

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P4-94-406

И.В.Амирханов, Т.З.Насыров\*, В.Н.Первушин,  
Н.А.Сариков

СПЕКТР МАСС И КОНСТАНТЫ ЛЕПТОННЫХ  
РАСПАДОВ ПСЕВДОСКАЛЯРНЫХ МЕЗОНОВ  
И ИХ РАДИАЛЬНЫХ ВОЗБУЖДЕНИЙ  
В КХД-МОТИВИРОВАННОЙ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ  
МОДЕЛИ С ГАРМОНИЧЕСКИМ ОСЦИЛЛЯТОРОМ

Направлено в журнал «Ядерная физика»

---

\*Институт ядерной физики АН РУз, Ташкент

Амирханов И.В. и др.

Спектр масс и константы лептонных распадов псевдоскалярных мезонов и их радиальных возбуждений в КХД-мотивированной потенциальной модели с гармоническим осциллятором

В рамках КХД-мотивированной потенциальной модели вычислены массы и константы лептонных распадов псевдоскалярных мезонов. Модель основана на эффективном гамильтониане КХД в кулоновской калибровке, проинтегрированном по глюонным полям с функцией Грина, которая заменена потенциалом «мгновенного» взаимодействия, запрещающего цветные состояния. Описание мезонов в данной модели осуществляется с помощью уравнений Швингера — Дайсона и Бете — Салпитера с определенным феноменологическим выбором потенциала и метода перенормировки. Получены численные решения этих уравнений в приближении гармонического осцилляторного потенциала с использованием различных методов перенормировки уравнения Швингера — Дайсона. Показано, что применение метода перенормировки, удовлетворяющей физическим граничным условиям, позволяет на качественном уровне описать спектр масс и констант распадов мезонов и их радиально возбужденных состояний.

Работа выполнена в Лаборатории теоретической физики им. Н.Н.Боголюбова ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

Amirkhanov I.V. et al.

P4-94-406

The Mass Spectrum and Decay Constants of Leptonic Decays of Pseudoscalar Mesons and Their Radial Excitation Within QCD-Motivated Potential Model with Harmonic Oscillator

Within QCD-motivated potential-model, the masses and decay constants of pseudoscalar mesons are calculated. The model is based on the effective QCD Hamiltonian in Coulomb's gauge, integrated over gluon fields with Green function replaced by the «instant's» interaction potential, which forbids color states. The description of mesons in this model is realized with the use of Schwinger — Dyson and Bethe — Salpeter equations with certain phenomenological choice of the potential and renormalization method. Solutions of these equations are obtained in the hadronic oscillators potential approximation with the use of different methods of Schwinger — Dyson equation renormalization. It is shown, that the use of special modification of this renormalization, satisfying physical boundary conditions, allows us to describe the mass spectrum and decay constant of mesons and their radial excited states.

The investigation has been performed at the Bogoliubov Laboratory of Theoretical Physics, JINR.

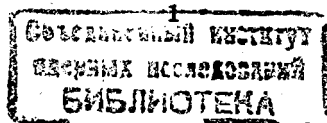
Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994

## 1. Введение

Кварковые потенциальные модели являются основным инструментом исследования спектроскопии тяжелых кваркониев. Эти модели используют нерелятивистское уравнение Шредингера с эффективным потенциалом, состоящим из кулоновского и растущего потенциалов. Прямое применение этой модели к связанным состояниям легких кварков не обоснованно, так как в этой области существенным становятся релятивистские эффекты и такие нелинейные явления, как конфайнмент и спонтанное нарушение киральной симметрий. Механизм таких явлений в квантовой хромодинамике (КХД) еще не известен. Поэтому в попытках применения кварковой потенциальной модели к легким адронам вместо этих механизмов используются различные предположения.

Описание спонтанного нарушения киральной симметрии и спектра масс легких мезонов в рамках КХД - мотивированной потенциальной модели было предложено в работах [1]. Модель основана на эффективном гамильтониане КХД в кулоновской калибровке, который содержит четырехкварковое взаимодействие, возникающее в результате интегрирования эффективного действия по глюонным полям. В этой модели конфайнмент принимается как аксиома, запрещающая взаимодействия с явным изменением цвета кварков. Спонтанное нарушение киральной симметрии, являющееся чисто релятивистским эффектом, описывается средним значением оператора собственной энергии кварка относительно непертурбативного вакуума, которое получается путем решения уравнения Швингера - Дайсона (ШД) с эффективным потенциалом. Спектр мезонов и голдстоуновская мода, обусловленная спонтанным нарушением киральной симметрии, описываются решениями уравнения Бете - Салпитера (БС), полученного из эффективного гамильтониана в "лестничном" приближении. В пределе тяжелых кварков система уравнений ШД и БС переходит в уравнение Шредингера.

