сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р4-94-507

Б.Ф.Костенко

ОБ УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА СО СТОХАСТИЧЕСКИМИ ПАРАМЕТРАМИ

1994

В 1979 году М. Гелл – Манн писал, что Нильс Бор **внушил** целому поколению физиков-теоретиков, что работа по обоснованию квантовой механики уже проведена пятьдесят лет назад [1]. В одной из своих последних работ Р. Фейнман признается :"*...мы всегда сталкиваемся с большими трудностями, пытаясь понять мир таким, каким нам его представляет квантовая механика. По крайней мере, это относится ко мне, так как я уже не настолько молод, чтобы утверждать, что этот материал мне очевиден.*" [2]

Показательно также мнение Дж. Белла (автора знаменитых неравенств Белла в квантовой механике [3]): " *Концепция "измерения" настолько туманна, что ее появление в физической теории на самом фундаментальном уровне представляется весьма неожиданным. Возможно, менее удивляет то обстоятельство, что математики, для которых нужны лишь простые аксиомы об объектах, не определенных никаким другим способом, оказались в состоянии написать много работ по квантовой теории измерений, работ, которые физики - экспериментаторы читать не сочли нужным.*"[4]

В литературе описано много мысленных экспериментов, поясняющих отличие квантовых явлений от классических (эксперимент Гейзенберга с микроскопом, парадокс о шредигеровском коте, парадокс Эйнштейна - Подольского - Розена и др.). При этом всегда подчеркивается универсальность выводов, получаемых из этого рассмотрения, их независимость от конкретной "аппаратурной" реализации процедуры измерения.

У читателя может возникнуть вопрос — нельзя ли эти универсальные закономерности сформулировать в более общем виде, не обращаясь к излишне конкретной физической ситуации? В частности, нельзя ли объяснить разрушение интерференционной картины в мысленном эксперименте Фейнмана с электронами, проходящими через экран [5], пользуясь уравнением Шредингера? Ответ на этот вопрос отрицательный — уравнение Шредингера не описывает разрушение интерференционной картины. Этот факт составляет часть, и с нашей точки зрения — наиболее существенную, проблемы редукции волнового пакета в квантовой механике

[6]. Тем не менее не трудно придумать формальный прием, позволяющий описать процесс разрушения интерференции.

Хорошо известно, что квантовая система, находящаяся в чистом состоянии, характеризующемся матрицей плотности ρ и поэтому обладающая лишь интерферирующими альтернативами, переходит в смешанное состояние после операции взятия следа по части своих индексов α

$$\rho \to \rho' = Tr_\alpha \rho.$$

Эта программа, однако, сразу же наталкивается на следующие "подводные камни".

1. Операция взятия следа сама по себе еще не гарантирует разрушение интерференционной картины, создаваемой электронами на пластине. На первый взгляд она вообще не имеет отношения к обсуждаемой проблеме. Действительно, согласно рассуждениям Р. Фейнмана [5], необходимым и достаточным условием разрушения интерференции является следующий критерий, вытекающий из соотношения неопределенностей — измерительное устройство должно позволять определить, какая из квантовых альтернатив реализовалась.

2. Невозможно обойти стороной проблемы и более принципиального характера. Например, почему уравнение Шредингера, будучи, как это принято считать, наиболее фундаментальным уравнением квантовой теории, не описывает процесс измерения, в то время, как менее точное описание с помощью редуцированной матрицы плотности, может справиться с этой задачей?

В квантовой механике, как известно, можно пользоваться либо уравнением Шредингера, либо уравнением фон Неймана для матрицы плотности, которое соответствует даже более общему случаю, так как описывает эволюцию не только чистых, но и смешанных состояний. Поскольку матрица плотности содержит в явном виде некоторое распределение вероятностей, она характеризует

состояние не отдельной квантовой системы, а сразу целого их набора (ансамбля). Волновую функцию или, что эквивалентно, матрицу плотности для чистых состояний, мы будем относить, следуя "копенгагенской интерпретации" [7,8], к одной и той же квантовой системе. В дальнейшем эта интерпретация будет упоминаться как индивидуальное описание.

