



объединенный  
институт  
ядерных  
исследований  
дубна

P4-93-148

Е.Р.Маршалек<sup>1</sup>, Р.Г.Назмитдинов, И.Рагнарссон<sup>2</sup>

## АНГАРМОНИЧЕСКИЕ ГАММА-ВИБРАЦИИ В ПРОСТОЙ МОДЕЛИ

Направлено в Оргкомитет 43 Международного совещания  
по ядерной спектроскопии и структуре атомного ядра,  
Дубна, апрель 1993, в журнал «Известия РАН, серия физическая»

<sup>1</sup>Университет Нотр-Дама, США

<sup>2</sup>Технологический институт, г.Лунд, Швеция

Самосогласованная модель принудительного вращения (СМПВ) [1] является основным микроскопическим подходом, успешно применяемым при анализе свойств состояний ираст-полосы и двухквазичастичных состояний в четно-четных деформированных ядрах, а также состояний одноквазичастичной природы в нечетных деформированных ядрах при ненулевом значении углового момента. Коллективные вращательные состояния формируются в данной модели при изменении угловой частоты вращения, при этом вектор углового момента направлен вдоль оси, перпендикулярной оси симметрии ядра. Комбинируя МПВ с приближением случайных фаз (ПСФ) [2, 3, 4], удается исследовать свойства вибрационных состояний однофононной природы в зависимости от углового момента ядра. Однако известно [5], что ПСФ – это достаточно хорошее приближение для описания движения с малой амплитудой. И, следовательно, оставаясь в рамках ПСФ, трудно рассчитывать на достоверное описание ангармонических эффектов, проявляемых, например, при экспериментальном измерении электромагнитных переходов из вибрационных состояний одно- или двухфононной природы в атомных ядрах [6]. Кроме того, используя феноменологические потенциалы среднего поля типа Вудса-Саксона или Нильссона при описании вибрационных состояний, особенно в низкспиновой области, как правило, по умолчанию, во многих работах предполагается тот же набор параметров деформации потенциала среднего поля, что и для основного состояния, что в общем случае не является очевидным.

В предыдущей работе [7] на примере двух моделей: феноменологической модели взаимодействующих бозонов и модели анизотропного гармонического осциллятора (АГО), – была продемонстрирована плодотворность использования СМПВ для описания вибрационных состояний. Более того, в модели АГО удается обойти проблемы теории возмущения с помощью прямой диагонализации гамильтониана и найти спектр ангармонических вибрационных возбуждений. Однако в случае реалистических потенциалов применение СМПВ требует решения сложной системы нелинейных уравнений. Поэтому одной из целей данной работы является качественный анализ ангармонических вибрационных возбуждений на основе простой модели АГО, несомненным достоинством которой является возможность получить решения в аналитическом виде. Далее, хорошо известно, что в гармоническом приближении в рамках модели АГО можно получить оценки расщепления различных ветвей гигантских электрических резонансов (ГР) [8, 9, 10], поэтому другой целью

данной работы является уточнение этих оценок, в частности, для  $\gamma$ -вибраций на основе использования СМПВ.

Рауссиан (гамильтониан МПВ) бесспиновых частиц, движущихся в среднем поле неаксиального вращающегося вокруг оси  $z$  с угловой частотой вращения  $\Omega$  осциллятора, имеет вид:

$$R = H - \Omega L_3 = \sum_{i=1}^A \left\{ \frac{p^2}{2m} + \frac{m}{2} (\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2) - \Omega l_3 \right\} \quad (1)$$

Диагонализация одночастичного гамильтониана с помощью канонического преобразования [11, 12] приводит к новым собственным частотам  $\omega_{\pm}$ :

$$\omega_{\pm}^2 = \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2} + \Omega^2 \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + 8\Omega^2 (\omega_1^2 + \omega_2^2)} \quad (2)$$

