

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P4-94-441

В.Г.Носов*, А.И.Франк

МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ
И ТРАНСФОРМАЦИЯ ПУЧКОВ
МЕДЛЕННЫХ НЕЙТРОНОВ

Направлено в «Журнал экспериментальной
и теоретической физики»

*Институт общей и ядерной физики, Российский научный центр
«Курчатовский институт», Москва

1994

Матрица плотности и трансформация пучков медленных нейтронов

Поднятый в литературе вопрос о возможности различения в эксперименте чистого и смешанного состояний пучка нерелятивистских частиц анализируется в терминах его матрицы плотности. Развита конкретная теория явления. В общем случае имеет место пучок с модулированной плотностью: кинематически по нему распространяются волны, напоминающие звуковые. Они обладают дискретным спектром. Ограничение на длину волны снизу имеет чисто квантовое происхождение и определяется длиной когерентности, намного превосходящей дебройлевскую при хорошей монохроматизации пучка. Теоретически найдена возможность и указан практический способ реализации трансформации пучка холодных нейтронов, увеличивающей длину и снижающей частоту распространяющейся в нем соответствующей волны модуляции. Обсуждаются ближайшие возможности эксперимента.

Работа выполнена в Лаборатории нейтронной физики им. И.М.Франка.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Frank A.I., Nosov V.G.

P4-94-441

Density Matrix and Transformation of Slow Neutron Beams

The question raised in the literature regarding the possibility of recognizing pure and mixed states in a beam of nonrelativistic particles is analyzed in terms of its density matrix. A specific theory of the phenomenon has been developed. In the general case, the beam occurs with a modulated density: from the kinematics standpoint, waves which resemble sound waves, are propagated along the beam. They have a discrete spectrum. The lower bound on the wavelength has a purely quantum origin and is determined by the coherence length which is many times larger than the De Broglie length under good beam monochromatization. In theory, the feasible and practical ways of realizing cold neutron beam transformation have been found which could extend the length and diminish the frequency of the corresponding modulation wave propagating in the beam. The immediate possibilities of the experiment are considered.

The investigation has been performed at the Frank Laboratory of Neutron Physics, JINR.

1. Введение

На протяжении многих лет развитие физики медленных нейтронов расширяло наши возможности использования этих частиц для экспериментальной проверки основных положений квантовой механики. Известную роль в успехе этих исследований сыграло и появление нейтронных интерферометров для тепловых нейтронов [1-4].

Параллельно развивались исследования с ультрахолодными нейтронами (УХН) [5-8]. Довольно большая дебройлевская длина волны УХН

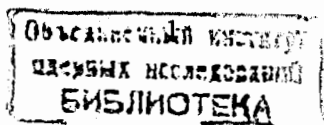
$$\lambda = k^{-1} \sim 10^{-6} \text{ см} \quad (1)$$

делает их весьма привлекательными для квантово-механических экспериментов. Одновременно обсуждались и продолжают обсуждаться возможности наблюдения существенно нестационарных явлений [9-15]. Первый эксперимент этого рода уже осуществлен [16]. В случае УХН анализу и планированию здесь помогает значительная величина характерного квантового времени:

$$\frac{\hbar}{\epsilon} = \omega^{-1} \sim 10^{-8} \text{ с.} \quad (2)$$

Несколько особняком стоит еще одно направление исследований, возникшее благодаря развитию нейтронной интерферометрии. Стимулирующие публикации этого направления [17-19] все больше сосредоточивают внимание на истинном состоянии используемых в эксперименте пучков нейтронов. Грубо говоря, речь идет о том, описываются ли они волновой функцией (чистое состояние) или же представляют собой смесь. Достаточно общепринятым является использование понятия длины когерентности l_c , вводимое по аналогии с оптикой. При этом естественно выглядящий случай $l_c \gg \lambda$ вполне реалистичен. Тесно связанная с этим возможность укрупнения пространственных и временных масштабов явления внушает известный оптимизм.

Прокомментируем чуть подробнее потенциальные возможности такой своеобразной квантовой диагностики нейтронных пучков. Обсуждаемая в [18],[19] альтернатива "когерентная суперпозиция или



некогерентная смесь" подразумевает только две предельные возможности. На самом деле для пучков возможны не только разные степени, но, как будет видно из дальнейшего, и несколько различающиеся типы смешивания. Тем не менее, предельный случай чистого состояния, обладающего волновой функцией Ψ , имеет, в принципе, достаточно разумный смысл [20]. Возникающие здесь диагностические трудности лучше всего проиллюстрировать простым одномерным примером.

