

9319

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



Г-202

93/11-76

P4 - 9319

641/2-76

Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров, И.В.Пузынин,  
Р.М.Ямалеев

УЧЕТ ПРИНЦИПА ПАУЛИ  
В РАСЧЕТАХ ФОРМФАКТОРОВ РЕАКЦИЙ  
ОДНОУКЛОННЫХ ПЕРЕДАЧ  
НА СФЕРИЧЕСКИХ ЯДРАХ

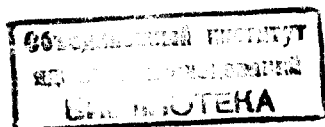
**1975**

P4 - 9319

Ф.А.Гареев, С.А.Гончаров, И.В.Пузынин,  
Р.М.Ямалеев

УЧЕТ ПРИНЦИПА ПАУЛИ  
В РАСЧЕТАХ ФОРМФАКТОРОВ РЕАКЦИЙ  
ОДНОУКЛОННЫХ ПЕРЕДАЧ  
НА СФЕРИЧЕСКИХ ЯДРАХ

*Направлено в ЯФ*



## §1. Введение

В последнее время предложено немало методов вычисления формфакторов реакций однонуклонных передач на сферических ядрах /см.<sup>/1-9/</sup> и ссылки в них/. В работе<sup>/1/</sup> дан достаточно полный обзор этих методов. В этих работах, как правило, от точного /в рамках оболочечной модели/ уравнения для формфактора переходят к приближенному уравнению. Это позволяет обойти трудности, связанные с решением точного уравнения. До сих пор сделана только одна попытка решения точного уравнения путем диагонализации гамильтониана на оболочечном базисе с учетом непрерывного спектра<sup>/7/</sup>. Однако этот метод является весьма трудоемким, особенно в тех случаях, когда в непрерывном спектре имеются узкие одночастичные резонансы.

Как указывалось в ряде работ /см., напр.,<sup>/1,7,9/</sup> /, последовательное применение модели оболочек требует учета принципа Паули. При расчетах, использующих метод диагонализации на оболочечном базисе, этот факт автоматически учитывается тем, что в качестве базиса используются лишь волновые функции незаполненных оболочек. В других методах учет принципа Паули достигается введением оператора проектирования на подпространство незаполненных оболочек. В работе<sup>/9/</sup> получено приближенное уравнение, в котором таким образом учтен принцип Паули. Расчеты, проведенные для реакции  $^{42}\text{Ca}(p, d)^{41}\text{Ca}$ , показали, что в этом случае учет принципа Паули оказался важным.

Однако, как подчеркивалось в работе <sup>/9/</sup>, попытка последовательного вывода приближенных уравнений для формфактора показала, что нет уверенности в правильности асимптотики их решений. Только анализ на основе решений системы точных уравнений может внести ясность в этот вопрос. В настоящей работе предпринята попытка решения точных уравнений.

С помощью разложения волновой функции ядра В по каналовым функциям и с учетом принципа Паули получена система связанных интегро-дифференциальных уравнений для радиальных частей формфакторов. Эта система, совместно с граничными условиями, определяющимися требованием правильного асимптотического поведения формфактора, образует задачу на собственные значения. Для прямого численного решения этой задачи применяется модификация непрерывного аналога метода Ньютона /НАМН/. Проведены расчеты формфакторов и сечений для реакций (p,d) -подхвата на ядрах <sup>42</sup>Ca и <sup>58</sup>Ni с учетом и без учета принципа Паули. Для реакции на <sup>42</sup>Ca проведено сравнение с формфакторами, полученными в работе <sup>/9/</sup>, а также с помощью WDP -процедуры. Кроме того, проведены расчеты формфакторов для реакции (d,p) -срыва в первое возбужденное 0<sup>+</sup> -состояние ядер <sup>42</sup>Ca и <sup>58</sup>Ni.