в дополнение к частоте  $\omega_3$ . Условие минимума среднего значения гамильтониана (1) относительно вариации параметров формы потенциала АГО при дополнительном условии сохранения объема [13]  $\omega_1 \omega_2 \omega_3 = (\omega_0)^3$  приводит к фундаментальному результату

$$\omega_1^2 \langle X_1^2 \rangle = \omega_2^2 \langle X_2^2 \rangle = \omega_3^2 \langle X_3^2 \rangle, \quad (3)$$

где  $X_k^2 = \sum_{i=1}^A x_k^2(i)$ . При заданной деформации полная энергия системы  $E$  и полный спин  $I$  определяются следующими выражениями

$$E = \Sigma_3 \omega_3 + \Sigma_+ \omega_+ + \Sigma_- \omega_- + \Omega I, \quad (4)$$

$$I \equiv \langle L_3 \rangle = K = \Omega \left( \frac{\Sigma_-}{\omega_-} \left( 2 \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} - 1 \right) - \frac{\Sigma_+}{\omega_+} \left( 2 \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{\omega_+^2 - \omega_-^2} + 1 \right) \right) \quad (5)$$

Таким образом, решив уравнения (3), можно определить параметры деформации и вычислить такие характеристики системы, как  $E$  (4) и  $I$  (5). Мы решаем ур.(3) для фиксированной (adiaбатической) конфигурации, определяемой величинами  $\Sigma_+$ ,  $\Sigma_-$ ,  $\Sigma_3$ , где  $\Sigma_k = \sum (n_k + \frac{1}{2})_{\text{окл.}}$ . Естественно предположить аксиальную симметрию ядра при  $\Omega=0$ . Это означает, что  $\Sigma_+ = \Sigma_- = \Sigma_1$  и осцилляторные частоты удовлетворяют условию  $\omega_1^0 = \omega_2^0 = \omega_3^0$ . Тогда степень деформированности системы можно характеризовать отношением осей  $r = \omega_1^0 / \omega_3^0 = \Sigma_3 / \Sigma_1 = (\omega_1^0 / \omega_0)^3$ . В некоторых задачах [11, 12, 14] вместо условия самосогласования (3) используется условие изотропного распределения скоростей (ИРС) во вращающейся системе координат. Необходимо отметить, что оба условия эквивалентны только при  $\Omega=0$ . Более того, при выборе условия ИРС в модели реализуется только твердотельный

режим вращения [12], и для адиабатической конфигурации  $(\Sigma_1, \Sigma_3)$  имеет место  $\Omega \equiv 0$ , что несовместимо с существованием  $\gamma$ -вибраций в рассматриваемой модели.

Используя выражения для  $\langle X_k^2 \rangle$  [12], ур.(3) можно переписать в форме

$$(\omega_1^2 - \omega_2^2) (\omega_+ \omega_- - \Omega^2) = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\omega_1^2 (\omega_2^2 + \omega_+ \omega_- - \Omega^2)}{\omega_+ \omega_- (\omega_+ + \omega_-) \omega_3} = r \quad (7)$$

Тривиальное решение, следующее из ур.(6),  $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega_1^2$ , эквивалентно основному состоянию системы  $\Omega = 0$ . Чтобы найти нетривиальное решение, которое должно удовлетворять условию  $\omega_+ \omega_- = \Omega^2$ , необходимо решить ур.(7) совместно с условием сохранения объема. После несложных алгебраических вычислений мы получаем следующее кубическое уравнение

$$(s^2)^3 + \frac{r^2 \omega_0^2}{\Omega^2} s^2 - 4r^2 = 0, \quad (8)$$

где  $s^2 \equiv (\omega_1^2 + \omega_2^2) / \omega_0^2$ . Из условия действительности решений ур.(8) следует, что физические решения существуют только в области  $0 < \Omega \leq \Omega_c$ . Этот результат подразумевает явление "backbending" для углового момента относительно угловой частоты вращения. Критическая частота вращения, начиная с которой система из режима аксиального вращения переходит в режим трехосного вращения, определяется как

$$\Omega_c = \sqrt{2} \omega_1^0 / 2 = \sqrt{2} r^{1/3} \omega_0 / 2 = \omega_{\text{псф}} / 2 \quad (9)$$

