сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-94-93

А.А.Скоблин

ОСЦИЛЛЯТОР В СИЛЬНОМ, ПЕРИОДИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩЕМ ОТ ВРЕМЕНИ ПОЛЕ

1994

Скоблин А.А. Р4-94-93

Осциллятор в сильном,
периодически зависящем от времени поле

Построены квазиэнергетические состояния (КЭС) и спектр квазиэнергии осциллятора, помещенного в сильное, периодически зависящее от времени поле. Частота осциллятора предполагается меняющейся во времени с тем же периодом, что и внешнее поле. Показано, что при нерезонансной частоте внешней силы спектр квазиэнергии осциллятора остается дискретным и эквидистантным, причем расстояние между уровнями не зависит ни от величины, ни от частоты внешнего поля. При переходе к резонансу спектр скачком превращается в непрерывный, а КЭС становятся ненормируемыми. Это отвечает перестройке характера движения осциллятора — от финитного к инфинитному — при приложении резонансной силы.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И.М.Франка ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

Skoblin A.A. P4-94-93

Oscillator in Time-Dependent Periodic Strong Field

Quasi-energy states (QES) and quasi-energy spectrum are constructed of oscullator located in time-dependent periodic strong field. Oscillator frequency is supposed to be variable with the same period as the external field. It is shown that if external force frequency is not resonant the oscillator spectrum remains discrete and equidistant, and interstate distance is independent of the external field value and frequency. When external force frequency becomes resonant, the oscillator spectrum changes abruptly into a continious one, and QES become non-normalized. This fact corresponds to oscillator motion transmulation (from finite to infinite) when the external force frequency is resonant.

The investigation has been performed at the Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

1. Введение

Рассмотрена задача об осцилляторе, помещенном в сильное, периодически зависящее от времени поле. Частота осциллятора предполагается меняющейся во времени с тем же периодом, что и внешнее поле.

Такая модель исследовалась в [1], где были решены уравнения движения и построена функция Грина. В частном случае постоянной частоты эта задача рассматривалась в [2, 3]. В работах [4, 5], с использованием метода когерентных состояний, проведено общее исследование уравнений движения систем со многими степенями свободы, с квадратичным по операторам рождения и уничтожения, зависящим от времени гамильтонианом. Однако для применения теории возмущений наиболее удобным является использование базиса квазиэнергетических состояний (КЭС) [6] и переход к H_T-представлению [7], для чего необходимо построить полный набор КЭС, t-КЭС и найти спектр квазиэнергии [7]. Эта программа реализована в настоящей работе. Показано, что при нерезонансной частоте внешней силы спектр квазиэнергии осциллятора остается дискретным и эквидистантным, причем расстояние между уровнями не зависит ни от величины, ни от частоты внешнего поля. При переходе к резонансу спектр скачком превращается в непрерывный, а КЭС становятся ненормируемыми. Это отвечает перестройке характера движения осциллятора — от финитного к инфинитному — при приложении резонансной силы.

2. Уравнения движения

Рассмотрим систему, описываемую гамильтонианом

$$H(t) = \omega(t)\{a^+a + 1/2\} + \alpha(t)a + \bar{\alpha}(t)a^+ + l(t) \ , \tag{1}$$

где $\omega(t)$, $l(t)$ — действительные, $\alpha(t)$ —комплексная функции времени t, и все они периодичны с периодом $T = 2\pi/\Omega$; черта означает комплексное, а значок $^+$ — эрмитово сопряжение; операторы a, a^+ удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям; $|0>$ — отвечающий им вакуумный вектор гильбертова пространства состояний **H**.

Перейдем к комплексному представлению **H** [8]. Пусть z пробегает поле комплексных чисел, $|z>$ — соответствующие когерентные состояния [9, 10], $|f>$ — некоторый кет-вектор [11]. Тогда, как известно [8],

$$f(z) = \exp\left\{\frac{1}{2}|z|^2\right\} < \bar{z}|f > \tag{2}$$

является целой аналитичесой функцией z. Уравнение Шредингера с гамильтонианом (1) переходит при соответствии (2) в дифференциальное уравнение на $f(z,t)$ [10]:

$$i\frac{\partial}{\partial t}f(z,t) = \omega(t)z\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} + \alpha(t)\frac{\partial f(z,t)}{\partial z} + \left\{\bar{\alpha}(t)z + \omega(t)/2 + l(t)\right\}f(z,t) \ . \tag{3}$$

Это уравнение легко решается. Его решение имеет вид

$$f(z,t)=f_0\left\{e^{-i\Phi(t)}z+R(t)\right\}\exp\left\{-e^{-i\Phi(t)}\bar{R}(t)z-\frac{1}{2}|R(t)|^2-i\Delta(t)\right\}, \qquad (4)$$