## §2. Вывод уравнений для формфактора

Как уже говорилось во введении, мы изучаем формфакторы реакций подхвата /срыва/ В(p,d)A/A(d,p)B/ в предположении, что ядро А представляет собой дважды магический остов плюс нуклон, т.е. состояния ядра можно в хорошем приближении описать одночастичной моделью оболочек:

$$\Psi_A = \Psi_{n\ell_j}(\vec{\xi}) \cdot \phi_{A-1}(\rho),$$

где  $\Psi_{n\ell_j}$  - одночастичные волновые функции,  $\phi_{A-1}$  - волновая функция остова. В данной работе не принимаются

во внимание возбуждения остова, поэтому мы полагаем  $\Psi_A \equiv \Psi_{n\ell_j}$ .

Под термином "формфакторы реакции передач" мы будем понимать парциальные величины разложения интеграла перекрытия волновых функций начального  $\Psi_A(\vec{\xi})$  и конечного  $\Psi_B(\vec{\xi}, \vec{r})$  ядер по "состояниям" с определенным угловым моментом j и его проекцией m:

$$\int d\vec{\xi} \Psi_A(\vec{\xi}) \Psi_B(\vec{\xi}, \vec{r}) = \sum_{jm} (J_A j M_A m | J_B M_B) f_{jm}^{AB}(\vec{r}). \quad /1/$$

Из этой формулы ясно видно, что вся информация о структуре ядер А и В входит в амплитуду процесса через формфакторы  $f_{jm}^{AB}(\vec{r})$ .

Следуя оболочечному приближению и учитывая принцип Паули, уравнение для волновой функции  $\Psi_B$  записывается следующим образом <sup>/1/</sup>:

$$\begin{aligned} [H_A(\vec{\xi}) + T_{\vec{r}} + V_0(r) + V_{\text{ост}}(\vec{\xi}, \vec{r}) - E_B] \Psi_B(\vec{\xi}, \vec{r}) = \\ = \sum_{\alpha} \Phi_{\alpha}(\vec{r}) \int d\vec{\rho} \Phi_{\alpha}(\vec{\rho}) V_{\text{ост}}(\vec{\xi}, \vec{\rho}) \Psi_B(\vec{\xi}, \vec{\rho}). \end{aligned} \quad /2/$$

Здесь  $H_A(\vec{\xi})$  - гамильтониан ядра А,  $T_{\vec{r}}$  - оператор кинетической энергии,  $V_0(r)$  - потенциал среднего поля,  $V_{\text{ост}}(\vec{\xi}, \vec{r})$  - остаточные взаимодействия,  $\Phi_{\alpha}(\vec{r})$  - волновые функции заполненных состояний.

Далее волновая функция  $\Psi_B$  раскладывается по каналовым функциям:

$$\Psi_B(\vec{\xi}, \vec{r}) = \sum_k \{ \Psi_{A_k}(\vec{\xi}), f_j^{A_k B}(\vec{r}) \}_{J_B}. \quad /3/$$

Скобки  $\{ \}_{J_B}$  означают векторное сложение моментов. Умножив слева уравнение /2/ на выражение  $\{ \Psi_{A_q}(\vec{\xi}), Y_{j_1}(\vec{r}) \}^*$  и проинтегрировав по  $\vec{\xi}$  и  $\hat{r}$ , получаем систему связанных интегро-дифференциальных уравнений для радиальной части формфактора:

$$\frac{1}{r} [E_{A_q} - E_B - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{r^2} + V_0(r)] f_{\ell_1 j_1}^{A_q B}(r) =$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_k \iint d\vec{\xi} d\vec{r} \{ \Psi_{A_q}(\vec{\xi}), Y_{j_1}(\vec{r}) \}_{J_B}^* V_{\text{ост}}(\vec{\xi}, \vec{r}) \{ \Psi_{A_k}(\vec{\xi}), Y_j(\vec{r}) \}_{J_B} \frac{1}{r} f_{\ell_j}^{A_k B}(r) + \\
&+ \sum_k \sum_a \iiint d\rho d\vec{\xi} d\vec{r} \Phi_a(\vec{r}) \{ \Psi_{A_q}(\vec{\xi}), Y_{j_1}(\vec{r}) \}_{J_B}^* \Phi_a^*(\rho) V_{\text{ост}}(\vec{\xi}, \rho) \times \\
&\times \{ \Psi_{A_k}(\vec{\xi}), Y_j(\rho) \}_{J_B} \frac{1}{r} f_{\ell_j}^{A_k B}(\rho). \quad /4/
\end{aligned}$$