Независимо от природы или конкретного характера рассматриваемого состояния плотность частиц будем обозначать через $|\Psi|^2$, а плотность потока можно записать в виде

$$j = v(x, t) |\Psi|^2(x, t). \quad (3)$$

По хорошо известным формулам квантовой механики [20] легко приходим к

$$\Psi(x, t) = \sqrt{|\Psi|^2} e^{i[-\varphi_0(t) + \frac{m}{\hbar} \int v(x, t) dx]}, \quad (4)$$

где $\varphi_0(t)$ - не зависящее от координаты x произвольное слагаемое интегрирования.

Здесь мы видим волновую функцию единственного чистого состояния, отвечающего поставленным условиям. Если же используемые распределения относились к состоянию, которое на самом деле является смешанным, то последнее остается неизвестным. Иными словами, матрица плотности не восстанавливается по одной лишь пространственной плотности, даже если ток $j(x, t)$ тоже известен.

Это есть прямое следствие самой возможности существования смешанных состояний квантово-механического движения [20]. Эксперимент, в котором исчерпывающим образом измеряются ток и плотность частиц, все же не является здесь полным опытом. Мы приходим к выводу, хорошо иллюстрирующему здесь всю трудность и тонкость проблемы. Путем только пространственного и временного анализа распределений плотности и тока, без спектрометрических измерений, выявляющих энергетическое распределение состояния, в принципе невозможно установить, смешанное оно или чистое. Строго говоря, это относится и к стационарным состояниям. В смешанном случае они тоже обладают энергетическим спектром.

2. Матрица плотности в энергетическом представлении и квантовая структура пучков нерелятивистских частиц

Рассмотрим подробнее одностороннее свободное движение пучка частиц, $k > 0$, вдоль положительного направления оси x . Пусть частоты участвующих в движении частиц сосредоточены, главным образом, в относительно узком интервале

$$|\omega - \bar{\omega}| \sim \Delta\omega \ll \omega. \quad (5)$$

Внутри узкого спектрального распределения $F(\omega)d\omega$ выбор средней $\bar{\omega}$ несколько произволен. Ее удобно, например, фиксировать через среднюю по спектру классическую скорость частицы:

$$\bar{v} = \frac{\int v F(\omega) d\omega}{\int F(\omega) d\omega}. \quad (6)$$

Здесь и ниже пределы интегрирования по энергии не проставляем ввиду быстрой сходимости всех подобных выражений при $\omega \approx \bar{\omega}$.

Без ограничения общности полагаем, сначала несколько формально, что имеет место чистая суперпозиция, и состояние описывается волновой функцией

$$\Psi(x, t) = \int c(\omega) e^{i(kx - \omega t)} d\omega,$$

$$\Psi^*(x, t) = \int c^*(\omega) e^{-i(kx - \omega t)} d\omega, \quad (7)$$

где $c(\omega)$ - некие амплитуды. Подразумеваемая зависимость $k(\omega)$ определяется обычным законом дисперсии свободного движения. После вычисления любых физически наблюдаемых величин обобщение результата на смешанное состояние легко достигается по хорошо известному рецепту [20], [21]:

$$c(\omega) c^*(\omega') \longrightarrow \rho(\omega, \omega'). \quad (8)$$

Энергетическая матрица плотности $\rho(\omega, \omega')$ эрмитова и в общем случае не факторизуется. Она не зависит от времени явно, но это не мешает рассмотрению и существенно нестационарных явлений.

Выпишем важную формулу для пространственной плотности частиц:

$$|\bar{\Psi}|^2 = \int \int e^{-i(kl-k)x} e^{i(\omega l - \omega)t} \rho(\omega, \omega l) d\omega d\omega l. \quad (9)$$

Что же касается квантово-механического выражения для тока, то по форме оно не дает здесь ничего нового. В рассматриваемом случае узких энергетических спектров (5) получаем с требуемой точностью:

$$j \cong \bar{v} |\bar{\Psi}|^2. \quad (10)$$

Попытаемся теперь проанализировать ситуацию в некоторой конечной точке x . При больших временах t стоящая под знаком интеграла (9) экспонента сильно осциллирует. Такие осциллирующие интегралы стремительно убывают, что асимптотически должно приводить к исчезновению плотности и тока в рассматриваемой точке. Физическая интерпретация тоже хорошо известна (см., напр., [20]): непрерывный пакет состояний сплошного спектра уходит на бесконечность.

Заметим во избежание недоразумений, что сама по себе справедливость формулы (9) и вытекающих из нее следствий не зависит от наличия или конкретных свойств источника частиц где-то в другом месте. Как станет яснее из дальнейшего, это обстоятельство существенным образом компрометирует наивную гипотезу, будто реальный пучок просто-напросто состоит или может состоять из пакетов. Физическая интерпретация длины когерентности l_c , характеризующая истинную структуру пучка, будет дана ниже.