где

$$f_0\{z\}=f(z,t=0), \quad \Phi(t)=\int_0^t\omega(t')dt', \quad R(t)=-i\int_0^t\exp\{-i\Phi(t')\}\alpha(t')dt',$$

$$\Delta(t)=\frac{1}{2}\Phi(t)+\int_0^t l(t')dt'+\mathrm{Im}\int_0^t\frac{dR(t')}{dt'}\bar{R}(t')dt'=\bar{\Delta}(t). \qquad (5)$$

3. Построение КЭС, t-КЭС и спектра квазиэнергии в нерезонансном случае

Положим

$$\Phi(T)/T=\omega_0, \qquad \Delta(T)=\Delta, \qquad R(T)=R \qquad (6)$$

и рассмотрим нерезонансный случай:

$$\omega_0\neq n\Omega, \qquad n=0,\pm1,\pm2\ldots \qquad (7)$$

Поскольку КЭС, по определению, являются собственными векторами оператора эволюции, взятого в момент $t=T$ [7, 12], запишем, учитывая (4), следующее уравнение на КЭС $f_E(z)$, отвечающее квазиэнергии E:

$$f_E\left(e^{-iT\omega_0}z+R\right)\exp\left\{-e^{-iT\omega_0}\bar{R}z-\frac{1}{2}|R|^2-i\Delta\right\}=f_E(z)e^{-iET}. \qquad (8)$$

Положим

$$E=E^0+\varepsilon, \qquad f_E(z)=e^{\Gamma z}g_\varepsilon(z), \qquad (9)$$

где

$$E^0=\frac{1}{T}\left(\Delta-\frac{|R|^2}{2}\operatorname{ctg}\frac{T\omega_0}{2}\right), \qquad \Gamma=\frac{\bar{R}}{2}\left(1+i\operatorname{ctg}\frac{T\omega_0}{2}\right). \qquad (10)$$

Подставляя (9), (10) в (8), получим уравнение на $g_\varepsilon(z)$:

$$g_\varepsilon\left(e^{-iT\omega_0}z+R\right)=g_\varepsilon(z)e^{-iT\varepsilon}. \qquad (11)$$

Уравнение (11) имеет решения:

$$\varepsilon_n=n\omega_0, \qquad g_n(z)=C_n(z-\bar{\Gamma})^n, \qquad n=0,\pm1,\pm2\ldots \qquad (12)$$

где C_n — произвольные константы. Положим $C_n=(n!)^{-1/2}e^{-|\Gamma|^2/2}$ и из (12), (9) найдем E_n, $f_n(z)$:

$$E_n=E^0+n\omega_0, \qquad f_n(z)=\frac{(z-\bar{\Gamma})^n}{\sqrt{n!}}\exp\left\{\Gamma z-\frac{1}{2}|\Gamma|^2\right\}, \qquad n=0,\pm1,\pm2\ldots \qquad (13)$$

Возвращаясь с помощью обычных правил к кет-векторам [10], находим КЭС гамильтониана (1) $|n_\Gamma>$ и отвечающие им квазиэнергии E_n:

$$E_n=E^0+n\omega_0, \qquad |n_\Gamma>=\frac{(a^+-\bar{\Gamma})^n}{\sqrt{n!}}|\Gamma>, \qquad n=0,\pm1,\pm2\ldots \qquad (14)$$

где $|\Gamma>$ — когерентное состояние, отвечающее числу Γ. Поскольку операторы $a-\Gamma$ и $a^+-\bar{\Gamma}$ взаимно эрмитово сопряжены и удовлетворяют каноническим коммутационным соотношениям, а вектор $|\Gamma>$ является по отношению к ним вакуумным вектором, набор векторов $|n_\Gamma>$, определенный в (14), образует ортонормированный базис в H. Тем самым оправдан выбор C_n и доказано, что соотношение (14) описывает все линейно независимые КЭС.

Для получения t-КЭС гамильтониана (1) $|n_\Gamma(t)>$ воспользуемся формулой (25) работы [7]. В результате получим

$$|n_\Gamma(t)>=\exp\left\{itE^0+in\left[\omega_0t-\Phi(t)\right]\right\}\frac{\{a^+(t)\}^n}{\sqrt{n!}}|0(t)>, \qquad (15)$$

где

$$a^+(t)=a^+-\bar{z}(t), \qquad z(t)=e^{-i\Phi(t)}\left[\Gamma-\bar{R}(t)\right], \qquad (16)$$

а $|0(t)>$ является, с точностью до фазового множителя, когерентным состоянием, отвечающим $z(t)$:

$$|0(t)>=\exp\left\{-i\left[\Delta(t)+\mathrm{Im}\Gamma R(t)\right]\right\}|z(t)>. \qquad (17)$$