При рассмотрении легких кварков и их связанных состояний в КХД - мотивированной потенциальной модели центральным вопросом является определение формы растущего потенциала. В работах [1-3] в качестве такого потенциала предложено использовать те же потенциалы, что и в спектроскопии тяжелых кваркониев. Однако в такой постановке задачи возникают две проблемы: устранение расходимостей уравнения Ш-Д, возникающих для широкого класса "реальных" потенциалов, и учет нелинейных эффектов (конфайнмента), которые становятся более существенными в области легких кварков,



чем тяжелых. В литературе [1-3] для решения проблемы устранения расходимостей применяют хорошо известный (пертурбативный) метод перенормировки, который, однако, не обеспечивает самосогласованной перенормировки уравнения ШД для конститuentного кварка.

В работе [4] предложено вместо пертурбативной перенормировки использовать модификацию уравнения ШД путем вычитания из подынтегральных функций уравнения регулирующих функций. Регуляризация необходима не только для устранения расходимостей, но и для обеспечения выполнения заданных из физических соображений граничных условий краевой задачи для системы уравнений ШД и БС. Решения такой краевой задачи в работе [4] получены на примере потенциала Гаусса. Показано, что в отличие от пертурбативной перенормировки, модификация уравнения ШД позволяет воспроизвести экспериментальное значение константы лептонного распада пиона ( $f_\pi$ ). Однако потенциал Гаусса не дает удовлетворительного описания спектра масс и констант распадов других мезонов.

Другим простым приближенным потенциалом, используемым в литературе [2] для описания спонтанного нарушения киральной симметрии и спектра масс легких мезонов, является гармонический осцилляторный потенциал. Этот потенциал так же, как потенциал Гаусса в уравнении ШД не приводит к расходимостям и описывает более широкий спектр мезонов, чем потенциал Гаусса [4].

В настоящей работе будут получены решения краевой задачи для модифицированного уравнения ШД с осцилляторным потенциалом и уравнения БС для псевдоскалярных мезонов и их радиальных возбуждений. Модификация будет производиться простейшим способом, а именно путем введения в уравнение функции вычитания, содержащей новый параметр. Решения краевой задачи будут получены с помощью численных методов.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 сформулирована краевая задача для модифицированного уравнения ШД с осцилляторным потенциалом. В разделе 3 дано уравнение БС для псевдоскалярных мезонов как связанных состояний пары кварк-антикварк в поле осцилляторного потенциала. В разделе 4 приведены решения краевых задач для уравнений ШД и БС, полученные с помощью численных методов.

## 2. Краевая задача для уравнения Швингера-Дайсона

Уравнение ШД для произвольного потенциала можно представить в следующем виде [5,6]:

$$\begin{aligned} E(p) \sin \varphi(p) &= m_0 + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p-q|) \sin \varphi(q), \\ E(p) \cos \varphi(p) &= p + \frac{1}{2} \int \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} V(|p-q|) \xi \cos \varphi(q), \end{aligned} \quad (1)$$

где интегрирование ведется в трехмерном пространстве координат импульса  $q$ ,  $\xi = \hat{p}\hat{q}$ ,  $\hat{p} = p/|p|$ ,  $m_0$  — масса кварка. Это уравнение решается относительно функции  $\varphi(p)$  и энергии кварка  $E(p)$  как функции, зависящие только от  $p = |p|$ .

После интегрирования по углам  $d\Omega_q$  уравнение (1) принимает вид

$$\begin{aligned} E(p) \sin \varphi(p) &= m_0 + \frac{1}{2} I_1(p), \\ E(p) \cos \varphi(p) &= p + \frac{1}{2} I_2(p), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned} I_1(p) &= \int dq V_1(p, q) \sin \varphi(q), \\ I_2(p) &= \int dq V_2(p, q) \cos \varphi(q), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V_1(p, q) &= \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int d\Omega_q V(|p-q|), \\ V_2(p, q) &= \frac{q^2}{(2\pi)^3} \int d\Omega_q V(|p-q|) \xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Для решения уравнения (2) удобно привести его к следующему виду:

$$2m_0 \cos \varphi(p) - 2p \sin \varphi(p) + I_1(p) \cos \varphi(p) - I_2(p) \sin \varphi(p) = 0, \quad (5)$$

$$E(p) = \left( m_0 + \frac{1}{2} I_1(p) \right) \sin \varphi(p) + \left( p + \frac{1}{2} I_2(p) \right) \cos \varphi(p). \quad (6)$$

Решение уравнения (5) зависит от явного вида потенциала и граничных условий. Для широкого класса потенциалов, используемых в спектроскопии адронов, интегралы  $I_1$  и  $I_2$  в асимптотике малых и больших импульсов имеют расходимости. Для устранения этих расходимостей в ряде работ [1-3] была применена процедура перенормировки, используемая в теории возмущений. Инфракрасные расходимости обычно устраняются путем переопределения физического значения энергии кварка, которая является ненаблюдаемой величиной. Суть перенормировки в ультрафиолетовой области заключается

в том, что в уравнение вводятся величины  $Z_m$  и  $Z$ , которые в пределе бесконечно больших значений импульса кварка ( $p \rightarrow \infty$ ) сокращают расходящиеся члены интегралов  $I_1$  и  $I_2$ . Тогда регуляризованное уравнение записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(p) \sin \varphi(p) &= m_0(1 - Z_m) + \int_0^\infty dq V_1(p, q) \sin \varphi(q), \\ E(p) \cos \varphi(p) &= p(1 - Z) + \int_0^\infty dq V_2(p, q) \cos \varphi(q), \end{aligned} \quad (7)$$

В литературе известны различные способы определения  $Z_m$  и  $Z$ . Эти подходы основаны на условии превращения решения в свободное в пределе  $p \rightarrow \infty$ . Однако в случае, когда кварк является составляющей связанного состояния, нельзя прямо применить процедуру перенормировки, используемую в теории возмущений. Поэтому выбор величин  $Z_m$  и  $Z$  должен быть более общим, чем в теории возмущений.