Существует и другая точка зрения, согласно которой волновая функция также характеризует состояние сразу целого ансамбля одинаково приготовленных квантовых систем [9,10]. Дискуссии на эту тему продолжаются и по сей день (см., например, [11]).

В одной из последующих работ мы обсудим, почему это различие в интерпретациях квантовой механики не столь существенно, как это принято считать. Мы покажем, что статистическое описание квантовой системы всегда можно заменить эквивалентным ему индивидуальным описанием. При этом для моделирования открытой системы необходимо ввести в уравнение Шредингера некоторый набор случайных параметров. Говоря кратко — всякому описанию системы с помощью матрицы плотности отвечает полностью эквивалентное ему индивидуальное описание с помощью волновой функции и наоборот. Разумеется, вектор состояния квантовой системы оказывается в общем случае зависящим от некоторых случайных (вообще говоря — операторных) процессов.

Для решения вопроса о связи между редуцированным описанием и соотношением неопределенностей, сформулированного выше, более удобно воспользоваться индивидуальной формой описания. В этом случае гораздо легче догадаться, каким образом, имея в своем распоряжении набор случайных параметров, превратить интерферирующие альтернативы в неинтерферирующие, используя именно соотношение неопределенностей.

Действительно, пусть имеется вектор состояния $|\psi>$, представляющий собой сумму некоторых интерферирующих друг с другом альтернатив $|\psi_j>$

$$|\psi> = \sum_j C_j |\psi_j> ,$$

где $|\psi_j>$ — собственные векторы эрмитовского оператора наблюдаемой A

$$A|\psi_j>=a_j|\psi_j>.$$

До того, как проведено измерение, наблюдателю неизвестно точное количество частиц, находящихся в состоянии $|\psi_j>$ с некоторым фиксированным номером j (понятно, что это может быть 0 или 1, если $<\psi|\psi>=1$). После измерения информация о количестве частиц становится доступной и, следовательно, в силу соотношения неопределенностей фаза - число частиц [10], теряется информация об относительных фазах составляющих исходного волнового пакета. Таким образом имеем следующий индуцированный измерительным устройством переход

$$|\psi>\to\sum_j e^{i\phi_j}\, C_j\, |\psi_j>,$$

где ϕ_j — случайные, не скоррелированные друг сдругом фазы [1]

$$<\; e^{i\,(\phi_j-\phi_k)}\; >=\delta_{jk}.$$

В свою очередь, это приводит к тому, что в выражении для матрицы плотности все интерференционные члены исчезают:

$$<\;|\psi><\psi|\;>=\sum_{j,k}<C_jC_k^*>\,|\psi_j><\psi_k|=\sum_j|C_j|^2|\psi_j><\psi_j|.$$

Мы можем продвинуться и далее в развитии этих наводящих соображений, если обратимся к рассмотрению мысленного эксперимента Р. Фейнмана о прохождении электрона через два отверстия в экране [5]. Оператор числа электронов имеет в этом случае вид

$$N(\vec{x})=a^+(\vec{x})a(\vec{x}),$$

где $a^+(\vec{x}), a(\vec{x})$ — операторы рождения и уничтожения электронов в точке $\vec{x}$,

$$a(\vec{x})=(1/2\pi)^{3/2}\int a(\vec{p})e^{i\,\vec{p}\vec{x}}d\vec{p},$$

[1]Здесь и далее скобки $<\;.\;>$ обозначают усреднение по ансамблю наблюдений. Поскольку векторы состояний, вообще говоря, случайны, не исключено появление "двойных" скобок. Например, выражение $<<x|\psi>>$ означает, что амплитуда $<x|\psi>$ усредняется по некоторому набору случайных параметров.