В данной точке бифуркации тривиальное решение также удовлетворяет ур.(8). Кроме того, критическая частота соответствует половине собственной частоты для изоскалярного квадрупольного резонанса с  $K=2$  [9]. Отметим, что впервые соответствие  $\Omega = \Omega_c \equiv \omega_K / K$  для собственных мод ПСФ  $\omega_K$  было показано в работе [15] для сферических ядер в рамках теории возмущения, где в качестве параметра разложения выступала величина  $|\Omega - \Omega_c|^{1/2}$ .

На рис.1 показана типичная поверхность потенциальной энергии (4) для  $I=K=2$ , определенная на плоскости параметров деформации  $\epsilon_{20}$  и  $\epsilon_{22}$  (см. пояснение к рис. 1). Параметры деформации, соответствующие минимуму энергии на данной потенциальной поверхности, в точности соответствуют параметрам деформации, найденным из решения ур.(8). Чтобы лучше понять, как формируются состояния при

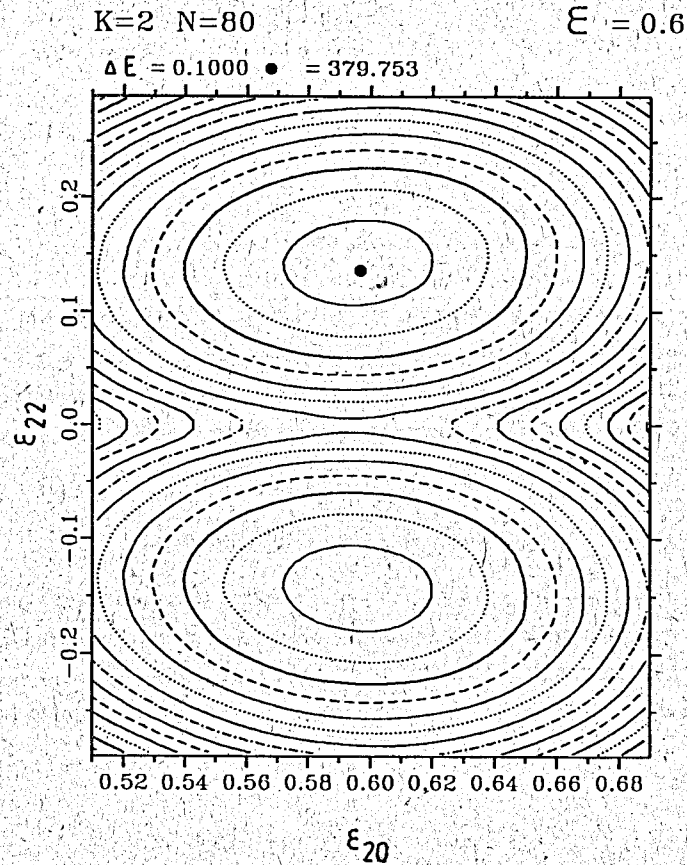


Рис. 1. Поверхность потенциальной энергии состояния K=2 (в единицах  $\hbar\omega_0$ ) для конфигурации  $\Sigma_1 = \Sigma_2=100$ ,  $\Sigma_3=200$ . Здесь  $\epsilon_{20} = \epsilon \cos\gamma$ ,  $\epsilon_{22} = \epsilon \frac{\sin\gamma}{\sin 60^\circ}$ . Состояние K=I построено путем вращения вокруг оси симметрии ядра z, что соответствует стандартному выбору оси x в качестве оси вращения в МПВ путем переопределения величины  $\gamma' = \gamma - 120^\circ$