В работе [4] предложено рассмотреть модифицированное уравнение ШД, в котором из подынтегральных функций в  $I_1$  и  $I_2$  вычитаются функции, не нарушающие физические граничные условия. В указанной работе получены численные решения уравнения ШД с потенциалом в виде функции Гаусса для различных схем вычитания. Показано, что в схеме пренебрежения вкладом интеграла  $I_2$  в уравнении (2) удастся получить значения для массы и константы лептонного распада пиона, удовлетворяющие экспериментальным данным.

В настоящей работе модификация уравнения ШД будет производиться в случае, когда потенциал имеет вид гармонического осциллятора

$$V(|p - q|) = \frac{4}{3} V_0 (2\pi)^3 \delta(|p - q|) \Delta q, \quad (8)$$

где  $V_0$  — постоянная потенциала.

Для получения модифицированного уравнения ШД перепишем уравнение (7) в следующем эквивалентном виде:

$$\begin{aligned} E(p) \sin \varphi(p) &= m_0(1 - Z_m(p)) + \int_0^\infty dq V_1(p, q) f_1(q), \\ &+ \int_0^\infty dq V_1(p, q) (\sin \varphi(q) - f_1(q)) \\ E(p) \cos \varphi(p) &= p(1 - Z(p)) + \int_0^\infty dq V_2(p, q) f_2(q) \\ &+ \int_0^\infty dq V_2(p, q) (\cos \varphi(q) - f_2(q)), \end{aligned} \quad (9)$$

где  $f_1$  и  $f_2$  — произвольные функции.

Если функции  $f_1$  и  $f_2$  выбрать как

$$\begin{aligned} Z_m(p) &= \frac{1}{m_0} \int_0^\infty dq V_1(p, q) f_1(q), \\ Z(p) &= \frac{1}{p} \int_0^\infty dq V_2(p, q) f_2(q), \end{aligned}$$

то уравнение (8) принимает вид

$$\begin{aligned} E(p) \sin \varphi(p) &= m_0 + \int_0^\infty dq V_1(p, q) (\sin \varphi(q) - f_1(q)), \\ E(p) \cos \varphi(p) &= p + \int_0^\infty dq V_2(p, q) (\cos \varphi(q) - f_2(q)). \end{aligned} \quad (10)$$

Полученное уравнение формально совпадает с перенормированным уравнением, рассмотренным в литературе [1-3], где различным определениям  $Z_m$  и  $Z$  соответствует различный выбор функций  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$ .

Сначала рассмотрим случай без перенормировки

$$\text{Вариант I)} f_1(q) = 0, \quad f_2(q) = 0. \quad (11)$$

Тогда имеем следующую краевую задачу

$$\varphi''(p) + \frac{2}{p} \varphi'(p) - 2p \sin \varphi(p) + \frac{\sin 2\varphi(p)}{p^2} + 2m_0 \cos \varphi(p) = 0, \quad (12)$$

где граничные условия имеют вид

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \varphi(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{m_0}{\sqrt{p^2 + m_0^2}}. \quad (13)$$

Численные решения такой задачи были получены в работе [5].

Рассмотрим способ модификации, который был использован в работе [4] для случая потенциала Гаусса, т.е.

$$\text{Вариант II)} f_1(q) = 0, \quad f_2(q) = \cos \varphi(q). \quad (14)$$

Вводя обозначение

$$\sin \varphi(p) = \Psi(p),$$

уравнение (9) представим в виде

$$\Psi''(p) + \frac{2}{p} \Psi'(p) + 2m_0 - 2p \frac{\Psi(p)}{\sqrt{1 - \Psi^2(p)}} = 0. \quad (15)$$

Граничные условия (13) для функции  $\Psi(p)$  принимают вид

$$\Psi(0) = 1, \quad \Psi(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{m_0}{\sqrt{p^2 + m_0^2}}; \quad (16)$$



Следующая схема вычитания, рассмотренная в [4], состоит в замене второй вычитаемой функции асимптотикой функции, которая соответствует свободному решению уравнения

$$\text{Вариант III)} f_1(q) = 0, \quad f_2(q) = \frac{q}{\sqrt{m_0^2 + q^2}}. \quad (17)$$

Тогда (9) принимает вид

$$\varphi'' + \frac{2}{p}\varphi'(p) - 2p\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{p^2} + 2m_0\cos\varphi + I_{22}(p)\varphi(p) = 0, \quad (18)$$

где

$$I_{22} = \frac{p}{\sqrt{p^2 + m_0^2}} \left[ \frac{5m_0^2 + 2p^2}{(p^2 + m_0^2)^2} \right]. \quad (19)$$