При выводе уравнения /4/ мы воспользовались тем, что  $\Psi_{A_k}$  являются собственными функциями  $H_{A'}$ , а также их ортогональностью.  $E_{A_k}$  - соответствующие им собственные значения. Радиальная часть формфактора выделяется следующим образом:

$$f_{jm}^{AB}(\vec{r}) = \frac{1}{r} f_{\ell_j}^{AB}(r) Y_{jm}(\hat{r}) \quad /5/$$

/  $\hat{r}$  - спин-угловые координаты.  $Y_{jm}(\hat{r})$  - спин-угловая функция/. В качестве волновых функций заполненных состояний  $\Phi_a$  и каналовых функций  $\Psi_{A_k}$  берутся одночастичные оболочечные функции. Выделив радиальную часть функций  $\Phi_a(\vec{r})$ , аналогично /5/, подставив  $\Phi_a(\vec{r})$  в уравнение /4/ и используя свойства спин-угловых функций, получаем систему уравнений для радиальных частей формфакторов в виде:

$$\begin{aligned}
&[ - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\ell_1(\ell_1+1)}{r^2} + V_0(r) + E_q - E_B ] f_{\ell_j j_1}^q(r) = \\
&= \sum_k W_{qk}(\ell_1 j_1, \ell_j j; r) f_{\ell_j}^k(r) + \sum_k \sum_{n_c} \chi_{n_c}^{\ell_1 j_1}(r) \times \\
&\times \int d\rho \chi_{n_c}^{\ell_1 j_1}(\rho) W_{qk}(\ell_1 j_1, \ell_j j; \rho) f_{\ell_j}^k(\rho), \quad /6/
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\text{где } W_{qk}(\ell_1 j_1, \ell_j j; r) \equiv \iint d\vec{\xi} d\vec{r} \{ \Psi_{j_1}(\vec{\xi}), Y_{j_1}(\vec{r}) \}_{J_B}^* V_{\text{ост}}(\vec{\xi}, \vec{r}) \{ \Psi_k(\vec{\xi}), \\
&Y_j(\vec{r}) \}_{J_B}.
\end{aligned}$$

Здесь мы несколько упростили обозначения, заменив  $A_q \rightarrow q$  и опустив индекс  $B$  у формфакторов.  $\chi_{n_c}^{\ell_1 j_1}(r)$  - радиальные части волновых функций заполненных состояний остова. Суммирование по  $n_c$  означает, что суммируются только члены с главными квантовыми числами, принадлежащими заполненным состояниям остова. Аналогичная система, но иным путем, получена в работах /7,10/

Систему /6/ дополним граничными условиями, вытекающими из требования правильного асимптотического поведения формфактора:

$$f^q(r=0) = 0$$

$$f^q(r \rightarrow \infty) \sim \exp\{ -\sqrt{2m|E_q - E_B|/\hbar^2} \times r \}. \quad /7/$$

Таким образом, мы получили задачу /6-7/ на собственные значения  $E_B$  и собственные функции  $f_{\ell_j}^q(r)$  для системы интегро-дифференциальных уравнений:

### §3. О методе решения

Запишем систему /6/ в более общем виде:

$$y_q''(r) + \{ K_{\text{ост}}(r) - \lambda \} y_q(r) + \sum_{k \neq q} K_{qk}(r) y_k(r) + \sum_k \int d\xi Q_{qk}(\xi, r) y_k(\xi) = 0. \quad /8/$$

Заметим, что при конкретной реализации алгоритма решения полубесконечный интервал  $0 \leq r < \infty$  заменяется отрезком  $[0, b]$ . Поэтому граничные условия /7/ мы перепишем в виде:

$$y_k(r=0) = 0$$

$$y_k'(r=b) + \sqrt{|\lambda - \frac{2mE_k}{\hbar^2}|} y_k(r=b) = 0. \quad /9/$$

Нетрудно видеть, что условия /9/ аппроксимируют собой условия /7/ на конечном отрезке.

Для решения задачи /8-9/ используется модификация НАМН. Подробно реализация указанной модификации и обоснованность ее применения изложена в работе /11/. Заметим только, что при подстановке получаемых решений  $\{\lambda, y_k\}$  в конечно-разностную аппроксимацию уравнения /8/ получается невязка по порядку величины  $10^{-6} - 10^{-7}$ . Точность полученного решения определяется шагом конечно-разностной сетки.

