сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-94-63

А.А.Скоблин

ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ ДЛЯ КВАНТОВО-МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С ГАМИЛЬТОНИАНОМ, ПЕРИОДИЧЕСКИ ЗАВИСЯЩИМ ОТ ВРЕМЕНИ

1994

Скоблин А.А. Р4-94-63

Задача рассеяния для квантово-механической системы
с гамильтонианом, периодически зависящим от времени

Рассмотрена теория рассеяния для случая квантовых систем, помещенных в сильное, периодически зависящее от времени поле. В базисе квазиэнергетических состояний построена матрица рассеяния. Введены операторы перехода, построен ряд теории возмущений, вычислена скорость перехода между состояниями. С учетом периодического поля обобщена оптическая теорема.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

Skoblin A.A. P4-94-63

Scattering Problem for Quantum System
with Time-Dependent Periodic Hamiltonian

Scattering theory for quantum systems located in time-dependent periodic strong field is considered. Scattering matrix is constructed in the quasi-energy states basis. Transition operators are introduced, perturbation series is constructed, interstates transition rate is calculated. Optical theorem is generalized in case of periodic field.

The investigation has been performed at the Laboratory of Neutron Physics, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

1. Введение

Квантово-механические системы с гамильтонианом, периодически зависящим от времени, обладают рядом общих свойств, обусловленных только эрмитовостью и периодичностью гамильтониана и не зависящих от деталей его структуры. Этот факт впервые отмечен в [1, 2], где были введены квазиэнергетические состояния (КЭС) и квазиэнергия таких систем. Дальнейшее развитие теории и библиография имеется в [3, 4, 5].

Цель настоящей работы - дать корректную формулировку задачи рассеяния для систем с гамильтонианом, периодически зависящим от времени. Полученные результаты могут найти применение при описании рассеяния, распада и кинетики систем, помещенных в сильное периодическое поле.

2. Структура оператора эволюции

Мы будем пользоваться обозначениями Дирака [6].

Пусть в гильбертовом пространстве **H** задан зависящий от времени t гамильтониан, то есть эрмитов оператор $H(t) = H^+(t)$ ($^+$ означает эрмитово сопряжение). В этом случае кет-вектор $|\psi(t)>$ удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)>= H(t)|\psi(t)> . \tag{1}$$

Решение уравнения (1) можно представить при помощи оператора эволюции $U(t,t')$:

$$|\psi(t)>= U(t,t')|\psi(t')> . \tag{2}$$

Оператор эволюции удовлетворяет групповому свойству:

$$U(t,t')U(t',t'') = U(t,t'') . \tag{3}$$

Он однозначно определяется задачей Коши (I - единичный оператор):

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t,t') = H(t)U(t,t') \ , \quad U(t',t') = I \ . \tag{4}$$

Введем зависящий от одного параметра оператор

$$U(t) = U(t,0) \ . \tag{5}$$

Из (4), (5) следует, что

$$i\frac{\partial}{\partial t}U(t) = H(t)U(t) \ , \quad U(0) = I \ . \tag{6}$$

Введенный оператор обладает свойствами:

$$U(t)U^+(t) = U^+(t)U(t) = I \ , \quad U(-t) = U^+(t) \ . \tag{7}$$

Зависящий от двух параметров оператор эволюции представляется с помощью $U(t)$:

$$U(t,t') = U(t)U^+(t') \ . \tag{8}$$

Пусть теперь гамильтониан является периодической функцией времени:

$$H(t) = H(t+T) . \tag{9}$$

Покажем прежде всего, что в этом случае

$$U(t+T, t'+T) = U(t, t') . \tag{10}$$

Действительно, положим $u(t,t') = U(t+T, t'+T)$. Подставляя это определение в (4) и учитывая (9), находим, что $u(t,t')$ подчиняется задаче Коши, совпадающей с (4):

$$i\frac{\partial}{\partial t}u(t,t') = H(t+T)u(t,t') = H(t)u(t,t') ,$$
$$u(t',t') = U(t'+T, t'+T) = I .$$

Так как $u(t,t')$ и $U(t,t')$ подчиняются одной и той же задаче Коши, они совпадают, откуда и следует (10).