В работе [4] рассмотрен также случай, когда функции  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  соответствуют свободным решениям. Для осцилляторного потенциала это соответствует выбору

$$\text{Вариант IV)} f_1(q) = \frac{m_0}{\sqrt{m_0^2 + q^2}}, \quad f_2(q) = \frac{q}{\sqrt{m_0^2 + q^2}}. \quad (20)$$

Тогда будем иметь

$$\varphi'' + \frac{2}{p}\varphi'(p) - 2p\sin\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{p^2} + 2m_0\cos\varphi + I_{11}(p)\cos(p) + I_{22}(p)\sin(p) = 0, \quad (21)$$

$$I_{11} = -\frac{m_0^2 + 2m_0^3}{(p^2 + m_0^2)^{\frac{5}{2}}}. \quad (22)$$

Решения вышеуказанных краевых задач зависят от внешних параметров, которыми являются "токовая" масса кварка ( $m_0$ ) и постоянная потенциала ( $V_0$ ). Эти параметры фиксируются путем сравнения решения уравнения БС на собственные значения с экспериментальными значениями масс мезонов.

Численные решения краевых задач для уравнения ШД, а также для энергии кварка  $E(p)$  и массовой функции, определенной как

$$m(p) = E(p)\sin\varphi(p), \quad (23)$$

в случаях выбора вычитаемых функций по схемам (14), (17) и (20) для различных масс токового кварка изображены на рисунках 1-9.

Теперь рассмотрим схему вычитания, в которой сначала задается не явный вид вычитаемых функций, а интегралы от этих функций с ядром исходного уравнения. Для рассмотрения такого способа регуляризации уравнение (9) удобно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} E(p)\sin\varphi(p) &= m_0 + I_1(p) - I_{11}(p), \\ E(p)\cos\varphi(p) &= p + I_2(p) - I_{22}(p), \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$\begin{aligned} I_{11}(p) &= \int_0^\infty dq V_1(p, q) f_1(q), \\ I_{22}(p) &= \int_0^\infty dq V_2(p, q) f_2(q). \end{aligned} \quad (25)$$

Функции  $f_1(p)$  и  $f_2(p)$  определяются путем решения системы уравнений (25) при заданных контрчленах  $I_{11}(p)$  и  $I_{22}(p)$ , построенных из физических соображений.

Можно рассматривать множество различных функций  $I_{11}(p)$  и  $I_{22}(p)$ . Для простоты выберем эти функции в следующем виде:

$$I_{11}(p) = 0 \quad (\text{т.е. } f_1 = 0), \quad I_{22}(p) = p \exp(-\sigma p), \quad (26)$$

где  $\sigma$  - свободный параметр.

Параметр  $\sigma$  и другие внешние параметры задачи (включая "токовую" массу кварка и постоянную потенциала) фиксируются путем фитирования решений системы уравнений ШД и БС к экспериментальным данным.

На рис. 10 и 11 представлено поведение интегралов  $I_1(p)$  и  $I_2(p)$ , в неперенормированном (11) и модифицированном (24) случаях. Из рисунков видно, что модификация (24) как бы "срезает" инфракрасную область. Это более наглядно видно на рисунке (12), где изображена функция

$$Z(p) = \frac{E(p)\cos\varphi(p)}{p}.$$

Имея эти решения, можно решить уравнение БС.

### 3. Уравнение Бете-Салпитера

Для псевдоскалярных мезонов уравнение БС в случае осцилляторного потенциала (10) имеет вид [6]

$$\begin{aligned} U_1'' + W_1 U_1 + M U_2 &= 0, \\ U_2'' + W_2 U_2 + M U_1 &= 0. \end{aligned} \quad (27)$$

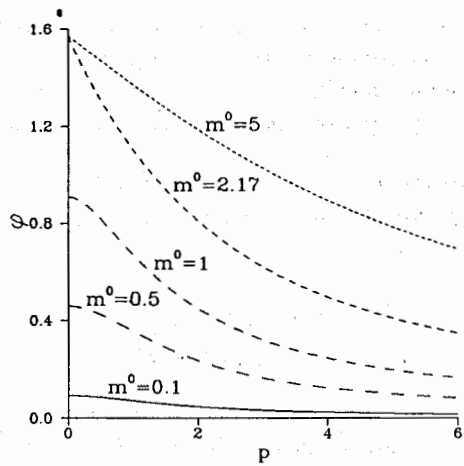


Рис. 1. Решения уравнения ШД при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1; 2, 17; 5$ , для варианта (14).

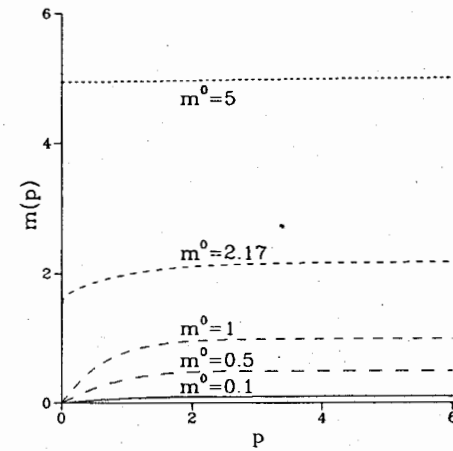


Рис. 3. Массовая функция при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1; 2, 17; 5$ , для варианта (14).