Возвращаясь к анализу временной зависимости выражения (9), отметим, что все вышесказанное кажется мало приемлемым для описания реальных пучков. Средний по бесконечному времени ток во всяком случае должен быть ненулевым. Помечая усреднение по времени лишней чертой над соответствующим выражением, сформируем указанное требование:

$$\bar{j} \neq 0, \quad \overline{|\Psi|^2} \neq 0. \quad (11)$$

Разгадка парадокса состоит в следующем. Осциллирующий интеграл (9) действительно стремится к нулю при регулярной или

слабо нерегулярной функции $\rho(\omega, \omega l)$. Это случай пакета. Достаточно же сильная сингулярность могла бы стабилизировать плотность и ток на уровне требований (11).

Единственной подходящей сингулярностью оказывается δ -функция от энергии. Регулярную же часть матрицы плотности, как чуждую сути рассматриваемого явления и отвечающую необратимо ушедшему на бесконечность пакету, выписывать не будем.

Подчеркнем, что отнюдь не завышенное требование существования пучка (11) практически предопределяет вид его матрицы плотности. Для пучков нерелятивистских частиц с относительно хорошей монохроматизацией она может быть установлена чисто дедуктивным путем. Впрочем, выражаясь точнее, δ -функционная сингулярность может быть введена в матрицу плотности двумя несколько различающимися способами.

1) *Самое смешанное состояние.* При заданном энергетическом спектре пучка $F(\omega)$ существует его самое смешанное состояние (ССС). Оно содержит сингулярность напрашивающегося вида:

$$\rho(\omega, \omega l) = F(\omega) \delta(\omega l - \omega). \quad (12)$$

ССС стационарно и коррелятивных эффектов (см. ниже) не содержит. При желании спектр можно нормировать на единицу:

$$\int F(\omega) d\omega = 1.$$

Тогда на единицу нормирована и постоянная плотность частиц, а для тока имеем

$$j = \bar{j} = \bar{v}.$$

Этот простейший случай, вероятно, чаще всего встречается на практике и сам по себе, казалось бы, особого интереса не представляет. Коснемся лишь предельного перехода к широко известному чистому состоянию. Если сужать спектр по схеме $\omega \rightarrow \bar{\omega}$; $F(\omega) \rightarrow \delta(\omega - \bar{\omega})$, то согласно

$$\delta(\omega - \bar{\omega}) \delta(\omega l - \omega) = \delta(\omega - \bar{\omega}) \delta(\omega l - \bar{\omega})$$

матрица плотности факторизуется. В этом пределе приходим к монохроматической плоской волне

$$\Psi = e^{i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)}. \quad (13)$$

2) *Общий случай.* Помимо прочего, аргумент δ -функции можно еще сдвинуть на некоторую постоянную ω_μ . Физически это отвечает корреляциям между участками энергетического спектра, отстоящими друг от друга точно на эту величину. Соответствующий вклад в пространственную плотность (9) осциллирует, но не затухает со временем.

Очевидное обобщение на случай нескольких или многих таких частот ω_μ (коррелятивных разностей энергий) выглядит следующим образом:

$$\rho(\omega, \omega t) = F(\omega)\delta(\omega t - \omega) + \sum_{\mu=1}^{\infty} [\alpha_\mu(\omega)\delta(\omega t - \omega - \omega_\mu) + \alpha_\mu^*(\omega t)\delta(\omega t - \omega + \omega_\mu)]. \quad (14)$$

Явно эрмитова форма записи матрицы плотности позволила ограничиться здесь только положительными ω_μ . Индекс μ нумерует их как угодно, допустим, в порядке возрастания. Эффективно комплексные функции корреляции α_μ сосредоточены внутри того же интервала (5). Отметим, что представление о возможном вырождении подобных переходных частот едва ли имеет глубокий смысл. В гипотетическом "вырожденном" случае соответствующие члены формулы (14) все равно можно объединить в один.

По сравнению с видом формулы (14) для пучка ничего другого придумать нельзя. Тем не менее, ввиду известного принципиального интереса рассмотрим вкратце и частный случай чистого состояния.

3) *Чистое состояние.* Здесь все решает упоминавшееся уже в связи с формулой (9) чисто кинематическое обстоятельство. Чтобы чистое состояние не ушло на бесконечность по принципу пакета, его спектр должен быть только строго дискретным:

$$\Psi = \int d\omega e^{i(kx - \omega t)} \sum_r b_r \delta(\omega - \omega_r),$$

$$\Psi^* = \int d\omega t e^{-i(k'tx - \omega' t')} \sum_s b_s^* \delta(\omega' - \omega_s). \quad (15)$$

Для удобства приведения к общему виду (14) считаем, что индекс r или s нумерует эти "уровни" энергии в порядке ее возрастания.

