A.6})$$

Принимая во внимание (A.6) и вычисляя оставшиеся ограниченные интегралы после подстановки в них $S_1 = S_2 = 0$, приходим к выражениям (33).

Соотношение (42) можно проверить аналогичным образом. Введем

$$G_E(\Sigma) = \int_{\mu - \omega_D}^E \frac{dx}{\sqrt{(x-\mu)^2 + \Sigma^2}}$$

и запишем

$$\int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} \frac{dE}{\sqrt{(E-\mu)^2 + \Sigma^2} \varphi(E)} = \int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} \varphi(E; S_1, S_2) \frac{d}{dE} G_E(\Sigma) dE =$$

$$= \varphi(\mu + \omega_D; S_1, S_2) G_{\mu + \omega_D}(\Sigma) - \int_{\mu - \omega_D}^{\mu + \omega_D} G_E(\Sigma) \frac{d}{dE} \varphi(E; S_1, S_2) dE =$$

$$= G_{\mu + \omega_D}(\Sigma) [1 + O(S_2 \ln \Sigma)]$$

Здесь мы разложили $\varphi(\mu + \omega_D, S_1, S_2)$ в степенной ряд по $\frac{S_{1,2}}{\omega_D}$ и воспользовались также оценкой (A.5). Теперь прямым вычислением находим

$$G_{\mu + \omega_D}(\Sigma) = 2 \operatorname{Arsh} \frac{\omega_D}{\Sigma} \approx 2 \ln \frac{2\omega_D}{\Sigma},$$

т.е. то же, что и (47).

Литература:

- I. A.C. Lawson. Phys.Lett. 36A, 8 (1971).
A.D.C. Grassie, A. Benyon. Phys.Lett., 39A, 199 (1972).
W. Buokel, B. Stritzker. Phys.Lett., 43A, 403 (1973).
K. Inone, K. Tachikawa. Japan J. Phys., 12, 161 (1973).
T. Takashima, H. Hayashi. Phys.Lett., 47A, 209 (1974).
2. K. Levin, D.L. Mills, S.L. Cunningham. Phys.Rev., 10B, 3821 (1974).
3. D.C. Mattis, W.D. Langer. Phys.Rev.Lett., 25, 376 (1970).
4. Ю.В. Копаев. ЖЭТФ, 58, 1012 (1970).
5. Ю.В. Копаев, Р.Х. Тимеров. ФТТ, 14, 86 (1972).
6. Ю.В. Копаев, Р.Х. Тимеров. ЖЭТФ, 63, 290 (1972).
7. А.Г. Аронов, Э.Б. Сонин. ЖЭТФ, 63, 1059 (1972).
8. S.C. Lo, K. Wong. Nuovo Cim., 10B, 361 (1972).
9. L.R. Testardi. Phys.Rev., B5, 4342 (1972).
10. P.V. Allen, M.L. Cohen. Phys.Rev.Lett., 29, 1593 (1972).
11. А.И. Русинов, До Чан Кат, Ю.В. Копаев. ЖЭТФ, 65, 1984 (1973).
12. И.Г. Бранков, Н.С. Тончев, Сообщение ОИЯИ, Р4-8150 Дубна, 1974.
13. И.Г. Бранков, Н.С. Тончев. Сообщения ОИЯИ, Р4-8907, Р4-8940, Дубна, 1975.

14. J.G.Brankov, N.S.Tonohev, V.A.Zagrebnov. *Physica*, 79A, 125 (1975).
15. J.Bardeen, L.N.Cooper, J.R.Schrieffer. *Phys.Rev.*, 106, 162 (1957); 108, 1175 (1957).
N.N.Bogolubov. *Physica* 26, 51 (1960).
16. H.Frohlich. *Proc.Roy.Soc.*, A125, 291 (1952).
J.Bardeen, D.Pines. *Phys.Rev.*, 99, 1140 (1955).
17. Н.Н. Боголюбов (мл.) Метод исследования модельных гамильтонианов, М., Наука, 1974.
18. В.В. Толмачев. Теория ферми-газа, стр. 242, М., МГУ, 1973.
19. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции. М., Наука, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 января 1976 года.