Введем теперь оператор U_T:

$$U_T = U(T) , \quad U_T U_T^+ = U_T^+ U_T = I . \tag{11}$$

В силу унитарности U_T, его можно представить в виде

$$U_T = e^{-iTH_T} , \quad H_T = H_T^+ . \tag{12}$$

(Оператор H_T определяется из (12) неоднозначно, что не влияет на дальнейшее. Этот вопрос обсуждается в разделе 3). Далее, введем оператор

$$\tilde{U}(t) = U(t)e^{itH_T} . \tag{13}$$

Покажем, что $\tilde{U}(t)$ унитарен и периодичен во времени:

$$\tilde{U}^+(t)\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t)\tilde{U}^+(t) = I , \tag{14}$$

$$\tilde{U}(t+T) = \tilde{U}(t) . \tag{15}$$

Действительно, учитывая (13) и (7), находим:

$$\tilde{U}^+(t)\tilde{U}(t) = e^{-itH_T}U^+(t)U(t)e^{itH_T} = I .$$

Аналогично доказывается второе из равенств (14). Для доказательства (15) воспользуемся (13), (5), (3), (10), (11), (12):

$$\tilde{U}(t+T) = U(t+T)e^{i(t+T)H_T} = U(t+T,0)e^{i(t+T)H_T} =$$
$$U(t+T,T)U(T,0)e^{i(t+T)H_T} = U(t+T,T)U_T e^{i(t+T)H_T} =$$
$$= U(t,0)e^{itH_T} = U(t)e^{itH_T} = \tilde{U}(t) .$$

Исходя из (13) и (8), получаем представление операторов $U(t)$, $U^+(t)$, $U(t,t')$ с помощью не зависящего от времени эрмитова оператора H_T и периодически зависящего от времени унитарного оператора $\tilde{U}(t)$:

$$U(t) = \tilde{U}(t)e^{-itH_T} , \quad U^+(t) = e^{itH_T}\tilde{U}^+(t) , \tag{16}$$

$$U(t,t') = \tilde{U}(t)e^{-i(t-t')H_T}\tilde{U}^+(t') . \tag{17}$$

Отметим, что $\tilde{U}(t)$ подчиняется задаче Коши:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}(t) = H(t)\tilde{U}(t) - \tilde{U}(t)H_T , \ \tilde{U}(0) = I . \tag{18}$$

Выражение (18) получается подстановкой (13) в (4).

3. Разложение по периодическому базису

Поскольку U_T унитарен, он может быть диагонализован в некотором ортонормированном базисе $|n>$, причем собственные значения его по модулю равны единице:

$$U_T = \sum_n e^{-iTE_n}|n><n| , \tag{19}$$

$$<m|n> = \delta_{mn} , \quad \sum_n |n><n| = I . \tag{20}$$

Базис может оказаться как дискретным, так и непрерывным. В последнем случае векторы $|n>$ не нормированы, суммы в (19), (20) заменяются интегралами, а символ Кронекера δ_{mn} в (20) — δ-функцией Дирака. Числа E_n в (19) определены по модулю $2\pi/T = \Omega$. В частности, можно считать, что

$$0 \le E_n < \Omega = \frac{2\pi}{T} . \tag{21}$$

Возможна и любая замена $E_n \to E_n + q_n\Omega$, где q_n — целые числа.

Векторы $|n>$ и числа E_n — это квазиэнергетические состояния (КЭС) и квазиэнергия оператора $H(t)$, введенные в [1, 2]. В базисе КЭС диагонализуется H_T:

$$H_T = \sum_n E_n|n><n| . \tag{22}$$

Введем также периодически зависящие от времени векторы $|n(t)>$, которые будем называть t-КЭС оператора $H(t)$:

$$|n(t)> = \tilde{U}(t)|n> , \quad |n(t+T)> = |n(t)> . \tag{23}$$

В силу унитарности $\tilde{U}(t)$, $|n(t)>$ в каждый момент времени образуют ортонормированный базис в H:

$$<m(t)|n(t)> = \delta_{mn} , \quad \sum_n |n(t)><n(t)| = I . \tag{24}$$

Методы построения КЭС, t-КЭС и квазиэнергий по гамильтониану $H(t)$ изложены в [4, 5].