Определяемая парой значений $s > r$ переходная частота на этот раз диктуется принципом Ритца

$$\omega_\mu \equiv \omega_{sr} = \omega_s - \omega_r > 0 \quad (s > r) \quad (16)$$

теперь уже в буквальном смысле этого слова. После элементарных преобразований аргументов стоящих рядом δ -функций приходим к следующим выражениям для энергетического спектра и функций корреляции в этом предельном случае чистого состояния пучка:

$$F(\omega) = \sum_r |b_r|^2 \delta(\omega - \omega_r),$$

$$\alpha_\mu(\omega) \equiv \alpha_{sr}(\omega) = b_s^* b_r \delta(\omega - \omega_r). \quad (17)$$

Вернемся к общей формуле (14). Суть приближения, которого мы придерживаемся, можно выразить и так:

$$\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v} \cong \frac{1}{\bar{v}}. \quad (18)$$

Если отвлечься от слишком больших диапазонов изменения координаты x в первой экспоненте под знаком интеграла в (9), то пространственная и временная зависимости плотности частиц входят только через комбинацию

$$\tau = t - \frac{x}{\bar{v}}. \quad (19)$$

В пределах точности формулы (10) это также вытекает из уравнения непрерывности. Подстановка в формулу (9) дает

$$|\overline{\Psi}|^2 = 1 + \sum_\mu \{ \beta_\mu e^{i\omega_\mu \tau} + \text{компл. сопр.} \},$$

$$\beta_\mu = \int \alpha_\mu(\omega) d\omega. \quad (20)$$

В отличие от волн де Бройля, здесь мы имеем несколько иное, более крупномасштабное явление: реалистические волны плотности в пучке. Согласно (10) такую же форму имеют и волны модуляции тока.

Мы приходим к следующим важным выводам. Кроме случая самого смешанного состояния, любой пучок нестационарен и характеризуется дискретным набором неких его частот ω_μ . По своей сути

они не уширены, а являются величинами точными. Каждой такой частоте отвечает своя волна плотности в пучке. В соответствии с наглядными представлениями у всех волн скорость распространения единая и равна классической скорости \bar{v} частицы.

Если все ω_μ соизмеримы, то выражение (20) представляет собой ряд Фурье и процесс периодичен. В противном случае в пучке имеют место биения плотности частиц.

Наконец, отметим соотношение неопределенности для порядка величин частот ω_μ , эффективно участвующих в корреляциях:

$$\Delta\omega \gtrsim \omega_\mu. \quad (21)$$

Энергия нестационарного пучка, по которому бегут волны плотности, не может быть фиксирована слишком точно.

Принцип неопределенности ограничивает возможность применимости слишком прямолинейно наглядных структурных представлений о пучке. Это может быть понято и как ограничение снизу на пространственный размер трансляционных волн плотности. По формулам (19) и (20) имеем

$$l_c \sim \frac{\bar{v}}{\omega_\mu} \simeq \frac{m\bar{v}^2}{\hbar\omega_\mu} \lambda \gtrsim \lambda \frac{\omega}{\Delta\omega} \gg \lambda. \quad (22)$$

Для когерентного времени тривиальным образом получаем

$$t_c \sim \omega_\mu^{-1} \gtrsim (\Delta\omega)^{-1} \gg \omega^{-1}. \quad (23)$$

3. Трансформация пучков периодическим прерывателем. Низкочастотные биения

Актуальный интерес, по крайней мере в одномерной геометрии, представляет возможность нестационарной трансформации пучков с помощью некоторого модулирующего устройства. Мы сосредоточим внимание на случае периодического режима работы подобного квантового модулятора (прерывателя) [12],[13],[15]. Простой пример модулятора периодического действия, использующего только

поглощение части холодных нейтронов из пучка, рассчитан и детально проанализирован в работе [13]. Выпишем сначала соотношения, справедливые для гораздо более широкой категории прерывателей этого типа с периодом $T = 2\pi/\Omega$.