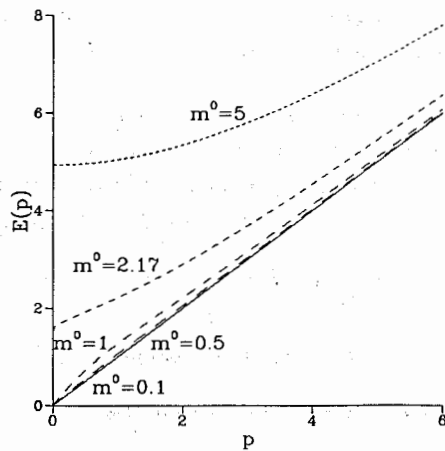


Рис. 2. Энергия кварка при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1; 2, 17; 5$ , для варианта (14).

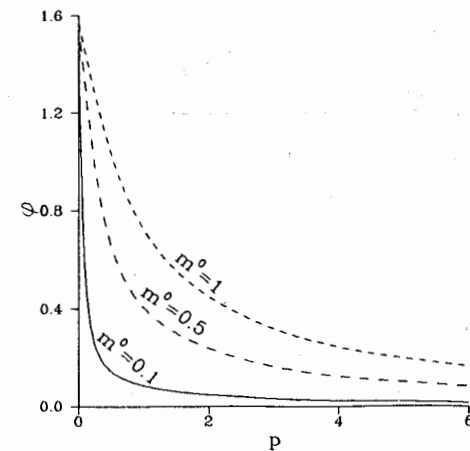


Рис. 4. Решения уравнения ШД при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1; 2, 17; 5$ , для варианта (17).

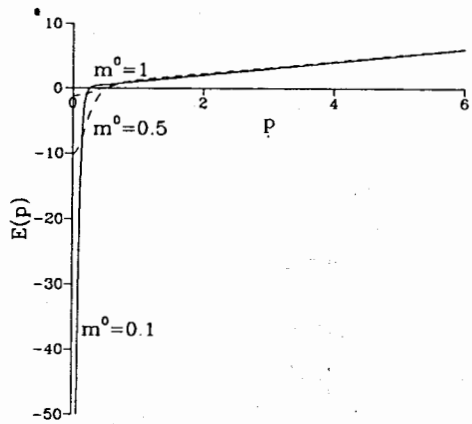


Рис. 5. Энергия кварка при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1$ , для варианта (17).

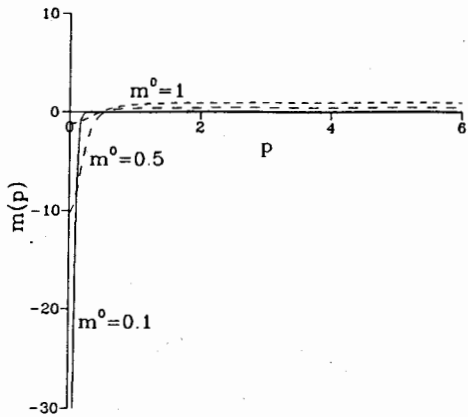


Рис. 6. Массовая функция при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1$ , для варианта (17).

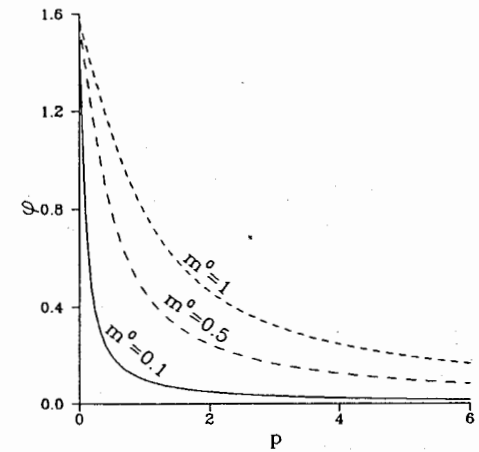


Рис. 7. Решения уравнения ШД при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1$ , для варианта (20).

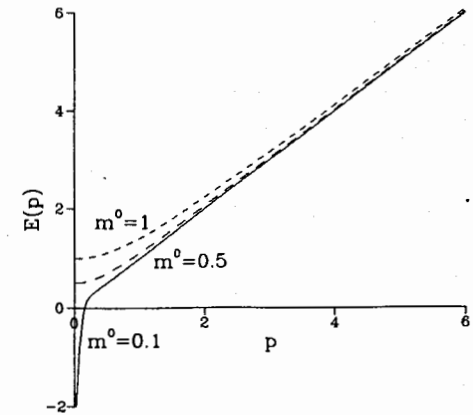


Рис. 8. Энергия кварка при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1$ , для варианта (20).