Вектор $|n(t)>$ может быть также представлен с помощью $U(t)$. Действительно, подставляя (13), (22) в (23), находим:

$$|n(t)> = e^{itE_n}U(t)|n> . \tag{25}$$

Из (25) видно, что замена $E_n \to E_n + q_n\Omega$, где q_n — целые числа, отражающая неоднозначность выбора H_T, приводит к замене $|n(t)> \to e^{itq_n\Omega}|n(t)>$.

Из (6), (25) получаем уравнение на $|n(t)>$:

$$\left\{H(t) - i\frac{\partial}{\partial t}\right\}|n(t)> = E_n|n(t)> \ , \quad |n(t+T)> = |n(t)> \ . \tag{26}$$

С помощью КЭС и t-КЭС можно представить $\tilde{U}(t)$ и $\tilde{U}^+(t)$ в следующем виде:

$$\tilde{U}(t) = \sum_n |n(t)><n| \ , \quad \tilde{U}^+(t) = \sum_n |n><n(t)| \ . \tag{27}$$

Действительно, учитывая (20), (23), находим:

$$\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t)I = \tilde{U}(t)\sum_n |n><n| = \sum_n |n(t)><n|$$

и аналогично для $\tilde{U}^+(t)$.

Операторы $U(t)$, $U^+(t)$ допускают следующее разложение:

$$U(t) = \sum_n e^{-itE_n}|n(t)><n| \ , \quad U^+(t) = \sum_n e^{itE_n}|n><n(t)| \ . \tag{28}$$

Первое из равенств (28) получается подстановкой (27), (22) в (16). Второе из равенств (28) — сопряжением первого.

Наконец, подставляя (28) в (8) и учитывая (20), получим разложение оператора эволюции $U(t,t')$ по периодическому во времени базису t-КЭС:

$$U(t,t') = \sum_n e^{-i(t-t')E_n}|n(t)><n(t')| \ . \tag{29}$$

4. H_T–представление

Рассмотрим теперь уравнение Шредингера вида

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)> = \{H(t) + V(t)\}|\psi(t)> \ , \tag{30}$$

где $H(t)$ — периодичен, то есть удовлетворяет (9). Что же касается $V(t)$, будем считать его малым возмущением, но не станем пока делать никаких предположений относительно зависимости $V(t)$ от времени. Пусть нам известен оператор $\tilde{U}(t)$ для $H(t)$, построенный в соответствии с (13). Проведя эрмитово сопряжение (18), убеждаемся, что $\tilde{U}^+(t)$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}\tilde{U}^+(t) = H_T\tilde{U}^+(t) - \tilde{U}^+(t)H(t) \ . \tag{31}$$

Введем функцию

$$|\psi_T(t)> = \tilde{U}^+(t)|\psi(t)> \ . \tag{32}$$

Подставляя (32), (31) в (30), убеждаемся, что $|\psi_T(t)>$ удовлетворяет уравнению

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi_T(t)> = \{H_T + V_T(t)\}|\psi_T(t)> \ , \tag{33}$$

где H_T определен по $H(t)$ с помощью (12), и

$$V_T(t) = \tilde{U}^+(t)V(t)\tilde{U}(t) \ . \tag{34}$$

Таким образом, задача (30) возмущения периодического гамильтониана $H(t)$ сводится к задаче (33) возмущения стационарного гамильтониана H_T.

Если $A(t)$ — наблюдаемая, то

$$A_T(t) = \tilde{U}^+(t)A(t)\tilde{U}(t) \ . \tag{35}$$

При этом

$$<\psi(t)|A(t)|\psi(t)> = <\psi_T(t)|A_T(t)|\psi_T(t)> \ . \tag{36}$$

Если $\frac{\partial}{\partial t}A(t) = 0$, то

$$i\frac{d}{dt}A_T(t) = \left[H_T - H_T(t) \ , \ A_T(t)\right] \ , \tag{37}$$

где $[\ ,\ ]$ — коммутатор, и $H_T(t) = \tilde{U}^+(t)H(t)\tilde{U}(t)$ в соответствии с (35).