вращении вокруг оси симметрии, проанализируем следующий предельный случай. Рассмотрим слегка неаксиальное ядро, вращение которого вокруг оси симметрии приводит к сингулярной точке  $\gamma = 0$ ,  $\Omega = \omega_1$ . При этом параметр  $\epsilon_{22}$  достаточно мал:

$$\omega_1 = \omega_1 + \omega_0 \frac{\epsilon_{22}}{2}, \quad (10)$$

$$\omega_2 = \omega_1 - \omega_0 \frac{\epsilon_{22}}{2}, \quad (11)$$

где  $\omega_1 = \omega_0(1 + \epsilon/3)$ . Далее определим частоту вращения как

$$\Omega = \omega_1 - \omega_0 \delta, \quad (12)$$

где  $\delta$  должна быть больше, чем  $\epsilon_{22}/2$ , потому что частота вращения должна быть меньше наименьшей из двух осцилляторных частот. Допустим, что  $\epsilon_{22}$  и  $\delta$  стремятся к нулю одновременно. Без ограничения общности естественно предположить, что  $\delta = \alpha(\epsilon_{22}/2)$ , где некоторая константа  $\alpha > 1$ . Разлагая  $\omega_+$  и  $\omega_-$  по степеням  $\epsilon_{22}$ , уже в первом порядке при  $\epsilon_{22} \rightarrow 0$  получаем  $\Omega = \omega_1$ . Соответственно для углового момента имеем

$$I = \Sigma_1 \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right), \quad (13)$$

то есть для ненулевого значения  $\alpha$  имеем конечное значение для величины  $I = K$ . В этом пределе  $\omega_+ = 2\omega_1$ , а  $\omega_- = 0$ , то есть полная энергия определяется как

$$E = \hbar\omega_1 I + E_0, \quad (14)$$

где  $E_0 = \hbar\omega_3 \Sigma_3 + 2\hbar\omega_1 \Sigma_1$ . На рис.2 представлены разрезы поверхности потенциальной энергии  $E - E_0$  для конфигурации из 80 частиц для супердеформированного ядра с отношением частот 2:1 и  $\epsilon = 0.6$  как функции  $\epsilon_{22}$  для различных значений  $I = K$ . Аналогичные величины, поделенные на соответствующее значение  $I = K$ , показаны на рис. 3. В соответствии с выражением (14) при  $\epsilon_{22} = 0$  спектр возбуждений пропорционален величине  $\hbar\omega_1$ . В рассматриваемом случае при  $\epsilon = 0.6$   $\hbar\omega_1 = 1.2\hbar\omega_0 = 1.260\hbar\omega_0$ , где  $\hbar\omega_0 = 41A^{-1/3}$  МэВ. Из рис.2,3 следует, что "вращение" вокруг оси симметрии ядра соответствует одночастичным возбуждениям, несущим определенный угловой момент K, с энергией  $\hbar\omega_1$ . Данный тип движения оказывается невыгодным; чтобы получить выигрыш в энергии, система в бифуркационной точке вынуждена сменить режим аксиального "вращения" вокруг оси



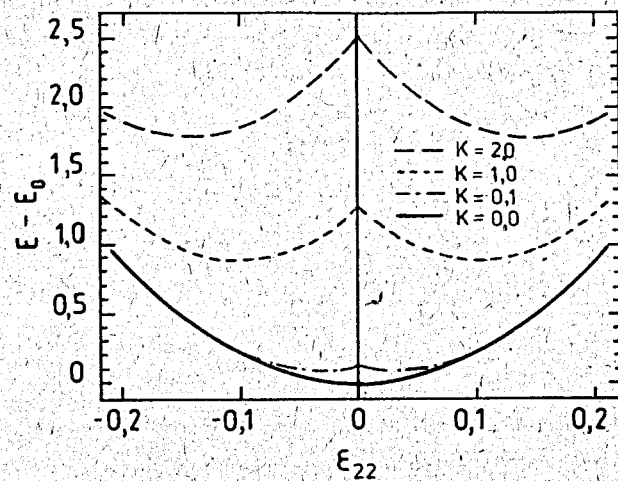


Рис. 2. Энергия возбуждения (см. пояснения в тексте) при фиксированном значении  $\epsilon_{20} = 0,6$  для различных значений  $K$  как функция параметра деформации  $\epsilon_{22}$ . Энергия определена в единицах осцилляторной частоты  $\hbar\omega_0$