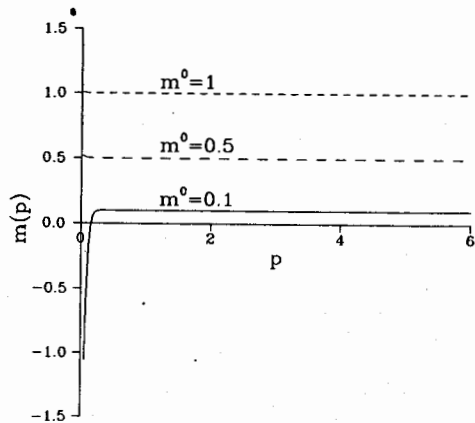


Рис. 9. Массовая функция при массах кварка  $m_0/\hat{V}_0 = 0, 1; 0, 5; 1$ , для варианта (20).

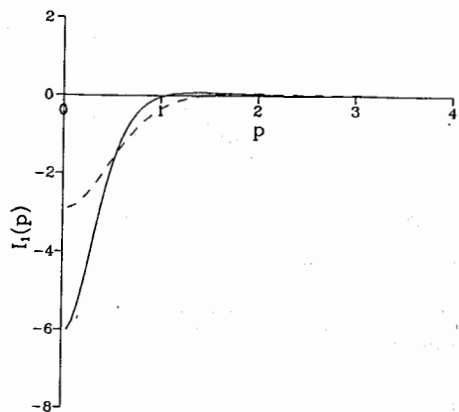


Рис. 10. Вид функции  $I_1(p)$  при массе кварка  $m_0 = 0.0044$  в неперенормированном (11) (сплошная линия) и перенормированном по (26) (пунктирная линия) виде.

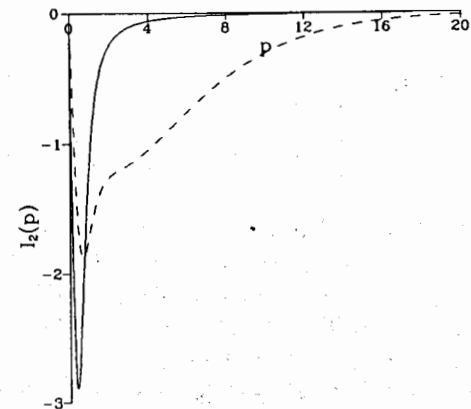


Рис. 11. Вид функции  $I_2(p)$  при массе кварка  $m_0 = 0.0044$  в неперенормированном (11) (сплошная линия) и перенормированном по (26) (пунктирная линия) случаях.

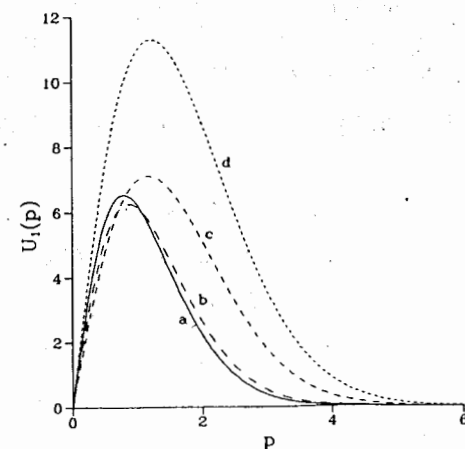


Рис. 12. Решения уравнения БС для функции  $U_1(p)$ : а) для  $\pi$ -мезона; б) для  $K$ -мезона; с) для  $D$ -мезона и д) для  $B$ -мезона (основное состояние).

Здесь

$$W_1 = - \left\{ E_t + \frac{1}{4} (\varphi'_1 - \varphi'_2)^2 + \frac{2}{p^2} \sin^2 \left( \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right\},$$

$$W_2 = - \left\{ E_t + \frac{1}{4} (\varphi'_1 + \varphi'_2)^2 + \frac{2}{p^2} \cos^2 \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \right\},$$

$U_1$  и  $U_2$  – собственные функции, а  $M$  – собственное значение уравнения, которые отождествляются волновой функцией и массой свободного мезона.  $E_t = E_1 + E_2$  – полная энергия системы кварка (1) и антикварка (2), составляющих связанное состояние,  $\varphi_1, \varphi_2$  – решения уравнения ШД для кварка и антикварка.

Система уравнений (29) удовлетворяет следующим граничными условиями:

$$U_i(0) = U_i(\infty) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (28)$$

Условие нормировки было получено в работе [6] и имеет вид

$$\frac{4N_c}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dp U_1(p) U_2(p) = 1. \quad (29)$$

где  $N_c = 3$  (число цветовых степеней свободы кварка).