Представление (32) – (35) мы будем называть H_T-представлением. Обращение (32), (35) дается соотношениями

$$|\psi(t)> = \tilde{U}(t)|\psi_T(t)> \ , \quad A(t) = \tilde{U}(t)A_T(t)\tilde{U}^+(t) \ . \tag{38}$$

Приведем матричную форму H_T-представления. Положим

$$\psi_n(t) = <n(t)|\psi(t)> \ , \quad V_{mn}(t) = <m(t)|V(t)|n(t)> \ , \tag{39}$$

где $|n(t)>$, $|m(t)>$ — t-КЭС $H(t)$. Пусть $|n>$, $|m>$ — КЭС $H(t)$. Учитывая (24), (27), (32), (34), (39), находим:

$$|\psi(t)> = \sum_n \psi_n(t)|n(t)> \ , \quad |\psi_T(t)> = \sum_n \psi_n(t)|n> \ ,$$
$$V(t) = \sum_{mn} V_{mn}(t)|m(t)><n(t)| \ , \quad V_T(t) = \sum_{mn} V_{mn}(t)|m><n| \ . \tag{40}$$

Уравнение (33) в матричной форме имеет вид

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi_n(t) = E_n\psi_n(t) + \sum_m V_{nm}(t)\psi_m(t) \ . \tag{41}$$

5. Матрица рассеяния

Сформулируем задачу рассеяния для уравнения (30). Будем полагать, что $H(t)$ и $V(t)$ периодичны с периодом T. Будем рассматривать только упругое рассеяние.

Пусть $W(t,t')$ — оператор эволюции для (30), $W_T(t,t')$ — оператор эволюции для (33), так что

$$|\psi(t)> = W(t,t')|\psi(t')> \ , \quad |\psi_T(t)> = W_T(t,t')|\psi_T(t')> \ . \tag{42}$$

Из (32), (38), (42) следует, что

$$W(t,t') = \tilde{U}(t) W_T(t,t') \tilde{U}^+(t') \ . \tag{43}$$

Вычислим амплитуду рассеяния между двумя t-КЭС $|n(t)>$, $|m(t')>$ оператора $H(t)$ при $t \to +\infty$, $t' \to -\infty$. Учитывая (43), (23), (14), находим:

$$\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t' \to -\infty}} < n(t)|W(t,t')|m(t') > = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t' \to -\infty}} < n|W_T(t,t')|m > = < n|S|m > , \tag{44}$$

где

$$S = \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t' \to -\infty}} W_T(t,t') \ . \tag{45}$$

Таким образом, амплитуда рассеяния между двумя t-КЭС выражена через матричный элемент оператора S между двумя не зависящими от времени КЭС. Оператор S будем называть S-матрицей, или матрицей рассеяния. Поскольку S есть предельное значение (при $t \to +\infty$, $t' \to -\infty$) оператора эволюции уравнения (33), которое является уравнением Шредингера с не зависящим от времени H_T, оператор S стандартным образом представляется через T-экспоненту, определяемую с помощью оператора хронологического упорядочения $\mathbf{T}$ [7]:

$$S = \mathbf{T} \exp\left\{ -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{itH_T} V_T(t) e^{-itH_T} \right\} . \tag{46}$$

6.Операторы перехода

Введем стандартным образом [7] τ-матрицу:

$$\tau = S - I \, . \tag{47}$$

Матричные элементы между двумя КЭС для τ и S связаны очевидным соотношением:

$$< n|S|m > = \delta_{nm} + < n|\tau|m > \ . \tag{48}$$

Поскольку $V(t) = V(t+T)$, $\tilde{U}(t) = \tilde{U}(t+T)$, то и $V_T(t) = V_T(t+T)$. Поэтому $V_T(t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$V_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} V_k e^{-ik\Omega t} \ , \quad V_k = \frac{1}{T} \int_0^T V_T(t) e^{ik\Omega t} dt \ . \tag{49}$$