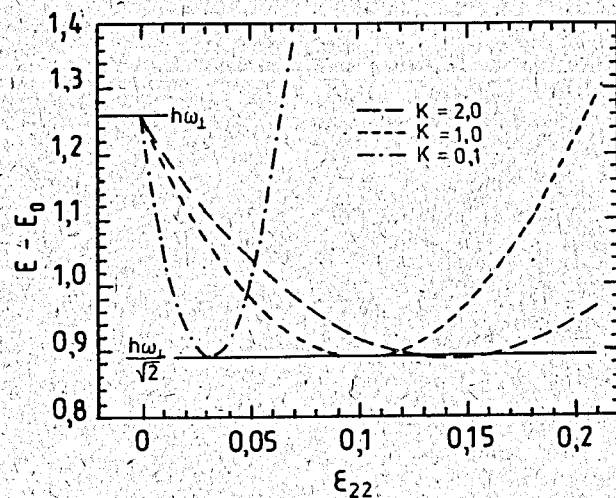


Рис. 3. То же, что и на рис. 2. Энергия возбуждения, соответствующая состоянию с данным  $K$ , поделена на значение  $K$ . Очевидно, что "аксиальное вращение" представляет собой одночастичное возбуждение с энергией  $\hbar\omega_1$ , тогда как минимуму энергии соответствует состояние с энергией, пропорциональной  $\hbar\omega_1/\sqrt{2}$

симметрии на формирование состояний с ненулевым значением  $\gamma$ -деформации, соответствующее вибрационным возбуждениям с данным  $K$ . Несмотря на то, что абсолютное значение  $\gamma$ -деформации зависит от отношения  $\gamma$  в нашей модели,  $\gamma$ -вибрационные состояния характеризуются заметным значением  $\gamma$ -деформации (см. рис. 4,  $N_f \leq 6$ ). Эта закономерность хорошо известна из расчетов параметров

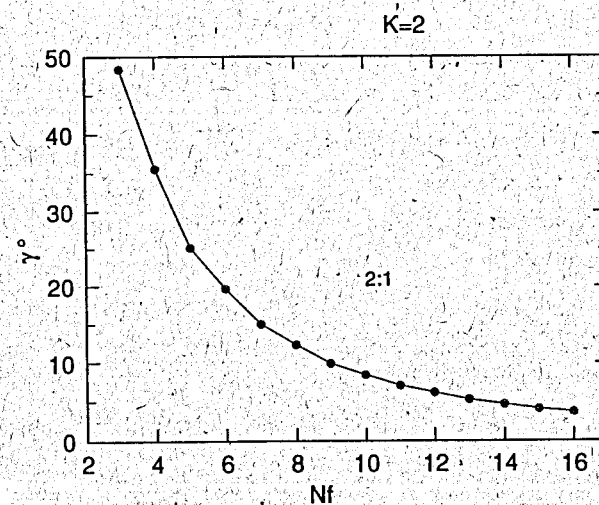


Рис. 4. Рассчитанное значение  $\gamma$ -деформации для супердеформированного ядра в зависимости от номера последней заполненной оболочки. Результат, представленный на рис. 1, соответствует  $N_f = 7$  и числу нейтронов (или протонов)  $N = 80$