$a^+(\vec{p}), a(\vec{p})$ — операторы рождения и уничтожения в импульсном пространстве, удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям

$$[a(\vec{p}), a^+(\vec{p}\,')]_+=\delta(\vec{p}-\vec{p}\,').$$

Количество электронов, регистрируемых в точке $\vec{x}$, равно

$$<N>=<<\psi_t|N|\psi_t>>.$$

Здесь $|\psi_t>=T\;e^{-i\int_0^t H(t')dt'}|\psi_0>$ — вектор состояния системы в момент времени t.

Квантовое состояние системы, состоящей всего из одного электрона, имеет вид

$$|\psi_t>=\int d\vec{p}\psi(\vec{p})a^+(\vec{p},t)\;|0>.$$

При этом

$$a(\vec{x})|\psi_t>=\psi(\vec{x},t)|0>.$$

Случайному фазовому множителю $e^{i(\phi_1-\phi_2)}$, обсуждавшемуся в предыдущем примере, теперь будет соответствовать коррелятор

$$\gamma(1,2)=\frac{\Gamma(1,2)}{(\Gamma(1,1)\Gamma(2,2))^{1/2}},$$

где

$$\Gamma(j,k)=<\psi_t|a^+(\vec{x}_j)a(\vec{x}_k)|\psi_t>=\psi^*(\vec{x}_j,t)\psi(\vec{x}_k,t),$$

а j и k — номера отверстий в экране. Вероятность обнаружения электрона в точке экрана $\vec{x}_0$ равна

$$<N>=<|G(0,1)|^2\Gamma(1,1)+|G(0,2)|^2\Gamma(2,2)+$$

$$+G^*(0,1)G(0,2)\Gamma(1,2)+G^*(0,2)G(0,1)\Gamma(2,1)>,$$

где $G(0,j)=<\vec{x}_0|T\;e^{-i\int_0^t H(t')dt'}|\vec{x}_j>$ — функция Грина, описывающая распространение частицы их точки $\vec{x}_j$ в точку $\vec{x}_0$.

Если предположить, что измерение производится только в момент прохождения частицы через отверстие, то функции Грина в предыдущем выражении можно вынести за знак усреднения. Это же относится и к величинам

$$\Gamma(j,j) = |\psi(\vec{x}_j,t)|^2 ,$$

не содержащим случайных фазовых множителей. В то же время среднее значение коррелятора $< \gamma(j,k) >$ может изменяться по модулю от нуля до единицы в зависимости от того, насколько точно проведенное измерение позволяет определить, через какое из отверстий прошел электрон.

В этом месте может возникнуть вопрос — каким образом в квантовой механике может получиться не полное, а только частичное разрушение интерференционной картины, обусловленное процессом измерения. Действительно, когда речь идет об одночастичных состояниях, согласно обычной статистической интерпретации волновой функции, результатом измерения может быть одно из двух: либо $N = 0$, либо $N = 1$. Поскольку в обоих случаях число частиц известно точно, то фазовые соотношения между отдельными компонентами волнового пакета должны быть полностью утерянными. Например, при измерении количества частиц, находящихся в состояниях $|\psi_1 >$ и $|\psi_2 >$, волновая функция системы

$$|\psi >= C_1|\psi_1 > +C_2|\psi_2 >$$

переходит, согласно нашей интерпретации, в

$$|\psi >= C_1 e^{i\phi_1}|\psi_1 > +C_2 e^{i\phi_2}|\psi_2 >,$$

где ϕ_1, ϕ_2 — неизвестные случайные, совершенно не скоррелированные друг с другом фазы, распределенные равномерно в интервале от нуля до 2π. Понятно, что любые корреляции между первой и второй компонентами волнового пакета в этом случае полностью исключены. Поэтому говорить о частичном разрушении когерентности волнового пакета можно только тогда, когда число частиц, находящихся в состояниях $|\psi_i >$, **измеряется приближенно** — случай достаточно часто встречающийся на практике, но не предусмотренный в теории измерений фон Неймана (излагаемой во всех стандартных курсах по квантовой механике). В