Подставим (48), (49), (22) в (46), раскроем $\mathbf{T}$-экспоненту и вычислим все интегралы по времени в предположении адиабатического включения взаимодействия [7]. В результате после несложных преобразований получим

$$< n|\tau|m > = -2\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(E_n - E_m - k\Omega) < n|t_k|m > , \tag{50}$$

где

$$< n|t_k|m > = < n|V_k|m > + \sum_{p=2}^{\infty} \sum_{k_1,\dots k_p=-\infty}^{\infty} \delta_{k,k_1+\dots+k_p} \sum_{l_1 \dots l_{p-1}} \frac{< n|V_{k_1}|l_1 > \dots < l_{p-1}|V_{k_p}|m >}{[E_m - E_{l_1} + (k_2 + \dots + k_p)\Omega + i\varepsilon] \dots [E_m - E_{l_{p-1}} + k_p\Omega + i\varepsilon]} \ , \tag{51}$$

причем $\varepsilon \to +0$. Будем называть введенные в (51) величины t_k операторами (или матрицами) перехода. Отметим,что (51) определяет $< n|t_k|m >$ только на квазиэнергетической поверхности $E_n - E_m = k\Omega$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$ Соотношение (50) обобщает известную формулу теории рассеяния [7]. Из (50) видно, что в периодическом по времени потенциале совершаются переходы не только с сохранением энергии, как в стационарном случае, но и переходы между состояниями, для которых квазиэнергия отличается на величину $k\Omega$, где k — целое число. Это естественно, поскольку квазиэнергия определена по модулю Ω.

Выражение (51) определяет операторы перехода с помощью ряда. Получим теперь систему уравнений, которой подчиняются операторы перехода. Эта система является обобщением уравнения, определяющего оператор перехода в стационарном случае. Произведем в (51) замены: $k_1 \to k - q$, $l_1 \to l$; $k_2 \to k_1$, $k_3 \to k_2, \dots l_2 \to l_1$, $l_3 \to l_2, \dots$ Сопоставляя полученное выражение с (51), убеждаемся,что t_k удовлетворяют системе уравнений:

$$< n|t_k|m > = < n|V_k|m > + \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l} \frac{< n|V_{k-q}|l > < l|t_q|m >}{E_m - E_l + q\Omega + i\varepsilon} \ , \tag{52}$$

где $\varepsilon \to +0$. Соотношение (52) является искомой системой уравнений, определяющей операторы перехода.

7. Вероятность перехода. Скорость перехода

Вероятность перехода $W_{m \to n}$ из состояния m в состояние n равна квадрату модуля соответствующего элемента S-матрицы или, при $m \neq n$, квадрату модуля элемента τ-матрицы. С учетом (50) находим:

$$W_{m \to n} = (2\pi)^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |< n|t_k|m >|^2 \delta^2(E_n - E_m - k\Omega) \ . \tag{53}$$

Как обычно, разделив $W_{m \to n}$ на время рассеяния [7], получим вероятность перехода из состояния m в состояние n в единицу времени, то есть скорость перехода $w_{m \to n}$:

$$w_{m \to n} = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |< n|t_k|m >|^2 \delta(E_n - E_m - k\Omega) \, . \tag{54}$$

Как видно из (54), скорость перехода является суммой скоростей переходов, обеспечиваемых t_k при различных k и обеспечивающих переход с изменением квазиэнергии на величину $k\Omega$.

8. Следствия унитарности

Из (45) следует, что оператор S унитарен:

$$S^{+}S = SS^{+} = I\,. \tag{55}$$

Изучим следствия унитарности матрицы рассеяния. Подставим (48), (50) в (55). В результате получим после стандартных преобразований:

$$< n|t_k|m> - \overline{< m|t_{-k}|n>} + \\ +2\pi i \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{l} \delta(E_l - E_n - q\Omega)\overline{< l|t_q|n>} < l|t_{k+q}|m> = 0\,, \tag{56}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Положим в (56) $m = n$, $k = 0$. С учетом (54) получим

$$-2\mathrm{Im} < n|t_0|n> = w_{tot.}\,, \tag{57}$$

где

$$w_{tot} = \sum_{l} w_{n\to l} \tag{58}$$

— полная скорость перехода из состояния n. Соотношение (57) является обобщением оптической теоремы [7] на случай периодического во времени гамильтониана.