Чтобы изменение энергии по-прежнему оставалось относительно малым (ср. с формулой (5)), полагаем $\Omega \ll \bar{\omega}$. Согласно общим принципам, его воздействие на монохроматическую волну

$$\Psi = e^{i(kx - \omega t)}, \quad x < 0, \quad (24)$$

уже полностью характеризует квантовый прерыватель. После него

$$\Psi \cong f(t)e^{i(kx - \omega t)}, \quad k^{-1} < x \ll \frac{v}{\Omega}, \quad (25)$$

где $f(t)$ — некая комплексная функция модуляции [15]. Ни поглощающий, ни пропускающий (фазовый) модулятор практически не осуществимы, если толщина устройства мала по сравнению с длиной волны де Бройля. Это символически выражает левая часть неравенства, а правая требует, чтобы конфигурация устройства мало менялась за классическое время пролета. В том же адиабатическом приближении $\gamma = (\Omega/\omega) \ll 1$ унитарность налагает ограничения не только на среднее по периоду значение $|f(t)|^2$. Из-за потерь на поглощение и отражение для мгновенного значения амплитуды модуляции справедливо:

$$|f(t)| < 1. \quad (26)$$

Конечный результат трансформации лучше всего выразить через коэффициенты Фурье функции модуляции

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-in\Omega t}, \quad a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{in\Omega t} dt. \quad (27)$$

После подстановки в формулу (25) закон сохранения энергии позволяет снять ограничения на расстояние:

$$\Psi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i(k_n x - \omega_n t)}, \quad x > 0;$$

$$\omega_n = \omega + n\Omega, \quad k_n = k(\omega_n) = k\sqrt{1 + n\gamma}, \quad \gamma = \Omega/\omega. \quad (28)$$

Как уже отмечалось в работах [12],[13],[15], во всем пространстве подобное чистое состояние соответствует определенной, но органически неоднозначной квазиэнергии $\omega + n\Omega$.

Перейдем теперь к смешанным состояниям. Наиболее обстоятельное решение выражает матрицу плотности $\rho(\omega, \omega')$ прошедшего прерыватель пучка через его состояние до трансформации. В наших обозначениях для этого проще всего выписать матрицу плотности $\rho(x, x') = \overline{\Psi(x)\Psi^*(x')}$ в координатном представлении [20]. С помощью формул типа (7) и (8) легко получить

$$\rho(x, x') = \int \int e^{i[(\omega' - \omega)t - k'x' + kx]} \rho(\omega, \omega') d\omega d\omega'. \quad (29)$$

Для конкретного же квантового прерывателя, характеризующегося набором коэффициентов a_n и основной частотой Ω , можно руководствоваться формулами (24) и (28). Тогда принцип суперпозиции и рецепт (8) дают

$$\rho(x, x') = \int \int d\omega' d\omega \rho_i(\omega, \omega') \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} a_m^* a_n e^{i[(\omega'_m - \omega_n)t - k'_m x' + k_n x]}. \quad (30)$$

$$\text{Здесь } \omega'_m = \omega' + m\Omega, \quad k'_m = k(\omega'_m).$$

Матрица плотности начального состояния обозначена через $\rho_i(\omega, \omega')$. Вводя ее под знак суммы, меняем также порядок операций. После замены переменных интегрирования по схеме

$$\omega \longrightarrow \omega - n\Omega, \quad \omega' \longrightarrow \omega' - m\Omega$$

все это приводится к общему виду (29). Сопоставляя оба выражения для $\rho(x, x')$, получаем окончательно¹:

$$\rho(\omega, \omega') = \sum_{m, n=-\infty}^{\infty} a_m^* a_n \rho_i(\omega - n\Omega, \omega' - m\Omega). \quad (31)$$

¹Из самых общих квантово-механических соображений заранее очевидно, что при любых трансформациях чистое состояние переходит в чистое, а смешанное – в смешанное. Вид формулы (31) демонстрирует это более конкретно.

Помимо такого основного соотношения другие конкретные формулы, менее всеобъемлющие и не так полно характеризующие трансформацию, могут оказаться простыми и удобными в употреблении. Это особенно относится к плотности частиц. Здесь не всегда приходится обращаться к общей формуле (9). После обычного перехода к смешанному случаю формула (25) приводит, очевидно, к

$$|\overline{\Psi}|^2 \cong |f(t)|^2 |\overline{\Psi}|_i^2, \quad x \ll \frac{v}{\Omega}. \quad (32)$$

Однако, принимая во внимание универсальный характер зависимости от комбинации (19), излишне жесткое ограничение на расстояние надо снять²:

$$|\overline{\Psi}|^2(\tau) = |f(\tau)|^2 |\overline{\Psi}|_i^2(\tau). \quad (33)$$

Для дальнейшего целесообразно ввести фурье-разложение и для квадрата модуля функции модуляции:

$$|f(t)|^2 = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} d_{\mu} e^{-i\mu\Omega t}, \quad d_{\mu} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^* a_{m+\mu}. \quad (34)$$

Рассмотрим простую, но важную задачу о трансформации пучка стационарного типа ССС. Его постоянную плотность нормируем на единицу. Имеем:

$$|\overline{\Psi}|^2 = |f(\tau)|^2 = d_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \{d_{\mu} e^{-i\mu\Omega\tau} + \text{компл. сопр.}\}. \quad (35)$$