формы легких ядер с помощью потенциала Нильссона и метода оболочечной поправки [16, 17]. С увеличением номера последней заполненной оболочки  $N_f$  абсолютное значение  $\gamma$  для состояния  $K=2$  уменьшается. Данное поведение удастся лучше понять, определив величину энергии состояния с данным  $K$  как функцию углового момента

$$E = E_0 + \hbar\Omega_c K \left( 1 - \frac{5}{24\sqrt{2}} \left( \frac{K}{\sum 1} \right) + \frac{61}{1728} \left( \frac{K}{\sum 1} \right)^2 - \dots \right). \quad (15)$$

Здесь  $E_0 = 3\sqrt{2} \sum 1 \hbar\Omega_c$  и  $K = \langle L_z \rangle$  принимает следующие значения:  $K=0, 2, 4, \dots$ . Второй член в выражении (15)  $\hbar\Omega_c K$  есть энергия возбуждения гамма-вибрационного состояния, величина которой совпадает с результатом работы [9].

Необходимо отметить, что результат работы [9] получен в предположении аксиальной симметрии деформированного ядра, тогда как наша модель предсказывает неаксиальность и учитывает отклонение в оценке величины энергии состояния с данным  $K$ , обусловленное ангармоническими поправками к ПСФ. Физический механизм данного явления обусловлен тем, что гамма-вibrации индуцируют неаксиальную деформацию системы. Как следует из выражения (15), угловой момент  $K$  фиксирует не только амплитуду вибрации, но совместно с ангармоничностью и ненулевую  $\gamma$ -деформацию. С увеличением номера последней заполненной оболочки  $N_f$  величина  $(K/\Sigma_1)$  уменьшается из-за увеличения  $\Sigma_1$ , и, соответственно, уменьшается и  $\gamma$ -деформация для больших значений  $N_f$  (см. рис.4). Очевидно, что вследствие малости величины  $(K/\Sigma_1)$  при больших значениях  $N_f$  параметры деформации системы будут достаточно близко соответствовать параметрам деформации, характерным для основного состояния. Поэтому при анализе одно- или двухфононных гигантских квадрупольных резонансов в тяжелых ядрах роль ангармонических поправок должна быть незначительна.

На рис.5 достаточно отчетливо наблюдается проявление оболочечной структуры центроида энергии гигантского изоскалярного квадрупольного гамма-резонанса для систем, аксиально-симметричных в основном состоянии с отноше-

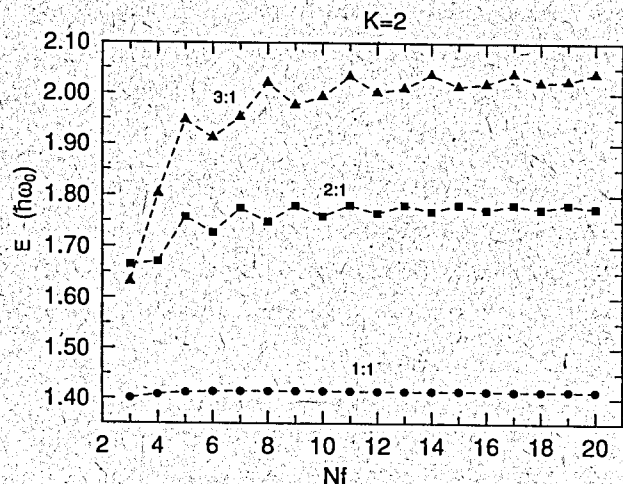


Рис. 5. Энергия изоскалярных гигантских гамма-вibrационных состояний в зависимости от номера последней заполненной оболочки для трех типов форм системы: сферической (1:1), супердеформированной (2:1) и гипердеформированной (3:1). Энергия дана в единицах  $\hbar\omega_0$

нием осей 1:1, 2:1, 3:1. Интуитивный способ понять основные закономерности в случае 2:1 деформации — это представить два сферических ГО, соединенных вместе [18, 19]. В случае четных  $N_f$  осцилляторы имеют различное число частиц, что обуславливает мягкость по отношению к квадрупольным колебаниям. При нечетных значениях  $N_f$  осцилляторы имеют равное число частиц, и система приобретает жесткость по отношению к квадрупольным степеням свободы. Аналогичное зигзагообразное поведение центроида энергии как для низколежащих, так и высоколежащих состояний наблюдается и для октапольных вибраций [10, 20]. Сходное поведение можно отметить и для случая 3:1, когда нижайшее однофононное возбуждение соответствует каждой третьей заполненной оболочке. С увеличением номера последней заполненной оболочки эти характерные особенности размываются из-за уменьшения роли оболочечной структуры.