Приложение. Определение квазиэнергии, t-КЭС и КЭС

Методы нахождения квазиэнергии, t-КЭС и КЭС разработаны. Их изложение имеется в [4, 5]. Цель настоящего приложения, носящего методический характер, — дать по возможности экономную и общую формулировку этих методов.

I. Первый метод

Введем гильбертово пространство

$$\mathbf{H}_T = \mathbf{H} \otimes [0, T] \qquad (\Pi.1)$$

функций t со значениями в $\mathbf{H}$, периодических по t с периодом T. Скалярное произведение в $\mathbf{H}_T$ определим с помощью правила

$$< f|g>_T = \int_0^T < f(t)|g(t)> dt\,. \qquad (\Pi.2)$$

Единица в $\mathbf{H}_T$ имеет вид

$$I_T = I\tilde{\delta}(t - t')\,, \qquad (\Pi.3)$$

где I, как и ранее, — единица в $\mathbf{H}$,

$$\tilde{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{iq\Omega t}\,, \qquad (\Pi.4)$$

то есть $\tilde{\delta}(t)$ — периодический аналог δ-функции Дирака.

Введем в $\mathbf{H}_T$ оператор (см.(26)):

$$h = H(t) - i\frac{\partial}{\partial t}\,. \qquad (\Pi.5)$$

Он самосопряжен по отношению к скалярному произведению (П.2). Сформулируем задачу на собственные векторы и собственные значения h в пространстве $\mathbf{H}_T$:

$$h|\varphi> = E|\varphi>\,. \qquad (\Pi.6)$$

Убедимся, что полный набор векторов $|n, q>$ и отвечающих им собственных значений $E_{n,q}$ имеет вид

$$|n, q> = \frac{e^{iq\Omega t}}{\sqrt{T}}|n(t)>\,, \quad E_{n,q} = E_n + q\Omega\,, \qquad (\Pi.7)$$

где $|n(t)>$ — t-КЭС оператора $H(t)$, E_n — отвечающие им квазиэнергии, индекс n нумерует t-КЭС (и, соответственно, КЭС) оператора $H(t)$, q — целое число, $-\infty < q < \infty$.

Действительно, из (П.5), (П.7), (25), (4) получаем

$$h|n,q> = \Big\{H(t) - i\frac{\partial}{\partial t}\Big\}\frac{1}{\sqrt{T}}e^{i(q\Omega+E_n)t}U(t)|n> = \big(E_n + q\Omega\big)|n,q> + \\ + \frac{1}{\sqrt{T}}e^{i(q\Omega+E_n)t}\Big\{H(t)U(t) - i\frac{\partial U(t)}{\partial t}\Big\}|n> = E_{n,q}|n,q>\,,$$

то есть $|n, q>$, $E_{n,q}$, определенные с помощью (П.7), удовлетворяют задаче (П.6). Покажем, что $|n, q>$ удовлетворяют условиям ортогональности и полноты:

$$< n, q|n', q'>_T = \delta_{n,n'}\delta_{q,q'}\,, \quad \sum_{n,q}|n,q>< n,q| = I_T\,. \qquad (\Pi.8)$$

Для доказательства ортогональности подставим (П.7) в (П.2) и учтем (24):

$$< n, q|n', q'> = \frac{1}{T}\int_0^T e^{i(q-q')\Omega t} < n(t)|n'(t)> dt = \delta_{n,n'}\delta_{q,q'}\,.$$

Для доказательства полноты учтем (П.7), (П.4), (23), (24), (П.3):

$$\sum_{n,q}|n,q>< n,q| = \sum_{n}|n(t)>< n(t')|\frac{1}{T}\sum_{q=-\infty}^{\infty} e^{iq\Omega(t-t')} = \\ = \sum_{n}|n(t)>< n(t')|\tilde{\delta}(t-t') = I\tilde{\delta}(t-t') = I_T\,.$$

Соотношение (П.8) доказано. Из него следует, что $|n, q>$ исчерпывают набор линейно независимых собственных векторов оператора h в пространстве $\mathbf{H}_T$.