одной из следующих работ, посвященной приближенным квантовым измерениям, мы остановися на этом вопросе подробнее. Здесь лишь отметим, что в этом случае коэффициенты разложения будут иметь вид линейных комбинаций полностью стохастизированных экспонент

$$C_j(\phi_1,\phi_2,...) = \sum_k C_j^k e^{i\phi_k}.$$

Понятно, что такие коэффициенты оказываются, вообще говоря, скоррелированными друг с другом:

$$0 \leq < C_i C_j^* > \leq 1.$$

Теперь мы подошли к тому месту рассуждений, где необходимость введения в уравнение Шредингера случайных параметров становится особенно очевидной. Будем считать, что электрон, проходя через отверстие, не испытывает воздействия со стороны прибора: допустим, что вся информация о состоянии электрона считывается **уже после его прохождения через экран**. В этом случае необходимо, наоборот, вынести члены $\Gamma(j,k)$ за знак усреднения, оставив там функции Грина. Разрушение интерференции теперь будет происходить при усреднении (по ансамблю наблюдений) функций Грина. В частности, если эксперимент позволяет определить совершенно однозначно, через какое из отверстий прошла частица, то $< G^*(0,1)G(0,2) >= 0$. Таким образом, мы приходим к центральному для настоящей работы выводу о том, что матричные элементы оператора эволюции

$$G(0,j) =< \vec{x}_0|T\ e^{-i\int_0^t H(t')dt'}|\vec{x}_j >$$

квантовой системы, подверженной воздействию измерительного прибора, должны зависеть от некоторого набора случайных параметров. Это может означать только то, что и гамильтониан, и **уравнение Шредингера** должны быть модифицированы таким образом, чтобы учесть эту зависимость в явном виде (разумеется, если верить в то, что уравнение Шредингера вообще имеет какое - либо отношение к описанию открытых квантовых систем). С нашей точки зрения, здесь вырисовывается разумная аналогия с классическими системами, где учет открытости может быть смоделирован при помощи введения в уравнения движения случайных внешних сил — переход от уравнений Ньютона к уравнениям Ланжевена.

Литература

[1] *Садбери.* Квантовая механика и физика элементарных частиц, стр. 245, М.,Мир, 1989.

[2] *R. Feynman,* Int. Journ. Theor. Phys. V.21, 1982, p.467.

[3] *J.S. Bell,* Physics, **1**, 1965, 195.

[4] *J. S. Bell,* in "Quantum Gravity 2", Eds. Isham, Penrose, Sciama; Oxford, 1981, p.611.

[5] *Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс.* Фейнмановские лекции по физике, М., Мир, 1966.

[6] *Дж. фон Нейман.* Математические основы квантовой механики, М., Наука, 1964.

[7] *N. Bohr,* Nature,**121** (1928) 580.

[8] *W. Heisenberg,* Z. Phys., **43** (1932) 172.

[9] *Д.И. Блохинцев.* Принципиальные вопросы квантовой механики. М., Наука, 1987.

[10] *L.E. Ballentine,* Rev. Mod. Phys., **42** (1970) 358.

[11] *М.А. Марков.* О трех интерпретациях квантовой механики, М., Наука, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1994 года.

Костенко Б.Ф.

Р4-94-507

Об уравнении Шредингера со стохастическими параметрами

Подобно тому, как введение случайных параметров в уравнение Ньютона (переход к уравнению Ланжевена) позволяет описывать открытые классические системы, так и уравнение Шредингера со случайным классическим шумом моделирует поведение открытых квантовых систем, в том числе и тех, которые подвержены воздействию измерительного прибора.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод автора

Kostenko B.F.

P4-94-507

On Schrodinger Equation with Stochastic Parameters

Just as introduction of stochastic parameters into Newton equation (transition to Langevin equation) allows one to describe open quantum system, the Schrodinger equation with stochastic classical noise is a good model for description of open quantum systems, including those that interact measuring device.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994