Для решения задачи (28)-(30) нужно фиксировать значения внешних параметров. Значения параметров  $m_0, V_0$  и  $\sigma$  были определены путем фитирования собственных значений уравнения БС к экспериментальным значениям масс  $\pi-, K-, D-, B-$  мезонов.

$$\hat{V}_0 = 521 \text{ МэВ}; \quad \sigma = 0.35(\hat{V}_0) = 182(\text{МэВ})^{-1};$$

$$m_{ud} = m_{du} = 0.0044(\hat{V}_0) = 2.3 \text{ МэВ};$$

$$m_{s0} = 0.1225(\hat{V}_0) = 64 \text{ МэВ};$$

$$m_{c0} = 2.26(\hat{V}_0) = 1177 \text{ МэВ};$$

$$m_{b0} = 8.84(\hat{V}_0) = 4606 \text{ МэВ};$$

где

$$\hat{V}_0 = \left(4 \frac{\hat{V}_0}{3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Решения уравнения БС для  $\pi-, K-, D-, B-$  мезонов изображены на рисунках 12 и 13. Уравнение БС имеет также узловые решения, которые отождествляются с волновыми функциями радиально

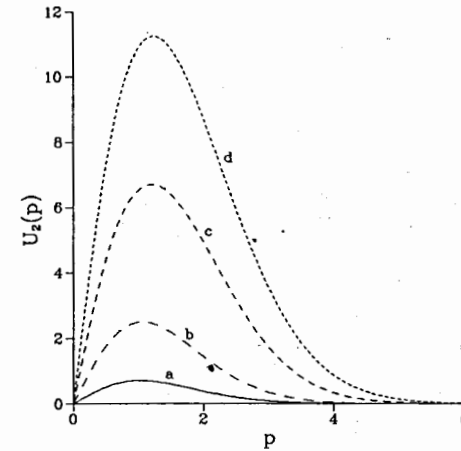


Рис. 13. Решения уравнения БС для функции  $U_2(p)$ : а) для  $\pi$ -мезона; б) для  $K$ -мезона; в) для  $D$ -мезона и д) для  $B$ -мезона (основное состояние).

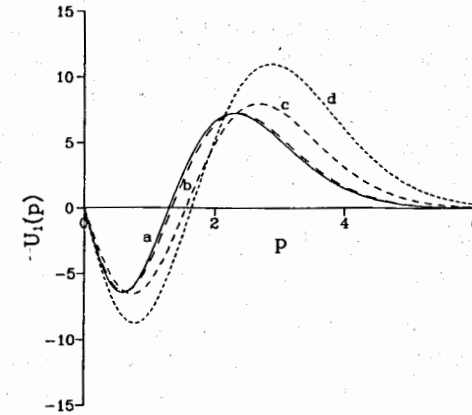


Рис. 14. Решения уравнения БС для функции  $U_1(p)$ : а) для  $\pi$ -мезона; б) для  $K$ -мезона; в) для  $D$ -мезона и д) для  $B$ -мезона (1-е радиально возбужденное состояние).

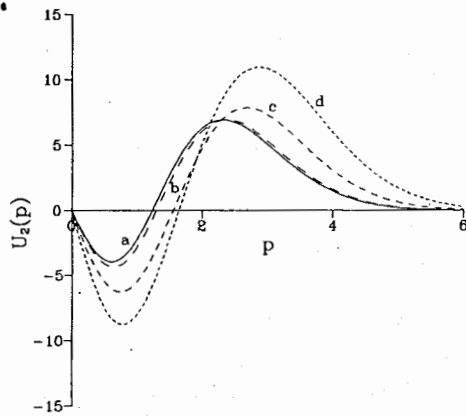


Рис. 15. Решения уравнения БС для функции  $U_2(p)$ : а) для  $\pi$ -мезона; б) для  $K$ -мезона; в) для  $D$ -мезона и д) для  $B$ -мезона. (1-е радиально возбужденное состояние).

возбужденных состояний мезонов (рис.14) и (рис.15). Следует отметить, что решения этих состояний не содержат дополнительных свободных параметров, а определяются теми же параметрами, которые входят в решения для основных состояний мезонов.

Константы лептонных распадов для основных и радиально возбужденных состояний псевдоскалярных мезонов определяются следующей формулой [5]:

$$F_M = \frac{4N_c}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{4\pi} \int_0^\infty dp U_2(p) \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \quad (30)$$

Собственные значения уравнения, полученные с помощью численных методов, и константы лептонных распадов мезонов и их радиально возбужденных состояний приведены в таблицах 1-3.

#### 4. Численные результаты и заключение

Решения модифицированного уравнения ШД с различными схемами вычитания и уравнения БС получены с помощью численного метода НАМН [7]. Результаты для функций  $\varphi(p)$ ,  $E(p)$  и  $m(p)$  для различных вариантов графически изображены на рисунках 1-9. Точность полученного разностного решения исследована путем расчетов на последовательности сгущающихся сеток. Проводя численные эксперименты на трех сгущающихся сетках, мы убедились в сходимости

разностных решений. Результаты вычислений по каждому из вариантов в приближении равенства масс ( $m_1^0 = m_2^0$ ) кварка и антикварка (справедливого для  $\pi$ - мезонов и их радиальных возбуждений) отражены в таблице 1. Из таблицы видно, что в отличие от работы [4] как в случае  $I_2 = 0$ , так и в остальных трех вариантах выбора вычитаемых функций невозможно получить близкое к эксперименту значение для отношения

$$\frac{M_\pi}{f_\pi} = 1. \quad (31)$$

Этот результат показывает, что схема вычитания, пренебрегающая вкладом интеграла  $I_2$  в уравнении ШД, не является общей и пригодна только для потенциала Гаусса. Однако следует заметить, что решения уравнения БС с потенциалом Гаусса при такой регуляризации для массы радиально возбужденного состояния  $\pi$ - мезона приводит к сильно заниженному значению [4]. Качественное воспроизведение экспериментальных данных [8] по массам и констант лептонных распадов удастся в схеме (26). Возможно, что путем подбора вычитаемой функции достигается лучшее согласие с экспериментальными данными.