#### §4. Численные расчеты

Для реакций  $^{42}\text{Ca}(p, d)^{41}\text{Ca}$  и  $^{58}\text{Ni}(p, d)^{57}\text{Ni}$  рассчитаны формфакторы и сечения. Оболочечный потенциал взят в форме Саксона-Вудса со спин-орбитальным взаимодействием. Параметры потенциала такие же, как в работах /7,9/. Расчет одночастичных энергий и волновых функций проводился по методу прямого численного интегрирования. Остаточные взаимодействия использовались в простом гауссовом виде:

$$V_{\text{ост}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = v_0 \exp\{-|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2 / \sigma^2\}. \quad /10/$$

Параметры подбирались таким образом, чтобы получить экспериментальные значения энергии связи  $E_B$ .

$$\begin{aligned} ^{42}\text{Ca}: & \quad v_0 = -43,5 \text{ МэВ} & \quad \sigma = 1,5 \text{ Фм} \\ ^{58}\text{Ni}: & \quad v_0 = -47 \text{ МэВ} & \quad \sigma = 1,85 \text{ Фм} \end{aligned}$$

На рис. 1-3 представлены формфакторы, рассчитанные как с учетом /сплошная линия/, так и без учета принципа Паули /штриховая линия/. Заметим, что в последнем случае для радиальных частей формфакторов имеем систему /6/ без интегрального члена. Такая задача решается с помощью обычной процедуры НАМН. На рис. 1-2 также приведены формфакторы, вычисленные с помощью WDP - процедуры /пунктирная линия/ и формфакторы, полученные из приближенного уравнения с учетом принципа Паули в работе /9/ /штрих-пунктирная линия/. В табл. 1 приве-

Таблица 1  
Коэффициенты смешивания конфигураций /1 - с учетом, 2 - без учета принципа Паули/

		$(2p_{1/2})^2$	$(2p_{3/2})^2$	$(1f_{5/2})^2$	$(1f_{7/2})^2$
$^{42}\text{Ca}$	1	0.039	0.098	0.078	0.991
	2	0.044	0.100	0.077	0.991
$^{58}\text{Ni}$	1	0.137	0.975	0.166	-
	2	0.131	0.978	0.163	-

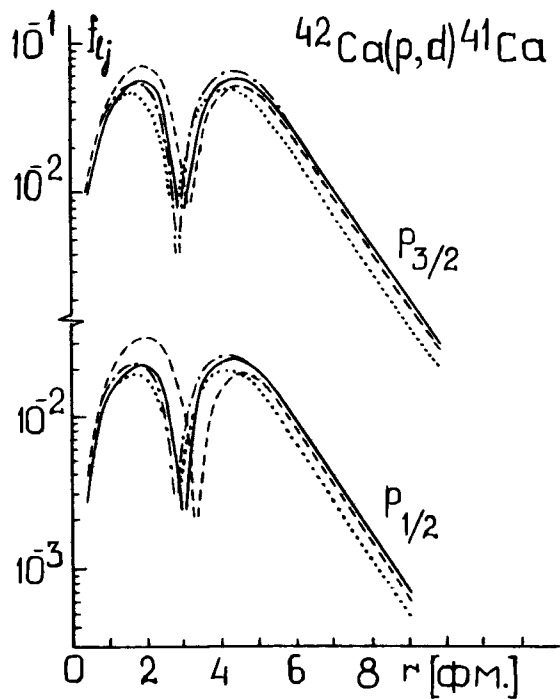


Рис. 1. Формфакторы  $f_{p1/2}$  и  $f_{p3/2}$  для реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$ . — с учетом принципа Паули, - - - без учета принципа Паули, ..... в приближении WDP, - · - · - решение приближенного уравнения <sup>19/</sup>.