Из формулы (20) видно, что получается пучок общего типа с периодической модуляцией плотности. Подчеркнем, что результат (35) справедлив вне зависимости от соотношения величин энергетической дисперсии $\Delta\omega$ падающего пучка и спутного расщепления Ω , привносимого квантовым прерывателем. Требуется только выполнение условий:

$$\Omega, \Delta\omega \ll \omega.$$

²Это может быть не вполне справедливо, если функция модуляции имеет достаточно выраженную особенность. Тогда в ее ближайшей окрестности ход плотности нейтронов обнаруживает тонкую структуру (кинк), для расчета которой приходится применять более строгие формулы. Универсальность зависимости только от переменной (19) здесь, строго говоря, тоже нарушается (см. также в следующем разделе). Работа [13] была посвящена конкретному случаю, когда функция $f(t)$ меняется скачком каждые полпериода. Это действительно повлекло за собой некоторое усложнение вычислений.

Для полноты картины приведем также вычисляемые согласно (31) энергетический спектр и функции корреляции нового пучка:

$$F(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_i(\omega - m\Omega) |a_m|^2, \\ \alpha_\mu(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_i(\omega - m\Omega) a_m a_{m+\mu}^*, \quad (36) \\ \omega_\mu = \mu\Omega.$$

(Ср. с формулой (14), фиксирующей определение этих характеристик.)

Для более полной иллюстрации возможностей процесса трансформации перейдем к рассмотрению произвольного пучка. Ограничимся вычислением пространственной плотности, что физически наиболее актуально. У исходного пучка его частоты ω_ν , вообще говоря, несоизмеримы. Мгновенная картина возникающих после трансформации биений дается несколько громоздким произведением:

$$|\Psi|^2 = \left\{ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} [\beta_\nu e^{i\omega_\nu \tau} + \beta_\nu^* e^{-i\omega_\nu \tau}] \right\} \times \left\{ d_0 + \sum_{\mu=1}^{\infty} [d_\mu e^{-i\mu\Omega\tau} + d_\mu^* e^{i\mu\Omega\tau}] \right\}. \quad (37)$$

Особый интерес представляет случай, когда собственная частота прерывателя $\mu\Omega$ оказывается близкой к одной из частот ω_ν исследуемого пучка. Пусть для определенности $\omega_\nu \equiv \omega_1$. Аномально длинная волна плотности нейтронов медленно проходит через детектор, что может оказаться важным для практической реализации эксперимента. Действительно, тогда плотность результирующего пучка можно усреднить по остальным быстрым колебаниям, и

$$\langle |\Psi|^2 \rangle = d_0 + \beta_1 d_\mu e^{i(\omega_1 - \mu\Omega)\tau} + \beta_1^* d_\mu^* e^{-i(\omega_1 - \mu\Omega)\tau}. \quad (38)$$

Здесь $\langle |\Psi|^2 \rangle$ - плотность трансформированного пучка, усредненная по колебаниям со всеми частотами ω_ν , $\Omega \gg |\omega_1 - \mu\Omega|$ и комбинационными частотами, кроме медленной моды $|\omega_1 - \mu\Omega|$.

Пространственный и временной масштабы явления определяются оценками

$$l_\mu \sim \frac{\bar{v}}{|\omega_1 - \mu\Omega|}, \quad t_\mu \sim \frac{1}{|\omega_1 - \mu\Omega|}. \quad (39)$$

В принципе, возможности усиления эффекта лимитируются только практической точностью фиксирования рабочей частоты Ω прерывателя.

4. Пространственные биения на больших расстояниях

Рассмотрим вкратце более тонкий вопрос о свойствах пучка за пределами применимости линейного приближения (18) и основанного на нем формул. Строго говоря, на больших расстояниях соответствующие выражения становятся чувствительными к нелинейности закона дисперсии $k(\omega)$. В тесной связи с этим обстоятельством возникает зависимость не только от комбинации переменных (19), но и непосредственно от координаты x .

Полагая в формуле (30) $x' = x$, получаем для плотности пучка после его трансформации:

$$|\Psi|^2 = \iint d\omega' d\omega \rho_i(\omega, \omega') \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_m^* a_n e^{i[(k_n - k'_m)x - (\omega_n - \omega'_m)t]}. \quad (40)$$

При очень хорошей монохроматизации первичного пучка

$$\Delta\omega \ll \Omega \quad (41)$$

это выражение допускает дальнейший анализ. Разложим в ряд закон дисперсии $k_n = k\sqrt{1 + n\gamma}$ до квадратичных членов включительно:

$$k_n - \omega_{nt} \cong kx - \omega t - n\Omega \left(t - \frac{x}{v} \right) - n^2 \phi(x); \quad \phi(x) = \frac{\gamma^2}{8} kx. \quad (42)$$

Члены, пропорциональные x , зависят, вообще говоря, также и от энергии. Легко, однако, убедиться, что в нашем случае эта зависимость не существенна. Знак среднего над волновым числом и другими характеристиками нейтронов, падающих на прерыватель, ниже писать не будем.