В заключение, суммируя представленные результаты, отметим, что основываясь на простой модели ГО, мы продемонстрировали плодотворность использования СМРВ с целью описания *ангармонических* квадрупольных вибраций, несущих определенный угловой момент. В нулевом приближении мы воспроизвели хорошо известный результат работы [9] для изоскалярного гигантского квадрупольного резонанса с  $K=2$ , который является достаточно надежным только для тяжелых ядер. Проведенный анализ показывает, что гамма-вibrационные состояния могут иметь заметную неаксиальную деформацию. Этот факт необходимо принимать во внимание при реалистическом описании как одно-, так и двухфононных гамма-вibrационных состояний в атомных ядрах.

## Литература

- [1] Goodman A. L. Advances in Nuclear Physics, vol. 11, eds. J.W. Negele and E. Vogt (Plenum Press, 1979) p. 263
- [2] Marshalek E. R. Nucl.Phys., 1976, A266, p. 317.
- [3] Marshalek E. R. Nucl.Phys., 1977, A275, p. 416.
- [4] Квасил Я., Назмитдинов Р.Г. ЭЧАЯ, 1986, т.17, вып.4, с. 613
- [5] P. Ring and P. Shuck. The nuclear many-body problem (Springer-Verlag, Berlin, 1980) ch.10.

- [6] Boerner H. G. et al. Phys.Rev.Lett., 1991, **66**, p. 691
- [7] E.R. Marshalek and R.G. Nazmitdinov. Phys. Lett., 1993, **B300**, p. 199
- [8] Borh A., Mottelson B. R. Nuclear Structure, (Benjamin, New York, 1975) Vol.2
- [9] Suzuki T., Rowe D. J. Nucl. Phys., 1977, **A289**, p. 461
- [10] Nazmitdinov R., Åberg S. Phys. Lett., 1992, **B289**, p. 238
- [11] J.P. Blaizot, N. Kassis and G. Ripka, in Heavy Ion, High Spin States and Nuclear Structure (STI/PUB/386, IAEA Vienna 1975); J.P. Blaizot and G. Ripka, Quantum Theory of Finite Systems (MIT Press, Cambridge, Mass., 1985) ch. 6.
- [12] Зелевинский В.Г. ЯФ, 1975, т. 22, с. 1085.
- [13] T. Troudet and R. Arvieu. Ann. Phys., 1981, **134**, p. 1
- [14] Назмитдинов Р.Г., Квасил Я. ЯФ, 1990, т. 52, с. 960.
- [15] E. R. Marshalek. Phys. Rev., 1971, **C3**, 1710; E. R. Marshalek and M. Sabato, Phys. Rev., 1971, **C4**, 1006.
- [16] I. Ragnarsson, S. G. Nilsson and R. K. Sheline. Phys. Rep., 1978, **45**, p. 1.
- [17] R. K. Sheline et al. J.Phys.G: Nucl. Phys., 1988, **14**, p. 1201.
- [18] T. Bengtsson et al. Phys. Scr., 1981, **24**, p. 200.
- [19] W. Nazarewicz and J. Dobaczewski. Phys. Rev. Lett., 1992, **68**, p. 154.
- [20] T. Nakatsukasa, S. Mizutori and K. Matsuyanagi. Prog. Theor. Phys., 1992, **87**, p. 607.

Рукопись поступила в издательский отдел  
27 апреля 1993 года.