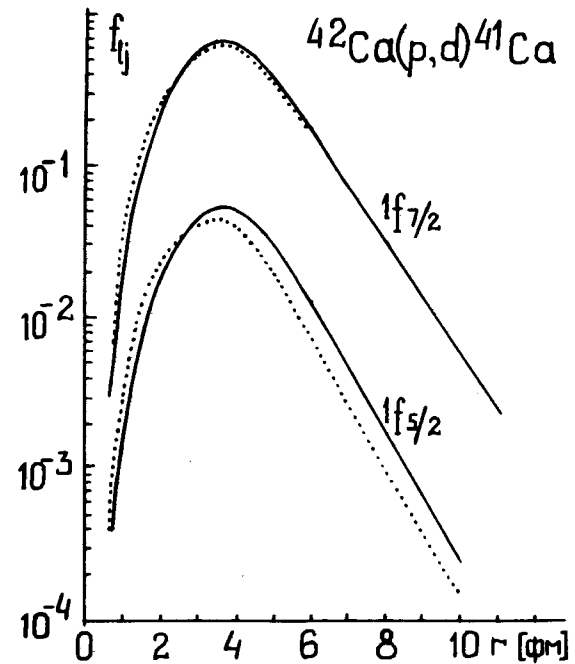


Рис. 2. Формфакторы  $f_{f5/2}$  и  $f_{f7/2}$  для реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$ . /Обозначения те же, что и на рис. 1/.

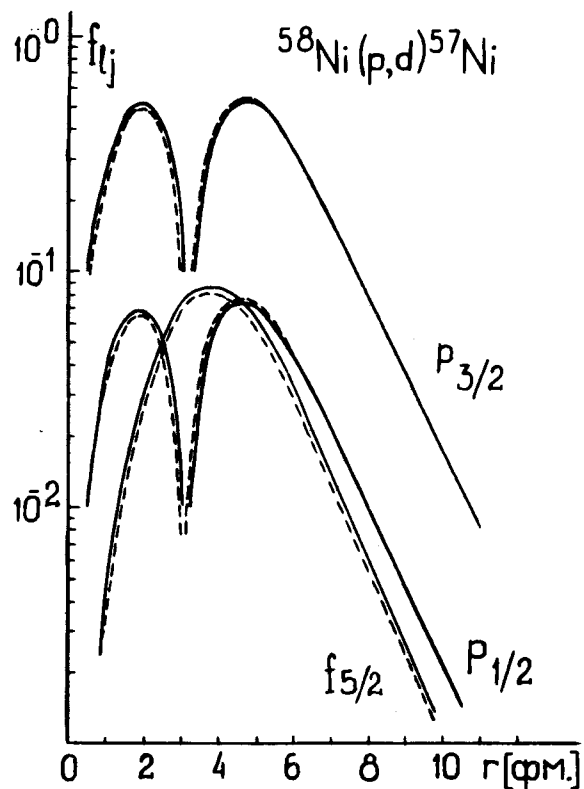


Рис. 3. Формфакторы  $f_{p1/2}$ ,  $f_{p3/2}$  и  $f_{f5/2}$  для реакции  $^{58}\text{Ni}(p,d)^{57}\text{Ni}$ . /Обозначения те же, что и на рис. 1/.

дены коэффициенты смешивания конфигураций для основного состояния ядер  $^{42}\text{Ca}$  и  $^{58}\text{Ni}$ . Из представленных результатов видно, что формфакторы, соответствующие доминирующим оболочечным компонентам в состоянии  $\Psi_B$ , почти не изменяются с учетом принципа Паули. В то же время изменение формфакторов, соответствующих малым оболочечным компонентам, может оказаться значительным. Особенно это характерно для внутренней области ядра, которая оказывает существенное влияние на нормировку формфактора, а, следовательно, и на абсолютное значение сечения.

Сравнение с результатами работы<sup>/9/</sup> показывает, что асимптотика формфакторов, полученных в результате решения приближенного уравнения, совпадает с решением точной системы связанных уравнений. В то же время, как и ожидалось, во внутренней области, особенно для малых компонент, имеется ощутимое различие.

На рис. 4-5 представлены дифференциальные сечения, рассчитанные с полученными формфакторами в приближении искаженной воли /обозначения линией те же/. Используемые оптические параметры приведены в табл. 2. Видно, что при учете принципа Паули изменение в дифференциальном сечении может достигать 30%.