Для исходного пучка полагаем простейшее:

$$\rho_i(\omega, \omega') = F_i(\omega) \delta(\omega' - \omega), \quad \int F_i(\omega) d\omega = 1. \quad (43)$$

Интегрирования по энергии выполняются в замкнутом виде:

$$|\overline{\Psi}|^2 \cong \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} a_m^* a_n e^{-i(n-m)\Omega\tau} e^{-i(n^2-m^2)\phi(x)}. \quad (44)$$

Заменяя затем один из индексов по схеме $n - m = \mu$, получаем окончательно:

$$|\overline{\Psi}|^2 \cong \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} D_{\mu}(x) e^{-i\mu\Omega\tau}, \quad D_{\mu}(x) = e^{-i\mu^2\phi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^* a_{m+\mu} e^{-i2\mu m\phi}. \quad (45)$$

Сравнение с формулами (34) и (35) демонстрирует известную сложность уточненной картины пространственных биений. Относительно мелкомасштабная структура плотности, зависящая только от τ , дополнительно модулируется медленно меняющимся фактором. Волны длинномасштабной модуляции $D_{\mu}(x)$ не транслируются вдоль пучка, а остаются неподвижными.

Эти длинные волны обладают фиксированной пространственной периодичностью. На расстоянии возврата

$$L = \frac{16\pi}{\gamma^2 k} \sim \frac{\ell_c^2}{\lambda} \gg \ell_c \quad \left(\ell_c \sim \frac{v}{\Omega} \right) \quad (46)$$

мелкая τ -структура плотности восстанавливается полностью в прежнем виде. Формула же (35) и аналогичные справедливы при $x \ll L$. Чисто пространственная волна D_{μ} может быть также выражена и непосредственно через функцию модуляции прерывателя. С помощью обратного фурье-преобразования (27) без особого труда находим:

$$D_{\mu}(x) = \frac{e^{-i\mu^2\phi}}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\chi) f^*(\chi - 2\mu\phi) e^{i\mu\chi} d\chi, \quad (47)$$

где $\chi = \Omega t$ - безразмерная переменная интегрирования.

Биения на больших расстояниях придают своеобразный характер предельному случаю трансформации с помощью идеального фазового модулятора. Он считается свободным от потерь (ср. с формулами (25), (26)) и меняет только фазу монохроматической волны без уменьшения интенсивности:

$$f = e^{iy(\chi)}, \quad |f(\chi)|^2 = 1 = const. \quad (48)$$

Отметим, что для очень холодных нейтронов эффективное приближение к подобному пределу может быть связано с определенным обстоятельством. Согласно общеизвестной квантово-механической формуле, выше потенциального барьера используемого вещества коэффициент отражения нейтронов быстро падает с энергией. Потери на поглощение также могут быть сведены к минимуму путем выбора материалов с достаточно низким сечением захвата.

Непосредственно за устройством ($x \ll L$) плотность пучка постоянна $D_{\mu} \cong d_{\mu} = \delta_{\mu 0}$, как будто модулятор на него вообще не повлиял. Интересно отметить, что подобного влияния не видно не только при $x \simeq L$, но и при $x \simeq \frac{L}{2}$. Зато, например, в окрестности $x \simeq \frac{L}{4}$ обнаруживается развитая система обычных τ -волн модуляции плотности с нечетными μ (это обстоятельство кратко отмечалось в [22]):

$$|\overline{\Psi}|^2 \cong 1 + \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_{2s-1} e^{-i(2s-1)\Omega\tau},$$

$$D_{2s-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(\chi) f^*(\chi + \pi) e^{i(2s-1)\chi} d\chi, \quad (49)$$

$$\left| x - \frac{L}{4} \right| \ll \frac{L}{4}.$$

Таким образом, устройство (48) действительно генерирует пучок общего типа, когерентные свойства которого диктуются, главным образом, сателлитным расщеплением Ω . Однако непосредственно на плотности частиц это сказывается в данном случае только на достаточно больших расстояниях от квантового модулятора.

5. Обсуждение

Обсудим кратко дополнительное влияние магнитных свойств поляризованных нейтронов. Их использование способно расширить экспериментальные возможности проверки рассмотренных выше эффектов. Проиллюстрируем это некоторыми простыми оценками.