Полученные решения уравнений ШД и БС с модификацией ((24),(26)) могут быть применены в практике для оценки вероятностей различных процессов с участием мезонов и их радиальных возбуждений.

Поэтому большой интерес представляет исследование уравнения ШД с точки зрения обоснования модификации (24) или поиска соответствующего эффективного потенциала.

Авторы благодарны Кураеву Э.А., Пузынину И.В за обсуждение результатов, а также Зайцеву А.М. который указал на новые экспериментальные результаты [9] по определению массы первого радиального возбуждения мезона, более согласующиеся с нашими вычислениями, чем общепринятое значение [8].

Таблица 1. Результаты численного решения уравнения БС и значения для массы пиона ( $M_\pi$ ), константы лептонного распада ( $f_\pi$ ) и отношения (32) при различных вариантах выбора функций вычитания

варианты	$m^0/\hat{V}_0$	$M_\pi/\hat{V}_0$	$f_\pi/\hat{V}_0$	$M_\pi/f_\pi$	$\hat{V}_0$	$m_0(\text{МэВ})$	$f_\pi(\text{МэВ})$
I	0.007	0.473	0.113	4.05	289	2.023	34
	0.00078	0.120	0.114	1.05	1151	0.898	131
II	0.007	4.595	0.003	1387	30	0.21	0.099
	1	4.846	0.411	11.79	28	28	11
	2	5.926	0.603	9.83	23	46	14
	3	7.587	0.684	11.10	18	54	12
III	0.007	4.567	0.003	1385	30	0.21	0.099
	1	4.816	0.406	11.11	29	29	12
	2	5.884	0.601	9.78	23	46	14
	3	7.587	0.684	11.10	18	54	12
IV	0.007	4.569	0.003	1342	30	0.21	0.102
	1	4.946	0.443	11.16	28	28	12
	2	6.163	0.627	9.82	22	44	14
	3	7.765	0.700	11.09	18	54	13

Таблица 2. Значения масс псевдоскалярных мезонов и их радиально возбужденных состояний (в МэВ)

Мезоны	Основное состояние		1-ое рад. возб. сост.		2-ое рад. возб. сост.	
	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.
$\pi$	<u>138</u>	138	2093	1800	3370	1770
$K$	<u>493</u>	493	2254	1900	3412	1830
$D$	<u>1869</u>	1869	3030		4118	
$B$	<u>5270</u>	5278	6283		7200	

Таблица 3. Значения констант лептонных распадов псевдоскалярных мезонов и их радиально возбужденных состояний (в МэВ)

Константы лептонного распада	Для осн. состояния		Для 1-го рад. возб. сост.		Для 2-го рад. возб. сост.	
	теор.	эксп.	теор.	эксп.	теор.	эксп.
$f_\pi$	131	132	1.6		1	
$f_K$	168	166	22		13	
$f_D$	337	<310	232		179	
$f_B$	268		299		302	

## Литература

- [1] J.R.Finger and J.E.Mandula. Nucl.Phys. B199(1982) 168; S.L.Adler and A.C.Davis. Nucl.Phys. B244(1984) 469.
- [2] A.Le Yaouanc, L.Oliver, P.Pene and J.-C.Raynal. Phys.Rev. 31D(1985) 137.
- [3] R.Alkofer and P.A.Amundsen.Nucl.Phys.B306(1988)305; A.Trzuper. Acta Phys. Polonica,B20(1989)93; Pedro J. de A.Bicudo and Jose E.F.T.Riberio. Phys. Ref. D42(1990)1611.
- [4] И.В.Амирханов и др. Препринт ОИЯИ, P11-94-74, Дубна,1994.
- [5] I.V.Amirkhanov et.al. JINR Preprint, E11-91-103, Dubna, 1991; И.В.Амирханов и др. Сообщения ОИЯИ, P11-91-111, Дубна, 1991; Амирханов И.В., Насыров Т.З., Сариков Н.А., Сообщения ОИЯИ, P11-93-173, Дубна, 1993.
- [6] V.N.Pervushin, Yu.L.Kalinovsky, W.Kallis and N.A.Sarikov. Fortsch Phys. 38(1990)333.
- [7] Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, т.4, N1, с.127. Жанлав Т., Пузынин И.В. ЖВМиМФ, 1992, т.36, N6, с. 846.

- [8] Review Particle Properties. Phys. Rev. D, v45, n11, part II(1992)  
p.VII.1
- [9] D.V.Amelin et al, Study of resonance production in  $\pi^- N$  diffractive reactions at  $P_{\pi^-} = 37 \text{ GeV}/c$ . Proceed "Hadron -93 " Como .Italy, pp. 1-6, 1993.

Рукопись поступила в издательский отдел  
19 октября 1994 года.