4. Построение КЭС, t-КЭС и спектра квазиэнергии в резонансном случае

Рассмотрим теперь резонансный случай:

$$\omega_0=n\Omega, \qquad n=0,\pm1,\pm2\ldots \qquad (18)$$

Уравнение (8) переходит при этом в уравнение

$$f_E(z+R)\exp\left\{-z\bar{R}-\frac{1}{2}|R|^2-i\Delta\right\}=f_E(z)\exp\{-iET\}. \qquad (19)$$

Положим

$$E=\Delta+\varepsilon, \qquad f_E(z)=\exp\left\{\frac{\bar{R}}{2R}z^2-\frac{i\varepsilon T}{R}z\right\}g_\varepsilon(z). \qquad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получаем уравнение на $g_\varepsilon(z)$:

$$g_\varepsilon(z+R)=g_\varepsilon(z), \qquad (21)$$

то есть $g_\varepsilon(z)$ — периодическая целая функция. Ее наиболее общий вид:

$$g_\varepsilon(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_{k\varepsilon}exp\left\{\frac{2\pi ikz}{R}\right\}. \qquad (22)$$

Выберем следующий линейно независимый набор решений:

$$g_{k\varepsilon}(z) = g_{k\varepsilon}\exp\left\{\frac{2\pi i k z}{R}\right\}, \qquad |\varepsilon + \Delta| \le \pi, \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2\ldots \tag{23}$$

(неравенство на ε в (23) связано с определением квазиэнергии [7]). Подставим (23), (20) в (19). Выберем удобные для нас значения констант $g_{k\varepsilon}$. Вместо двупараметрического (по k, ε) представления $g_{k\varepsilon}(z)$ рассмотрим тот же набор функций в однопараметрической форме. В результате получим набор КЭС и спектр квазиэнергии:

$$f_E(z) = \frac{T^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}|R|^{1/2}}\exp\left\{\frac{\bar R}{2R}z^2 - \frac{i(E-\Delta)}{R}z - \frac{(E-\Delta)^2}{4|R|^2}\right\}, \quad -\infty < E < \infty\,. \tag{24}$$

Переходя к кет-векторам, получим

$$|f_E> = \frac{T^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}|R|^{1/2}}\exp\left\{\frac{\bar R}{2R}(a^+)^2 - \frac{i(E-\Delta)}{R}a^+ - \frac{(E-\Delta)^2}{4|R|^2}\right\}|0>\,. \tag{25}$$

Прямым вычислением интегралов нетрудно убедиться, что:

$$\frac{1}{\pi}\int dz d\bar z e^{-|z|^2}\bar f_E(z) f_{E'}(z) = \delta(E-E')\,,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE \bar f_E(z) f_E(z') = e^{\bar z z'}\,, \tag{26}$$

то есть что [10]:

$$< f_E|f_{E'} >= \delta(E-E')\,, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dE|f_E>< f_E| = I\,, \tag{27}$$

где I — единица в H. Этим обосновывается выбор констант $g_{k\varepsilon}$ в (23) и доказывается, что выражения (24), (25) описывают все линейно независимые КЭС.

Таким образом, в резонансном случае спектр квазиэнергии непрерывен, и КЭС нормированы не на единицу, а на δ-функцию. Переход от дискретного спектра в нерезонансном случае к непрерывному в резонансном отвечает переходу от финитного движения осциллятора к инфинитному под действием резонансной силы.

Для получения t-КЭС воспользуемся формулой (25) работы [7]:

$$f_E(z,t) = \frac{T^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}|R|^{1/2}}\exp\left\{A(t)z^2 + B(t)z + C(t)\right\}, \tag{28}$$

где

$$A(t) = \frac{1}{2}\exp\left\{-2i\left[\Phi(t) + \arg R\right]\right\},$$

$$B(t) = \frac{i}{R}\left\{\mathrm{Im}\left[2R(t)\bar R\right] - E + \Delta\right\}e^{-i\Phi(t)},$$

$$C(t) = \frac{iR(t)}{R}\left\{\mathrm{Im}\left[R(t)\bar R\right] - E + \Delta\right\} - \frac{(E-\Delta)^2}{4|R|^2} - i\Delta(t) + itE\,. \tag{29}$$

5. H_T-представление

Перейдем теперь к H_T-представлению [7]. Рассмотрим нерезонансный случай. Нам удобно будет ввести новый вакуумный вектор и отвечающие ему операторы рождения и уничтожения, обсуждавшиеся в разделе 3:

$$|0_\Gamma >= |\Gamma >\,, \qquad a_\Gamma = a - \Gamma\,, \qquad a_\Gamma^+ = a^+ - \bar\Gamma\,. \tag{30}$$

