

С133.1

A-139

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

15/10/76



889/2-76

P4 - 9431

Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский

МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИСА
И ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ

1975

Р4 - 9431

Х.О.Абдуллоев, И.Л.Боголюбский

**МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ВРИСА
И ДИНАМИКА СОЛИТОНОВ**

**Объединенный институт
экстремных исследований
БИБЛИОТЕКА**

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Кортевега-де Вриса /1/, предложенное ещё в 1895 году для описания нелинейных волн на поверхности жидкости, в последнее время вызывает повышенный интерес. Это объясняется, во-первых, тем, что оно описывает широкий класс волновых процессов при учёте слабой нелинейности и дисперсии волн, во-вторых, необычными математическими свойствами этого уравнения. Уравнение $\mathcal{K}_g B$ является вполне интегрируемой гамильтоновой системой, не допускающей стохастизации /2/. Для него методом обратной задачи теории рассеяния (ОЗТР) получены так называемые N -солитонные решения /3/, описывающие упругие взаимодействия солитонов, т.е. такие взаимодействия, в результате которых изменяется лишь фаза сталкивающихся солитонов. Упругость их взаимодействия является не случайностью, а выражением отсутствия стохастизации в полностью интегрируемой системе.

Уравнение $\mathcal{K}_g B (u_t + u_x + (u^2)_x + u_{xxx} = 0)$ было получено в длинноволновом пределе и в линейном приближении даёт спектр $\omega = k(1 - k^2)$. При $k > 1$ нарушается основное предположение, используемое при выводе этого уравнения, о том, что все волны движутся в положительном направлении оси x . Неправильное описание дисперсии коротких волн хотя и не приводит к некорректности задачи Коши для уравнения $\mathcal{K}_g B$, как это имеет место в случае уравнения Буссинеса /4,5/, однако ведёт к неприятному условию устойчивости разностных схем при численном исследовании, $\tau < c h^3$ (c - численный коэффициент порядка единицы). Можно предложить другие урав-

нения, которые будут, во всяком случае, не хуже уравнения ЖгВ
описывать эволюцию длинных нелинейных волн, но, помимо этого,
будут более удобными с точки зрения вычислений на ЭВМ.

В работе [6], например, использовалось уравнение, которое
в лабораторной системе координат имеет вид:

$$U_t + U_x + (U^2)_x - U_{xxt} = 0. \quad (1)$$

Переходя в систему координат, движущуюся с единичной скоростью
в положительном направлении оси X, получим

$$U_t + (U^2)_x + U_{xxx} - U_{xxt} = 0. \quad (2)$$

В § 1 данной работы исследуются вопросы устойчивости численного
решения (2).

В § 2 проведено изучение формирования солитонов в рамках
уравнения (2).

Изучению взаимодействия солитонов с точки зрения проблемы
Ферми-Паста-Улама (ФПУ) посвящён § 3.

§ 1. Методика численного исследования уравнения (2)

Для решения на ЭВМ уравнения (2) была принята симметричная
явная схема 2-го порядка точности по обеим переменным X и t,
имеющая вид (i, h - индекс и шаг по оси x; n, τ - по оси t):

$$\begin{aligned} & \frac{U_i^{n+1} - U_i^{n-1}}{2\tau} + \frac{(U^2)_{i+1}^n - (U^2)_{i-1}^n}{2h} + \\ & + \frac{U_{i+2}^n - 2U_{i+1}^n + 2U_{i-1}^n - U_{i-2}^n}{2h^3} + \frac{U_{i+1}^{n-1} - 2U_i^{n-1} + U_{i-1}^{n-1}}{2\tau h^2} - \\ & - \frac{U_{i+1}^{n+1} - 2U_i^{n+1} + U_{i-1}^{n+1}}{2\tau h^2} = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Для исследования устойчивости схемы (3) при $u \rightarrow 0$ положим

$$U^{n+1} = \lambda U^n, \quad U_{i+m} = U_i e^{im\varphi}$$

Подставляя эти выражения в (3), получим для множителя пере-
хода λ квадратное уравнение:

$$\lambda^2 - 2iB\lambda - 1 = 0, \quad (4)$$

$$B = \frac{2\tau}{h^3} \sin\varphi \sin^2 \frac{\varphi}{2} / \left(1 + \frac{2}{h^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right).$$

Решая это уравнение, убеждаемся, что $|\lambda| = 1$ при $B \leq 1$.
Нетрудно показать, что при любом φ выполнение условия $B \leq 1$
гарантируется, если $\tau/h \leq 1$. Это условие легко реализовать
при счёте, в отличие от достаточно жёсткого ограничения $\tau < ch^3$,
возникающего при численном решении уравнения ЖгВ.

§ 2. Нелинейная эволюция начальных данных

Уравнение (2) может быть получено варьированием функционала:

$$S = \int h dt dx = \frac{1}{2} \int [\varphi_x \varphi_x + \frac{1}{3} \varphi_x^3 + \varphi^2 + 2\varphi \varphi_x - \varphi_x \varphi_t] dx dt,$$

где $\varphi = U_x, \varphi_x = U$.

Отметим попутно, что при замене $\frac{1}{3} \varphi_x^3$ на $\frac{1}{6} \varphi_x^4$
получается уравнение типа (2), однако с членом $(u^3)_x$ вместо
 $(u^2)_x$.