Таким образом, решение точного в рамках оболочечного приближения уравнения подтвердило, что учет принципа Паули в ряде случаев оказывается важным. При этом приближенные методы будут давать хороший результат в тех случаях, когда базисные состояния обладают большими энергиями связи и имеется доминирующая оболочечная компонента в состоянии  $\Psi_B$ .

Были также проведены расчеты формфакторов реакции (d,p)-срыва в первое возбужденное  $0^+$ -состояние ядер  $^{42}\text{Ca}$  и  $^{58}\text{Ni}$ . Оказалось, что в этих случаях учет принципа Паули дает малый эффект. Так изменение значений формфакторов не превышает 7%. На рис. 6 показана компонента формфактора  $f_{p1/2}$  для срыва в первое возбужденное  $0^+$ -состояние  $^{42}\text{Ca}$ , где эффект учета принципа Паули оказался наиболее заметен. В этих работах все параметры брались такими же, как и в предыдущем случае. При этом были получены следующие значения энергии первого возбужденного  $0^+$ -состояния:



Таблица 2  
 Параметры оптического потенциала

	$E_p$ (МэВ)	$V$ (МэВ)	$W_s$ (МэВ)	$r_0$ (ФМ)	$a_0$ (ФМ)	$(r_0)_s$ (ФМ)	$(a_0)_s$ (ФМ)	$r_c$ (ФМ)
$^{42}\text{Ca}$	p	26.5	47.6	5.679	1.117	0.69	1.229	0.751
	d		116.8	15.7	0.997	0.787	1.422	0.579
$^{58}\text{Ni}$	p	28	44.6	17.1	1.30	0.458	1.070	0.341
	d		91.0	18.75	1.15	0.68	1.340	0.68

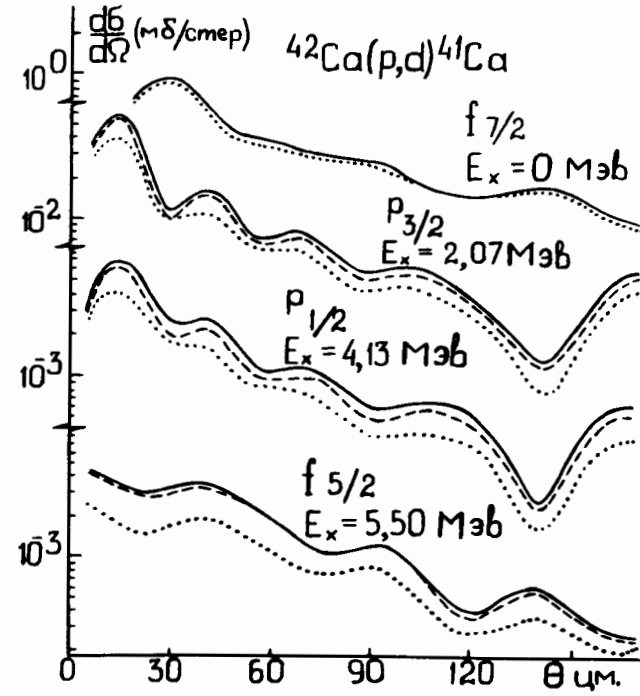


Рис. 4. Дифференциальные сечения реакции  $^{42}\text{Ca}(p,d)^{41}\text{Ca}$ .  
 /Обозначения те же, что и на рис. 1/.