Таким образом, задача определения t-КЭС и квазиэнергии оператора $H(t)$ сформулирована как задача (П.6) определения собственных векторов и собственных значений оператора h в пространстве $\mathbf{H}_T$. При этом следует ограничить собственные значения интервалом $[0, \Omega)$ либо любым другим способом отобрать один из каждого набора векторов, отличающихся по квазиэнергии на $q\Omega$, а как векторы — множителем $e^{iq\Omega t}$, где q — целое. КЭС строятся по t-КЭС с помощью соотношения

$$|n> = |n(t = 0)>\,. \qquad (\Pi.9)$$

2. Второй метод

Задачу (П.6) можно сформулировать в иной, но эквивалентной форме. Для этого введем гильбертово пространство

$$\mathbf{H}_K = \mathbf{H} \otimes \mathbf{Z} , \quad (\text{П}.10)$$

где $\mathbf{Z}$ —множество целых чисел. Элементами $\mathbf{H}_K$ являются последовательности векторов из $\mathbf{H}$. Скалярное произведение в $\mathbf{H}_K$ определяется с помощью правила

$$< f|g >_K = \sum_{k=-\infty}^{\infty} < f_k|g_k > . \quad (\text{П}.11)$$

Единица в $\mathbf{H}_K$ имеет вид

$$I_K = I\delta_{kk'} . \quad (\text{П}.12)$$

Отобразим унитарно $\mathbf{H}_T$ в $\mathbf{H}_K$ с помощью преобразования Фурье:

$$|\varphi_k >= \frac{1}{\sqrt{T}} \int_0^T e^{ik\Omega t} |\varphi(t) > dt \quad |\varphi(t) >= \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ik\Omega t} |\varphi_k > . \quad (\text{П}.13)$$

При отображении (П.13) задача (П.6) на собственные векторы и собственные значения в $\mathbf{H}_T$ перейдет в задачу на собственные векторы и собственные значения в $\mathbf{H}_K$:

$$\sum_{q=-\infty}^{\infty} (H_{k-q} - k\Omega\delta_{kq})|\varphi_q >= E|\varphi_k > , \quad (\text{П}.14)$$

где

$$H_k = \frac{1}{T} \int_0^T e^{ik\Omega t} H(t) dt , \quad H_{-k} = H_k^+ . \quad (\text{П}.15)$$

Полный набор (П.7) решений задачи (П.6) перейдет при отображении (П.13) в полный набор решений задачи (П.14) $||n, q >>$, $E_{n,q}$:

$$||n, q >>= |n_{k+q} > , \quad E_{n,q} = E_n + q\Omega , \quad (\text{П}.16)$$

где $|n_k >$ получается из $|n(t) >$ с помощью (П.13).

Полнота и линейная независимость набора (П.16), следующая из унитарности отображения (П.13), подтверждается соотношениями

$$<< n, q||n', q' >>_K = \sum_{k=-\infty}^{\infty} < n_{k+q}|n'_{k+q'} >= \delta_{nn'}\delta_{qq'} , \quad (\text{П}.17)$$

$$\sum_{n,q} ||n, q >><< n, q|| = \sum_{n,q} |n_{k+q} >< n_{k'+q}| = I\delta_{kk'} = I_K . \quad (\text{П}.18)$$

Эти соотношения могут быть получены путем Фурье-преобразования (П.8) либо непосредственно из (П.16).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93 - 02 - 2535).

Список литературы

[1] Зельдович Я.Б. ЖЭТФ, 1966, Т.51, С.1492.

[2] Ритус В.И. ЖЭТФ.1966, Т.51, С.1544.

[3] Зельдович Я.Б. УФН, 1973, Т.110, вып.1, С.139.

[4] Samble H. Phys.Rev. A, 1973, V.7, N6, p.2203 –2223.

[5] Делоне Н.Б., Крайнов В.П. Атом в сильном световом поле. Атомиздат. М., 1978.

[6] Dirac P.A.M. The Principles of Quantum Mechanics. Oxford, 1958.

[7] Ситенко А.Г. Теория рассеяния. Вища школа. Киев, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1994 года.