В ферромагнитном материале к среднему ядерному потенциалу добавляется еще магнитная энергия $\pm \mu B$ [эВ] $\simeq 6 \cdot 10^{-12} B$ [Гс]. При

индукции в несколько килогаусс магнитная добавка к потенциалу уже заметна. Частота перемагничивания $\Omega/2\pi = 10 \text{ МГц} = 10^7 \text{ с}^{-1}$ дает $\hbar\Omega \simeq 4 \cdot 10^{-8} \text{ эВ}$, что также выглядит реалистично.

На этом принципе может быть основано нестационарное магнитное устройство – модулятор [15],[22]. В случае идеального фазового модулятора особенно важно сравнить длину когерентности $\ell_c = v/\Omega$ (см. также (41)) с его расстоянием возврата. Для ультрахолодных нейтронов ($v \simeq 10 \text{ м/с}$, $\gamma \simeq 8 \cdot 10^{-2} \ll 1$) они различаются на два порядка. Это означает, что на расстоянии $L/4 \simeq 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$ от квантового модулятора уже возникает существенная модуляция плотности пучка. Речь идет, таким образом, о расстояниях типа десятков микрон. Из-за кубической зависимости L от скорости это расстояние может быть существенно увеличено при переходе к очень холодным нейтронам ($v \simeq 50 \text{ м/с}$).

Что же касается вопроса о восстановлении матрицы плотности пучка по данным опыта, то, по-видимому, еще рано судить, представляет ли эта диагностическая проблема действительно актуальный физический интерес или она носит несколько академический характер. Скорее всего, проблема в принципе разрешима путем подбора надлежащей комбинации модуляторов, ликвидирующей все частоты $\omega_\nu > 0$ исследуемого пучка, то есть приводящей его к простейшему типу ССС.

Этот результирующий пучок стационарен, пространственно однороден на всем своем протяжении и, грубо говоря, представляет собой как бы вакуум волн модуляции плотности. Однако, как отмечалось во введении, для окончательного установления его энергетического спектра $F(\omega)$ опять-таки потребуются неизбежные спектротрические измерения, без чего задача замкнута быть не может.

Настоящая работа выполнена при поддержке Международного научного фонда (грант No RFH000).

Литература

- [1] H.Maier-Leibnitz and T.Springer, Z.Phys.167 (1962) 386.
 [2] H.Rauch, W.Treimer, U.Bonse, Phys.Lett.A 47(1974) 369.

- [3] A.Zeilinger, R.Gailer, C.G.Shull, W.Treimer and W.Mampe, Rev.Mod.Phys 60 (1988) 1067.
 [4] Neutron Interferometry. U.Bonse, H.Rauch (eds.) (Clarendon Press, Oxford, 1979).
 [5] Stenhauser K.-A, Steyerl A, Schehenchofer H. Phys.Rev.Lett. 44 (1980) 1306.
 [6] Покотилковский Ю.Н.,Новопольцев М.И. Препринт ОИЯИ Р3-81-828, Дубна, 1981.
 [7] M.I.Novopoltsev, Y.N.Panin, Y.N.Pokotilivskii et al. Z.Phys.B, 70 (1988) 190.
 [8] Steyerl A., Drexel W., Malik S.S., Gutschiedl E. Physica B, 151 (1988) 36.
 [9] M.Moshinsky, Phys.Rev., 88 (1952) 625.
 [10] А.С.Герасимов, М.В.Казарновский, ЖЭТФ, 71 (1976) 1700.
 [11] J.Felber, G.Muller, R.Gähler, R.Golub, Physica B, 162 (1990) 191.
 [12] В.Г.Носов, А.И.Франк, в сб: VI Международная школа по нейтронной физике (Алушта, 1990) 1, 313. Дубна, 1991.
 [13] V.G.Nosov, A.I.Frank, J.Mosc.Phys.Soc. 1 (1991) 1.
 [14] A.I.Frank, D.B.Amandzolova. Neutron Quantum Refraction, JINR E3-93-418, Dubna, 1993.
 [15] А.И.Франк, В.Г.Носов. Ядерная физика 57 (1994) 1029.
 [16] J.Felber, R.Gähler. In: F.De Martini, A.Zeilinger (Eds.) Quantum Interferometry, World Scientific, Singapore, 1993. (in press)
 [17] A.G.Klein, G.I.Opat and W.A.Hamilton. Phys.Rev.Lett., 50 (1983) 563.
 [18] H.J.Bernstein and F.E.Low. Phys.Rev.Lett., 59 (1987) 951.

- [19] R.Golub and S.K.Lamoreux. Phys.Lett.A, 162 (1992) 122.
- [20] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [21] Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика, часть 1. М.: Наука, 1976.
- [22] Proceedings of the conference "Fundamental Problems in Quantum Theory", Baltimore, June 18-22. To be publ. in: Annals New York Academy Science.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 ноября 1994 года.