Уравнение (2) имеет законы сохранения:

$$\frac{dI_n}{dt} = 0, \quad I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx,$$

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + u_x^2) dx, \quad I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{u_x^2}{2}\right) dx.$$

После соприкосновения солитонов наблюдается отщепление волны разрежения малой амплитуды A^e . Эта волна, будучи линейной волной уравнения (2), распространяется со скоростью, меньшей единицы, и отстаёт от солитонов. Максимальная амплитуда волны разрежения, зафиксированная в эксперименте, составила $|A^e| = 0,17 \cdot 10^{-2}$. После того как больший солитон отделяется от меньшего и уходит вперёд, между ними остаётся практически невозмущенное решение $u = 0$ (в эксперименте $|u| < 0,3 \cdot 10^{-4}$). Это показывает, что неупругое отщепление воли происходит в основном в момент максимального перекрытия двух солитонов. Таким образом, зафиксирован эффект неупругости взаимодействия двух солитонов, составляющий около 0,3% от амплитуды максимального солитона (уровень вычислительных ошибок составляет меньше 10% от амплитуды возмущений, рождённых при неупругом взаимодействии солитонов).

Однако такая незначительная по величине неупругость является принципиальной. Приведен ещё один пример уравнения с неупругим взаимодействием солитонов (см. также ^{15/}). Полученная в рамках модифицированного уравнения Буссинеса ^{15/}

$$u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxtt}$$

неупругость взаимодействия одинаковых встречных солитонов составила при $A=2$ около 10%. По-видимому, такая заметная неупругость объясняется тем, что "расстояние" между уравнением $u_{tt} = u_{xx} + (u^2)_{xx} + u_{xxtt}$ и уравнением нелинейной струны (или Буссинеса)^{*}) больше, чем "расстояние" между уравнением (2) и уравнением KgB .

*) Уравнение Буссинеса описывает упругое столкновение солитонов (подробнее см. цитированную в [5] литературу).

Возможно, что большая степень неупругости в ^{15/} объясняется также тем, что в этой работе были рассмотрены встречные взаимодействия солитонов, имеющих в момент столкновения большую относительную скорость ($v_{отн} > 2$). Далее, в работе [8] было показано, что в рамках так называемого $MKgB$ уравнения:

$$u_t + (u^3)_x + u_{xxx} = 0 \quad (6)$$

взаимодействия солитонов являются упругими. Рассмотрим "улучшенное" $MKgB$ уравнение:

$$u_t + (u^3)_x + u_{xxx} - u_{xxt} = 0 \quad (7)$$

Солитонные решения этого уравнения имеют вид:

$$u = A \cdot \operatorname{sech}^{-1} \left[\sqrt{\frac{A^2}{A^2 + 2}} (x - Mt) \right], \quad M = \frac{A^2}{2} \quad (8)$$

С помощью ЭВМ были рассмотрены взаимодействия солитонов (8), причём амплитуда большего солитона в наших расчётах в два раза превышала амплитуду меньшего. Неупругость взаимодействия солитонов (8) оказывается на порядок выше, чем неупругость взаимодействия солитонов (5). Определим "коэффициент неупругости" K_{inel} как отношение амплитуды возмущения, рождённого при столкновении солитонов, к амплитуде максимального солитона. Зависимость этого коэффициента от амплитуды большего солитона изображена на рис. I. Видно, что K_{inel} возрастает при увеличении амплитуды солитонов.

Таким образом, уравнения (2), (7), как и модифицированное уравнение Буссинеса, описывают динамические системы, в которых возможна стохастизация, т.е. необратимое перераспределение энергии по степеням свободы (относительно ярко выраженной неупругости взаимодействия высокочастотных солитонов см. работу [9]).

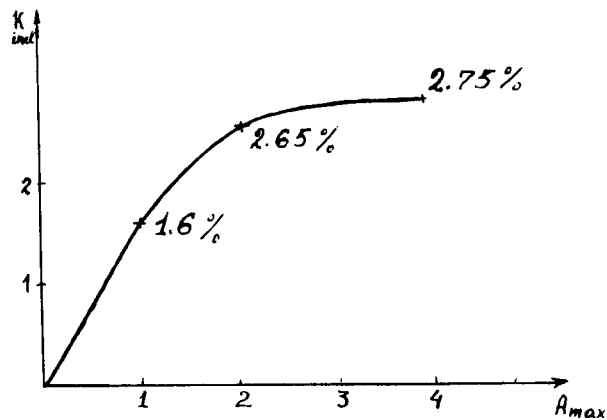


Рис. 1. Зависимость "коэффициента неупругости" взаимодействия солитонов от их амплитуд для уравнения (7) ($A_1=2A_2$).

Авторы выражают благодарность В.Г.Маханькову, под руководством которого проводилась данная работа, и Е.П.Лидкову за обсуждение работы и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. D.Korteweg, G. de Vries. Phil.Mag., 39, 422, 1895.
2. В.Е.Захаров, Л.Д.Фаддеев. Функциональный анализ и его приложения, 5, вып. 4, 18, 1971.
3. M.Toda, M.Wadati. J.Phys.Soc.Japan, 32, 1403, 1972.
4. J.Boussinesq. J.Math.Pures Appl. ser. 2, 17, 55, 1872.
5. И.Л.Боголюбский. Препринт ОИЯИ, Р9-8689, Дубна, 1975.
6. D.Peregrine. J.Fluid Mech., 25, 321, 1966.
7. Д.А.Березин, В.И.Карпман. ЖЭТФ, 51, 1557, 1966.
8. M.Wadati. J.Phys.Soc.Japan, 34, 1289, 1973.
9. Kh.O.Abdulloev, I.L.Bogolubsky, V.G.Makhankov. Phys.Lett., 48A, 161, 1974. Nucl.Fusion, 15, 21, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 декабря 1975 года.