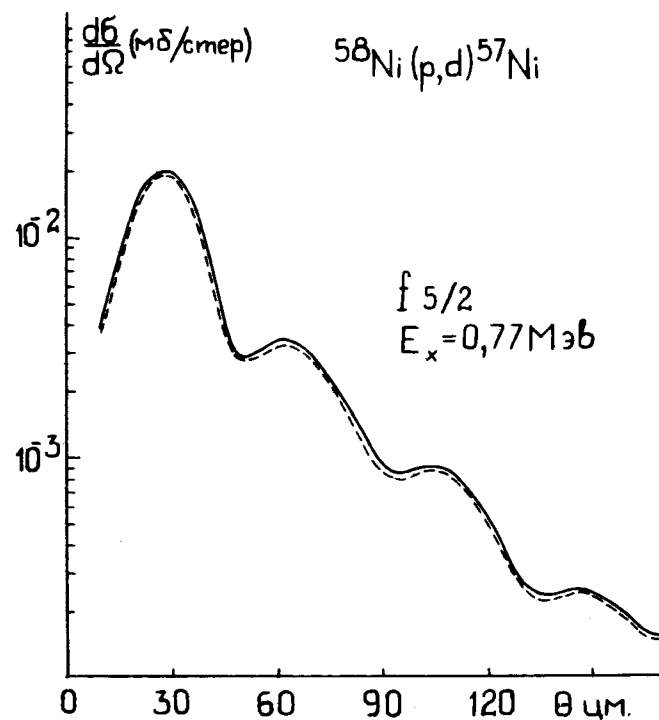


Рис. 5. Дифференциальное сечение реакции  $^{58}\text{Ni}(p,d)^{57}\text{Ni}$  на состояние  $1f_{5/2}$  /Обозначения те же, что и на рис. 1/.

$^{42}\text{Ca}$ :  $E_{B^*} = -13,0 \text{ МэВ}$ ;  $^{58}\text{Ni}$ :  $E_{B^*} = -22,0 \text{ МэВ}$ .

В заключение следует сделать одно замечание. Мы называли решаемую нами систему /6/ - точной в рамках оболочечного приближения. При формальных выкладках это действительно так. Однако в практических расчетах разложение /3/ проводилось лишь по связанным состояниям одной четности, в предположении, что вклад связанных состояний другой четности, а также квазисвязанных, подбарьерных состояний очень мал.

Авторы признательны Е. Бангу и С. П. Ивановой за полезные обсуждения.

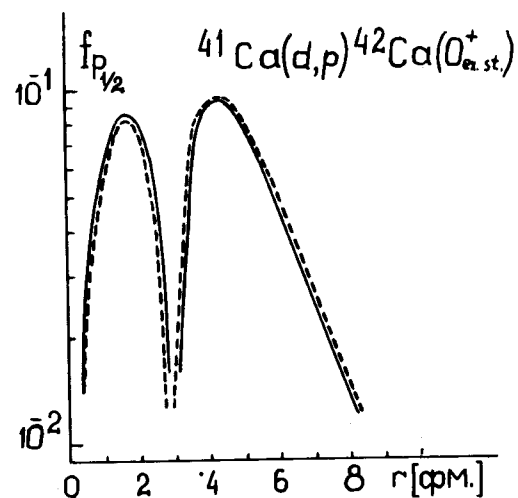


Рис. 6. Формфакторы  $f_{p_{1/2}}$  для реакции  $^{41}\text{Ca}(d,p)^{42}\text{Ca}$  на первое возбужденное  $0^+$ -состояние. /Обозначения те же, что и на рис. 1/.

## Литература

1. Е. Банг, В.Е. Бунаков, Ф.А. Гареев, Г. Шульц. ЭЧАЯ, т. 5, вып. 2 /1974/, стр. 263.
2. W.R. Pinkston, G.R. Satchler. *Nucl. Phys.*, 72, 641 (1965).
3. R.I. Philpot, W.T. Pinkston, G.R. Satchler. *Nucl. Phys.*, A119, 241 (1968).
4. A. Prakash, N. Austern. *Ann. Phys.*, 51, 418 (1969).
5. M. Kawai, K. Yazaki. *Progr. Theor. Phys.*, 38, 850 (1967).
6. M. Igarashi, M. Kawai, K. Yazaki. *Progr. Theor. Phys.*, 49, 825 (1973).
7. R.H. Ibarra, B.F. Bayman. *Phys. Rev.*, C1, 1786 (1970).
8. V.E. Bunakov, F.A. Gareev. *Phys. Lett.*, 39B, 424 (1972).
9. J. Bang, V.E. Bunakov, F.A. Gareev, R.M. Jamalejev. *H. Schulz. Physica Scripta*, 10, 115 (1974).
10. R.H. Ibarra. *Nucl. Phys.*, A211, 317 (1973).
11. Ф.А. Гареев, С.А. Гончаров, Е.П. Жидков, И.В. Пузынин, Б.Н. Хоромский, Р.М. Ямалеев. Сообщение ОИЯИ, P4-8751, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел  
12 ноября 1975 года.