Как следует из (14), (30), осциллятор описывается в этом представлении не зависящим от времени гамильтонианом

$$H_T = \omega_0 a_\Gamma^+ a_\Gamma + E^0\,. \tag{31}$$

Рассмотрим теперь ангармонический осциллятор, который описывается в исходном представлении гамильтонианом

$$H(t) + V(a, a^+, t)\,, \tag{32}$$

где $H(t)$ определен в (1). В H_T-представлении этот гамильтониан приобретает вид

$$H_T + V_T(t)\,, \qquad V_T(t) = \sum_{m,n=0}^{\infty} V_{mn}(t)|m_\Gamma >< n_\Gamma|\,, \tag{33}$$

где

$$V_{mn}(t) = \exp\left\{i(n-m)\left[\omega_0(t) - \Phi(t)\right]\right\} < m|V\left(a + z(t), a^+ + \bar z(t), t\right)|n >\,. \tag{34}$$

Выражения (33), (34) сильно упрощаются для случая осциллятора постоянной частоты, когда

$$\omega(t) = \omega_0\,, \qquad \Phi(t) = \omega_0 t\,. \tag{35}$$

При этом, как видно из (33), (34):

$$V_T(t) = V\left(a_\Gamma + z(t), a_\Gamma^+ + \bar z(t), t\right)\,. \tag{36}$$

Пусть, кроме того, внешнее поле в (1) является гармоническим. Положим

$$\alpha(t) = \alpha e^{it\Omega}\,, \qquad l(t) = 0\,. \tag{37}$$

Тогда

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\omega_0 + \frac{|\alpha|^2}{\Omega - \omega_0}\,, \qquad z(t) = -\frac{\bar\alpha}{\Omega - \omega_0}e^{it\Omega}\,. \tag{38}$$

Полученные результаты позволяют эффективно использовать теорию возмущений. Рассмотрим в качестве примера смещение уровней осциллятора, у которого ангармоническая поправка V к гамильтониану $H(t)$ имеет вид

$$V = \frac{V_0}{6}\left(\sigma a + \bar\sigma a^+\right)^4\,, \tag{39}$$

где $V_0 = \bar V_0$, $|\sigma| = 1$. Воспользуемся (31), (36), (39) и известной формулой для поправки первого порядка к квазиэнергии [13, 6], которую мы запишем в виде

$$\delta E_n^{(1)} = \frac{1}{T}\int_0^T dt < n_\Gamma|V_T(t)|n_\Gamma >\,. \tag{40}$$

В результате получим выражение для n-ного уровня квазиэнергии с точностью до первого порядка по V включительно:

$$E_n^{(1)} = V_0 n^2 + \left[\omega_0 + V_0 + \frac{4V_0|\alpha|^2}{(\Omega-\omega_0)^2}\right]\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{|\alpha|^2}{\Omega-\omega_0} + \frac{V_0|\alpha|^4}{(\Omega-\omega_0)^4}\,. \qquad (41)$$

Как видим, переменное поле не влияет (в первом порядке теории возмущений) на константу ангармоничности V_0, но, за счет взаимодействия ангармонического члена и переменного поля, гармоническая константа $\omega_0 + V_0$ изменяется и становится равной $\omega_0 + V_0 + 4V_0|\alpha|^2/(\Omega-\omega_0)^2$. Когда частота внешнего поля Ω близка к резонансной частоте ω_0, поправка становится значительной даже при малом значении V_0.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93 - 02 - 2535).

Список литературы

[1] Husimi R. Prog. Theor. Phys., N9, p.381, 1953.

[2] Feynman R.P. Phys. Rev., V.84, p.108, 1951.

[3] Schwinger J. Phys. Rev., V.91, p.728, 1953.

[4] Holz A. Lett. Nuovo Cimento, N4, p. 1390, 1970.

[5] Малкин И.А., Манько В.И., Трифонов Д.А. Краткие сообщения по физике, N5, Т.20, С.27, 1971.

[6] Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Атом в сильном световом поле. Атомиздат. М., 1978.

[7] Скоблин А.А. Сообщения ОИЯИ, Р4–94–63. Дубна, 1994.

[8] Bargman V. Commun Pure Appl. Math., V.14, p.187, 1961; Proc. Natl. Acad. Sci., V.48, p.199, 1962.

[9] Klauder J.R., Sudarshan E.C.G. Fundamentals of Quantum Optics. W.A. Benjamin Inc., New York — Amsterdam, 1968.

[10] Perina J. Coherence of Light. Van Nostrand Reinhold Com., London — New York — Cincinnati —Toronto — Melbourne, 1972.

[11] Dirac P.A.M. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford, 1958.

[12] Ритус В.И. ЖЭТФ, Т.51, С.1544, 1966.

[13] Samble H. Phys. Rev. A, V.7.N6, p.2203, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1994 года.